



# Jahrbuch

über die

# Fortschritte der Mathematik

im Verein mit anderen Mathematikern

herausgegeben

von

Carl Ohrtmann, Felix Müller, Albert Wangerin.

Achter Band.

Jahrgang 1876.

Berlin.

Druck und Verlag von G. Reimer.

1878.

# Erklärung der Citate.

---

**Eine eingeklammerte (arabische) Zahl vor der (römischen) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu der der Band gehört.**

*Acc. P. N. L.:* Atti della Accademia Pontifica dei Nuovi Lincei Roma. 4°.

*Acc. R. d. L.:* Atti della Accademia Reale dei Lincei. Roma 4°.

*Allg. J. f. Uhrmacherkunst:* Allgemeines Journal für Uhrmacherkunst. Naumburg a. S. 4°.

*Almeida J.:* Journal de physique théorique et appliquée, publié par J. Ch. d'Almeida. Paris. 8°.

*Analyst:* The Analyst, a monthly journal of pure and applied mathematics. Edited and published by J. E. Hendricks. Des Moines, Jowa. gr. 8°.

*Ann. de l'Éc. N.:* Annales scientifiques de l'école normale supérieure, publiées sous les auspices du ministre de l'instruction publique par Mr. Le Pasteur. Paris. Gauthier-Villars. 4°.

*Ann. d. Mines:* Annales des Mines ou Recueil de mémoires sur l'exploitation des mines et sur les sciences et les arts qui s'y rapportent, rédigées par les Ingénieurs des Mines et publiées sous l'autorisation du Ministre des travaux publics. Paris. 8°.

*Ann. d. l'obs. de Brux.:* Annuaire de l'observatoire royal de Bruxelles. Bruxelles. 8°.

*Ann. d. P. et d. Ch.:* Annales des ponts et des chaussées. Mémoires et documents relatifs à l'art de construction et en service de l'ingénieur. Paris. 8°.

*Ann. Soc. scient. Brux.:* Annales de la société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. F. Hayez. (Mit doppelter Paginirung, unterschieden durch die Buchstaben A und B.)

*Arch. f. Math. og Nat.:* Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Christiania.

*Arch. Néerl.:* Archives Néerlandaises des sciences éxactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. La Haye. 8°.

*Astr. Nachr.:* Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher, herausgegeben von C. A. F. Peters. Altona. 4°.

*Atti di Torino:* Atti della Reale Accademia di Torino. Torino.

*Augsb. allg. Zeitung:* Augsburger Allgemeine Zeitung. Augsburg.

*Battaglini G.:* Giornale matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Napoli. gr. 8°.

*Bayr. Bl.:* Blätter für das bayrische Gymnasial- und Realschulwesen redigirt von W. Bauer und A. Kurz. München. 8°.

*Berl. Abh.:* Mathematisch-physikalische Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.

*Berl. Monatsber.:* Monatsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°.

*Boncompagni Bull.:* Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Roma. 4°.

*Borchardt J.:* Journal für reine und angewandte Mathematik. Als Fortsetzung des von A. L. Crelle gegründeten Journals, herausgegeben unter Mitwirkung der Herren Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass von C. W. Borchardt. Berlin. G. Reimer. 4°.

*Brioschi Ann.:* Annali di matematica pura ed applicata diretti da F. Brioschi e L. Cremona in continuazione degli Annali gia pubblicati in Roma da Prof. Tortolini. Milano. 4°.

*Bull. de Belg.:* Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique. Bruxelles. 8°.

*Bull. de St. Pétersb.:* Bulletin de l'Académie Impériale de St. Pétersbourg. Pétersbourg et Leipzig. Folio.

*Bull. S. M. F.:* Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. Paris. 8°.

*Bull. d. l. S. de Pau:* Bulletin de la Société des Sciences de Pau.

*Carl Repert.:* Repertorium für Experimental-Physik herausgegeben von Ph. Carl. München. gr. 8°.

*Casopis:* Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studirende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8°.

*Clebsch Ann.:* Mathematische Annalen. In Verbindung mit C. Neumann begründet durch R. F. A. Clebsch. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, C. Neumann, K. v. d. Mühll, gegenwärtig herausgegeben von F. Klein und A. Mayer. Leipzig. Teubner. 8°.

*Conn. d. temps:* Connaissance des temps ou des mouvements célestes. Paris. Gauthier-Villars. 8°.

*C. R.:* Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris. 4°.

*Darboux Bull.:* Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, rédigé par Mrs. G. Darboux et J. Hoüel avec la collaboration des Mrs. André, Lespiault, Painvin et Radau, sous la direction de la commission des Hautes Études. Paris. Gauthier-Villars. 8°.

*Denkschr. d. Par. Ges.:* Denkschriften der Pariser Gesellschaft der exacten Wissenschaften. (Polnisch.) Paris. 4°.

*Educ. Times:* Mathematical questions, with their solutions from the „Educational Times" with many papers and solutions not published in the „Educational Times." Edited by W. J. C. Miller. London. 8°. C. F. Hodgson and Son.

*Erl. Ber.:* Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. Erlangen. 8°.

*Freiburg. Ber.:* Berichte der naturforschenden Gesellschaft in Freiburg i. Br. Freiburg i. Br. 8°.

*Gött. Anz.:* Göttingische gelehrte Anzeigen. Unter der Aufsicht der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 12°.

*Gött. Nachr.:* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität zu Göttingen. Göttingen. 12°.

*Grunert Arch.:* Archiv für Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Unterrichtsanstalten gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. Greifswald. 8°.

*Hoffmann Z.:* Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung von Fachlehrern herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Leipzig. 8°.

*Krak. Denkschr.:* Denkschriften der Krak. Akademie der Wissenschaften Krakau. (Polnisch.)

*Leipz. Abh.:* **Abhandlungen der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.** Leipzig.

*Liouville J.:* **Journal de mathématiques pures et appliquées fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville. Publié par H. Résal avec la collaboration de plusieurs savants. Paris. 4°.**

*Mém. in 8° de Belg.:* **Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des Sciences de Belgique. Bruxelles. 8°.**

*Mem. di Bologna:* Memorie dell' Accademia Reale di scienze del' Istituto di Bologna. Bologna. 4°.

*Mém. de Bord.:* Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles à Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°.

*Mém. cour. de Belg.:* Mémoires couronnés de l'Académie Royale de Belgique. Bruxelles. 4°.

*Mem. di Modena:* Memorie della Accademia Reale di Modena. Modena.

*Mém. prés. de Paris:* Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France. Paris.

*Mem. di Torino:* Memorie dell' Accademia di scienze di Torino. Torino.

*Messenger:* The Messenger of mathematics, edited by M. Allen Whitworth, C. Taylor, R. Pendlebury, J. W. L. Glaisher. London and Cambridge. Macmillan. 8°.

*Mondes:* Les Mondes, revue hebdomadaire des sciences et de leur application aux arts et à l'industrie par l'Abbé Moigno. Paris. 8°.

*Monthl. Not.:* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. London. 4°.

*Mosk. Math. Samml.:* Mathematische Sammlung, herausgegeben von der Moskauer mathematischen Gesellschaft. Moskau. Salvoréff.

*Münch. Abh.:* Abhandlungen der Kgl. Baierschen Akademie der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse. München.

*Münch. Ber.:* Sitzungsberichte der Kgl. Baierschen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8°.

*Nachr. v. Kiew:* Nachrichten der Kaiserlichen Universität zu Kiew. Kiew.

*N. C. M.:* Nouvelle correspondance de mathématiques, publiée par E. Catalan et P. Mansion. Mons, Manceaux. Paris, Gauthier-Villars. 8°.

*Niederrhein. Ges. f. Natur- u. Heilk.:* Verhandlungen des Niederrheinischen Vereins für Natur- und Heilkunde.

*Nieuw Arch.:* Nieuw Archief voor wiskunde. Amsterdam. 8°.

*Nouv. Ann.:* Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, rédigé par Mrs. Gerono et Ch. Brisse. Paris. 8°.

*Öfv. v. Stockh.:* Öfversigt af Kongl. Svenks Wetenskabs Akademiens Forhandlingar. Stockholm.

*Overs. v. Kopenh.:* Oversigt over Videnskabs Selskabet Forhandlingar. Kopenhagen.

*Phil. Mag.:* The London, Edinburgh and Dublin philosophical Magazine and journal of science, by Brewster, Kane, Francis. London. 8°.

*Phil. Trans.:* Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4°.

*Pogg. Ann.:* Annalen der Physik und Chemie herausgegeben zu Berlin von Poggendorff. Leipzig. 8°.

*Polit.:* Il Politecnico.

*Prag. Ber.:* Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8°.

*Proc. Am. Acc.:* Proceedings of the American philosophical Society. Philadelphia.

*Proc. of Cambr.:* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge.

*Proc. of Edinb.:* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8°.
*Proc. L. M. S.:* Proceedings of the London Mathematical Society. London. 8°.
*Proc. of London:* Proceedings of the Royal Society of London. London. 8°.
*Quart. J.:* The Quarterly Journal of pure and applied mathematics. Edited by Sylvester and Ferrers. London. 8°.
*Quart. J. of Science:* The Quarterly Journal of Science and Annales of Mining, Metallurgy, Engineering, Industrial Arts and Technology. Edited by William Crookes. London. 8°.
*Rend. di Bol.:* Rendiconti dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna.
*Rend. Ist. Lomb.:* Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano. 8°.
*Rep. Brit. Ass.:* Reports of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°.
*Rev. d'Art.:* Revue d'Artillerie paraissant le 15. de chaque mois. Paris.
*Schlömilch Z.:* Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter verantwortlicher Redaction von Schlömilch, Kahl und Cantor. Leipzig. Teubner. 8°.
*Hl. A.:* Historisch-literarische Abtheilung (besonders paginirt).
*Soc. de Neuch.:* Société des sciences naturelles de Neufchâtel.
*Stockholm Handl.:* siehe Öfv. v. Stockholm.
*Trans. of Conn.:* Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences. New-Haven.
*Trans. of Dublin:* Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin.
*Trans. of Edinb.:* Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 4°.
*Ups. Un. Arsskr:* Upsala Universitets Årsskrift. Upsala. 8°.
*Verh. d. naturf. Ver. zu Karlsruhe:* Verhandlungen des naturforschenden Vereins zu Karlsruhe. Karlsruhe.
*Verh. d. naturf. Ver. d. pr. Rheinl. u. Westph.:* Verhandlungen des naturforschenden Vereins der preussischen Rheinlande und Westphalens.
*Versl. en Mededeel.:* Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschapen. Afdeeling Natuurkunde. Amsterdam.
*Wien. Anz.:* Anzeigen der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Wien. 8°.
*Wien. Ber.:* Sitzungsberichte der mathem.-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abtheilung. Wien. 8°.
*Wien. Denkschr.:* Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Wien. 4°.
*Wiener Presse:* Wiener Presse. Wien.
*Wolf J.:* Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich von R. Wolf. Zürich. 8°.
*Z. dtsch. Ing.:* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure herausgegeben von Ziebarth. Berlin. 4°.
*Z. f. Verm.:* Zeitschrift für Vermessungswesen, herausgegeben von W. Jordan.
*Zeuthen Tidsskr.:* Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af Zeuthen. Kopenhagen. 8°.

# Inhaltsverzeichniss.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

## Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

### Capitel 1. Geschichte.

## Capitel 2. Philosophie.

## Zweiter Abschnitt. Algebra.

Capitel 1. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

## Dritter Abschnitt. Zahlentheorie.

### Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Theorie der Formen.

Seite

### Capitel 3. Kettenbrüche.



## Vierter Abschnitt. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

Seite

## Fünfter Abschnitt. Reihen.

### Capitel 1. Allgemeines.



### Capitel 2. Besondere Reihen.

## Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

### Capitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).



### Capitel 2. Differentialrechnung. (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima).



### Capitel 3. Integralrechnung.



### Capitel 4. Bestimmte Integrale.

## Capitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Capitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

Capitel 7. Variationsrechnung.



## Siebenter Abschnitt. Functionentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Functionen.

## Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

### Capitel 1. Principien der Geometrie.



### Capitel 2. Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs).



### Capitel 3. Elementare Geometrie. (Planimetrie. Trigonometrie. Stereometrie.)

Capitel 4. Darstellende Geometrie.



Capitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Ebene Gebilde.

## B. Räumliche Gebilde.



## C. Abzählende Geometrie.

## Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

### Capitel 1. Coordinaten.

Capitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.



B. Theorie der algebraischen Curven.

## C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

## D. Andere specielle Curven.

## Capitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

### A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

## Capitel 3. Statik.

### A. Statik fester Körper.



### B. Hydrostatik.

## Capitel 4. Dynamik.

### A. Dynamik fester Körper.

B. Hydrodynamik.



Capitel 5. Potentialtheorie.

## Elfter Abschnitt. Mathematische Physik.

### Capitel 1. Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

## Capitel 4. Wärmelehre.

## Zwölfter Abschnitt. Geodäsie und Astronomie.

### Capitel 1. Geodäsie.

## Capitel 2. Astronomie.

## Anhang.

# Verzeichniss
## der Herren, welche für den achten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate).

| | | |
|---|---|---|
| Herr | Prof. August in Berlin. | A. |
| - | Dr. Aron in Charlottenburg. | An. |
| - | Prof. Baraniecki in Warschau. | Bcki. |
| - | Prof. Björling in Lund. | Bg. |
| - | Prof. Brill in München. | Bl. |
| - | Prof. Bruns in Berlin. | B. |
| - | Dr. Benno Klein in Berlin. | B. K. |
| - | Prof. Casey in Dublin. | Csy. |
| - | Prof. Cayley in Cambridge. | Cly. |
| - | Dickstein in Warschau. | Dn. |
| - | Prof. van Geer in Leiden. | G. |
| - | Prof. Glaisher in Cambridge. | Glr. |
| - | Gram in Kopenhagen. | Gm. |
| - | Prof. Günther in Ansbach. | Gr. |
| - | Prof. Gyldén in Stockholm. | Gn. |
| - | Dr. Hamburger in Berlin. | Hr. |
| - | Prof. Hoppe in Berlin. | H. |
| | Prof. Jung in Mailand. | Jg. |
| - | Prof. Felix Klein in München. | Kln. |
| - | Prof. Lie in Christiania. | L. |
| - | Prof. Lindelöf in Upsala. | Lf. |
| - | Prof. Lüroth in Carlsruhe. | Lth. |
| Herr | Prof. Mansion in Gent. | Mn. |
| - | Prof. Mayer in Leipzig. | Mr. |
| - | Dr. Maynz in Ludwigslust. | Mz. |
| - | Prof. Mittag-Leffler in Helsingfors. | M-L. |
| - | Dr. F. Müller in Berlin. | M. |
| - | Dr. Netto in Berlin. | No. |
| - | Prof. Neumann in Leipzig. | Nn. |
| - | Prof. Nöther in Erlangen. | Nr. |
| - | Dr. Ohrtmann in Berlin. | O. |
| - | Dr. Oberbeck in Halle a. S. | Ok. |
| - | Dr. von Posse in Petersburg. | P. |
| - | Dr. Schemmel in Berlin. | Schl. |
| - | Dr. Schlegel in Waren. | Schg. |
| - | Dr. Scholz in Berlin. | Schz. |
| - | Dr. Schubert in Hamburg. | Scht. |
| - | Dr. Schumann in Berlin. | Schn. |
| - | Prof. Stolz in Innsbruck. | St. |
| - | Prof. Sturm in Münster. | Sm. |
| - | Prof. Wangerin in Berlin. | Wn. |
| - | Prof. Ed. Weyr in Prag. | W. |

---

**Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:**
**Dr. C. Ohrtmann, Berlin SW., Markgrafenstr. 78. III.**

# Erster Abschnitt.

## Geschichte und Philosophie.

### Capitel 1.

### Geschichte.

L. Hugo. Brani di lettere a D. B. Boncompagni. Acc. P. N. L. XXIX. 41-43.

Auf dem britischen Museum in London befinden sich an ägyptischen Alterthümern: Ein elfenbeinernes Kubo-Oktaeder, Spielwürfel mit 6 + 8 Seiten mit römischen Ziffern numerirt; ein bronzenes Pentagonaldodekaeder; eine Reihe bronzener Zirkel; ein bronzenes Winkelmaass aussen mit der Neigung von 45°; ein gräco-ägyptisches Ikosaeder, die Seiten mit griechischen Buchstaben bezeichnet, aus grünlichem Marmor. Der Brief bespricht ferner das von Bode und Titius aufgestellte Gesetz der Entfernung der Planeten von der Sonne, exponentiell fortschreitend von der Erde an, welchem der Verfasser ein neues substituirt, mit dem auch der Neptun nahe genug stimmt. H.

---

H. G. Zeuthen. Fra Mathematikens Historie. I. Brahmegupta's Trapez. Zeuthen Tidsskr. (3) VI 168-174, 181-191.

In dieser Abhandlung macht der Verfasser die von Brahmegupta untersuchten Figuren, welche von Colebrooke „Tetragone" und „Trapeze" benannt worden sind, zum Gegenstande seiner

Betrachtungen. Nach einigen kurzen Notizen von allgemeiner Natur führt er nach Colebrooke die von Brahmegupta gegebenen Sätze über die erwähnten Figuren an, um daraus die wahre Bedeutung derselben zu erklären. Von den modernen Auffassungen schliesst er sich zunächst an die von Hankel aufgestellte Hypothese, nach welcher die „Tetragone“ als gleichschenklige Trapezien, die „Trapeze“ als eingeschriebene Vierecke mit auf einander senkrechten Diagonalen zu betrachten sind. Diese Behauptung wird besonders dadurch bestätigt, dass alle Brahmegupta'schen Sätze sich dann sehr leicht und natürlich aus den von ihm selbst angegebenen Konstructionen der Figuren herleiten lassen. Wie dies geschehen kann, wird von Herrn Zeuthen für die Trapeze nachgewiesen, indem er nur solche Sätze und Hülfsmittel benutzt, welche als den Indern bekannt vorausgesetzt werden können. Zu diesen rechnet er, ausser einigen Sätzen über rechtwinklige Dreiecke, auch den Satz über die Proportionalität der Seiten ähnlicher Dreiecke, welche die Inder als selbstverständlich betrachtet haben können, nicht aber eigentliche Winkelsätze, da er den modernen Winkelbegriff als den Indern fremdartig ansieht. Ferner wird noch eine einfache Umlegung als zulässiges Hülfsmittel angenommen. Schliesslich wird gezeigt, dass die Betrachtung der Trapeze einen sehr einfachen Beweis der Formel für $\sin(x+y)$ liefert, und der Verfasser spricht die Vermuthung aus, dass eben dieser Umstand der wesentlichste Grund gewesen sein könne, warum Brahmegupta eben diese Figur studirt habe; endlich wird noch ein, theilweise auf ähnlichen Betrachtungen wie den benutzten, gegründeter Beweis der Formel für den Flächeninhalt eines allgemeinen eingeschriebenen Viereckes mitgetheilt. Grn.

---

E. Lucas. Sur un théorème de l'arithmétique indienne.
Boncompagni Bull. IX. 157-164.

Der in der Identität

$$1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$$

liegende Lehrsatz kommt sowohl bei indischen Mathematikern

als auch bei den Arabern Ibn Albannâ und Alkarkhî vor. Nun hatte Herr Lucas schon 1870 in den „Nouv. Ann." einen Beweis für dieses Theorem angegeben, welchen er für neu hielt, und der darauf beruhte, die in eine sogenannte pythagoräische Tafel eingetragenen Zahlen auf zwei verschiedene Weisen zusammenzufassen. Addirt man nämlich jede Horizontalreihe für sich, so findet sich die Gesammtsumme gleich

$$(1+2+\cdots+n)\frac{n(n+1)}{2} = (1+2+\cdots+n)^2;$$

stellt man dagegen in jede einzelne Summe folgende Elemente ein

$$a_{p,1},\ a_{p,2}\ldots a_{p,p},\ a_{p+1,p},\ a_{p+2,p}\ldots a_{n,p},$$

so ergiebt sich als Gesammtergebniss $p^3$. Genau dieselbe Methode fand Lucas dann aber auch im „Fakhri" des Alkarkhî angewandt. Der Verfasser thut nun dar, dass man jene erweitern und auch zur Gewinnung einer Menge anderweiter Relationen zwischen den Potenzsummen der natürlichen Zahlen verwerthen könne. Die betreffenden Resultate wurden im „Bulletin de la société d'émulation du département de l'Allier" veröffentlicht.

Anhangsweise kommt der Verfasser auf die sehr dunkel gefasste Note zu sprechen, welche Fermat zu dem entsprechenden Passus Bachet's de Méziriac hinzugesetzt hat. Er sucht deren eigentlichen Sinn zu eruiren und gelangt auf diese Weise zu einigen interessanten Sätzen über Polygonalzahlen. Gr.

---

F. Hromádko. Proben aus der gemeinen indischen Arithmetik Lilâvâti genannt. Casopis V. (Böhmisch).

W.

---

A. Schmitt. Zu Pytheas von Massilia. Pr. Landau i. d. Pfalz.

Der Verfasser dieser Monographie führt in deren Eingang aus, wie gering die Errungenschaften im Gebiete der mathematischen und topischen Erdkunde waren, welche nicht nur zu Herodot's Zeit, sondern auch noch viel später das Griechenthum aus den Reiseberichten der Karthager (Hanno, Himilco) zu ziehen

wusste. Diess änderte sich fast zu gleicher Zeit im Osten und Westen durch den Eroberungszug Alexander's und die Expeditionen des Pytheas. Aber nicht alle Griechen erkannten den Fortschritt, den man jenem verdankt. Auf seine Seite traten allerdings ein Eratosthenes, ein Hipparch, der ihm die wichtigsten mathematisch-geographischen Data entnahm, ebenso Timaeus, Isidorus und Menippus, während Polybius und Strabo den Geographen Pytheas für einen Lügner erklärten und nur den Mathematiker gelten lassen wollten. Eine Mittelstellung nehmen Cleomedes und Plinius ein. Genau die nämliche Parteizerklüftung treffen wir bei neueren Autoren an. Gosselin und der stets hyperkritische Lewis schwören auf Strabo's Autorität, Murray hält sich neutral, Lubbock und Nilsson treten als Ehrenretter des verkannten Gelehrten auf. Schmitt's eigene Untersuchungen stützen sich auf die Vorarbeiten von Fuhr, Bessels und Lelewel. Genaue Untersuchung der Quellen lässt ihn zu dem Schluss gelangen, des Polybius Angaben über Pytheas Lebensverhältnisse und speciell die Notiz, derselbe sei nichts als ein unbemittelter Privatmann gewesen, beruhten zum mindesten auf keiner sehr sicheren Grundlage. Eine weitere Studie zu der Frage, ob sich der genaue Zeitpunkt der berühmten Reisen zum Polarkreis fixiren lasse, führt zu einem negativen Resultate. Die Streitfrage, ob man es mit zwei Fahrten oder nur mit einer einzigen zu thun habe, wird im ersteren Sinne entschieden. Zum Schluss endlich beschäftigt sich der Verfasser mit den Titeln der beiden literarischen Leistungen, die Pytheas hinterlassen haben soll, er ist geneigt, den *περίοδος γῆς* als eine Art von Landkarte, hingegen *τὰ περὶ τοῦ ὠκεανοῦ* als das Gesammt-Repertorium der auf den Reisen erworbenen astronomischen, physikalischen und topographischen Novitäten zu deuten. — Eine spätere Fortsetzung des Programms wird in Aussicht gestellt.

Gr.

---

M. Tannery. Note sur le système astronomique d'Eudoxe.

Mém. d. Bord. (2) I. 441-451

Herr Tannery stellt sich die Aufgabe, die geistvollen Divina-

tionen, durch welche Schiaparelli die Theorie der homocentrischen Sphären eines Eudoxus und Kalippus neu belebt hatte, in die Sprache der modernen Mathematik zu übersetzen. Grundlage des ganzen Systems ist, dass jeder Planet auf dem Aequator einer der Erde concentrischen Kugel befestigt ist, die sich um eine durch den Planeten bestimmte Axe dreht. Die Pole dieser letzteren gehören selber wieder einer neuen Kugel an, und in dieser Weise setzt sich die Vervielfältigung fort. Auf diese Weise wird der Planet eine Curve beschreiben, deren eigentliche Natur eben bestimmt werden soll. Bezeichnet zu irgend einer Zeit $\lambda$ die Breite des Planeten, $\delta$ dessen Länge, so gelten, wenn $i$ und $m$ gewisse constante Bögen sind, die Gleichungen

$$\sin\delta\cos\lambda = \sin i \sin m;\ \sin\lambda = -\sin^2\frac{i}{2}\sin 2m.$$

Die durch die Coëxistenz dieser Gleichungen bestimmte Curve ist eben jene „Hippopeda" des Eudoxus, eine sphärische Lemniskate, deren grosse Axe mit der Ekliptik zusammenfällt. Es wird dann für kleine $\delta$, $\lambda$ und $i$ durch Reihenentwickelung nach den Sinus der Multipla von $m$ die Uebereinstimmung der „planetarischen Eigenbewegungen" mit den Beobachtungen als thatsächlich bestehend nachgewiesen, während die „heliocentrischen Bewegungen" sich dadurch nicht völlig genügend erklären lassen. Calipp fügte zur Beseitigung dieses Uebelstandes noch weitere Sphären bei und erhielt so eine ungleich complicirtere Curve, welche unter gewissen Voraussetzungen in die vorher erwähnte Hippopeda oder auch in die aus dem Florentiner Problem bekannte Schleifenlinie des Viviani übergeht. Diese Linie schliesst sich für die meisten Planeten sehr gut den Thatsachen an; lediglich die stark elliptische Bahn des Mars will sich ihr nicht recht fügen.

Gr.

---

F. Hultsch. Pappi Alexandrini collectiones quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch. Vol. I. Berlin.

Einer der berufensten Fachmänner auf diesem Gebiete bietet uns die erste vollständige und nach allen Regeln der modernen Kritik gearbeitete Ausgabe des Textes der *μαθηματικαὶ συναγωγαί* zusammen mit erklärenden Noten und wortgetreuer lateinischer Uebersetzung. In der Vorrede zu diesem ersten Bande, welcher die auf uns gekommenen Bestandtheile des 2., 3., 4. und 5. Buches in sich begreift, erörtert der Verfasser einstweilen nur die philologische Seite seiner Edition, indem er sich die Berichterstattung über seine Forschungen zur Persönlichkeit und Lebenszeit des Pappus für den dritten Band seines Unternehmens vorbehält. Die Nachweisungen einiger Alterthumsforscher, Mommsen, Wachsmuth, Kiessling, machten es Herrn Hultsch wahrscheinlich, dass der griechische Codex Vaticanus N. 218 als die vorzüglichste Pappus-Handschrift anzusehen sei; er reiste desshalb 1866 nach Rom und verglich seine von andern Handschriften genommenen Copieen mit jenem Originale. Verschiedene jüngere Gelehrte liehen ihm bei dieser Arbeit ihre Unterstützung. Die Collationirung stellte das unzweifelhafte Ergebniss fest, dass sämmtliches handschriftliche Material direkt auf jene römische Quelle zurückgeführt werden müsse. Der Werth letzterer steigert sich sonach ungeheuer, und von den übrigen Manuskripten verdient eigentlich nur noch ein Leydener grössere Beachtung, insofern es einige von der Hand des grossen Scaliger herrührende Emendationen aufweist. An die sehr eingehende Beschreibung der Codices reiht sich eine Aufzählung aller literarischen Leistungen, welche auf das Werk des Pappus Bezug nehmen; die aufgeführten Autoren-Namen sind: Breton de Champ, Simson-Camerer, Chasles, Commandinus, Eisenmann (letztere Schrift wird von Chasles gelobt, von Hultsch aber als wenig preiswürdig bezeichnet), Gerhardt, Halley, Haumann, Horsley, Torelli, Vincent, Wallis. Den Schluss der Vorrede bildet eine Erklärung der eigenthümlichen technischen Ausdrücke, deren sich die Griechen beim Proportionen-Rechnen bedienten.

Mit Rücksicht auf die Version und die Randnoten sei nur bemerkt, dass beide ihren Zweck, die Lektüre auch dem minder Geübten zu erleichtern, trefflich erfüllen. Wer sich für den Inhalt

der „Sammlungen“ interessirt, findet genaue Angaben in der Recension Cantor's (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 21. Jahrg. Hist.-Lit. Abth. S. 75 ff.), sowie in Chasles' Geschichte der Geometrie (Deutsche Ausgabe S. 26 ff.); auch die ältere Inhalts-Uebersicht im zweiten Bande von Kästner's „Geschichte der Mathematik“ enthält vieles Brauchbare. Gr.

---

C. J. GERHARDT. Die Sammlung des Pappus von Alexandrien. Eisleben. 1874.

M. CANTOR. Recension dazu. Schlömilch Z. XXI. Hl. A. 37-42.

Neben einem einleitenden Abschnitt besteht die Arbeit aus dem griechischen Text und der deutschen Uebersetzung eines Abschnittes aus dem vierten Buche, nämlich des Abschnittes über die Quadratrix. Gegen den einleitenden Theil wendet sich die Recension des Herrn Cantor. Herr Gerhardt hat behauptet, dass nur das dritte und vierte Buch, welche als Eins zu betrachten seien, sowie das siebente und achte Buch wirklich von Pappus herrühre. Herr Cantor widerlegt die Gründe, die hierfür angegeben werden. O.

---

G. V. SCHIAPARELLI. Die Vorläufer des Copernicus im Alterthum. Historische Untersuchungen. In's Deutsche übertragen von M. Curtze. Leipzig. Quandt u. Haendel.

Wir haben es hier mit einer Uebertragung der trefflichen Schrift zu thun, über welche bereits im Jahrgang 1873 dieser Zeitschrift (p. 2) berichtet worden ist. Erwähnt mag werden, dass der Bearbeiter Manches hinzugefügt, und insbesondere im Schlusscapitel auch die arabischen Vorcopernicaner kurz herbeigezogen hat. Im Uebrigen verweist Referent auf seine ausführliche Recension im 11. Jahrg. d. „Vierteljahrsschr. d. astronom. Gesellschaft.“ Gr.

M. Cantor. Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. Eine geschichtlich-mathematische Untersuchung. Leipzig. Teubner.

Die vorliegende Schrift scheint sich dem Sinne der Titelworte zufolge auf ein engeres Gebiet zu beschränken, als sie dies in Wirklichkeit thut. Nicht blos die römischen Feldmesser selbst und deren dürftige mathematische Leistungen behandelt sie, sondern auch auf's Eingehendste die Quellen, aus welchen dieselben ihr Wissen schöpften, die Anregungen, welche von ihnen die Folgezeit empfing. Sonach zerfällt die Untersuchung in drei gesonderte Kapitel.

Abschnitt I. Heron von Alexandrien. Gestützt auf die umfassenden Forschungen eines Venturi, Letronne, Vincent, Hultsch, Rose und Friedlein giebt uns der Verfasser ein deutliches Bild von dem momentanen Stande der sogenannten heronischen Frage. Drei Mathematiker des Namens Heron treten bei den verschiedenen Schriftstellern des Alterthums auf, doch ist Herr Cantor geneigt, diese Persönlichkeiten zu vereinen und sämmtlich auf den Einen Alexandriner Heron zurückzuführen, der um 100 v. Chr. lebte und als Mechaniker wie als Geodät Bedeutendes leistete. Von seinen der theoretischen Mechanik gewidmeten Arbeiten ist allerdings nicht Viel auf uns gekommen, dagegen sind die mehr technologischen Schriften bereits 1693 von Thevenot gesammelt und edirt worden. Mathematisch interessant ist in der artilleristischen Monographie „Ueber Anfertigung von Geschützen“ die Lösung des Problems, zwei mittlere Proportionallinien zu finden. Die „Lehre von der Anfertigung von Automaten“ beschreibt viele unserer modernen Instrumente, so die Pipette, den Schröpfkopf, den Heber, die Druckpumpe, die Feuerspritze, die sich selbst regulirende Lampe, das Dampf-Reaktionsrad — nicht aber, wie man wohl erwarten möchte, den fälschlich so genannten Heronsball. Die bis vor Kurzem irrthümlicherweise dem Ptolemaeus zugeschriebene „Katoptrik“ beschreibt einen Heliostaten und einen Spiegelapparat für theatralische Gespenstererscheinungen, die „Dioptrik“ dagegen bezeichnet nicht etwa das, was wir heute

so zu nennen gewohnt sind, sondern vielmehr die Kunst, mit der Dioptra zu operiren. Dieses geodätische Universalinstrument ist die primitive Form des Theodolithen. Mit seiner Hülfe werden die wichtigsten Aufgaben der Feldmess- und Nivellirkunst in oft sehr eleganter Weise gelöst; Aufgabe 23 macht bereits vom Coordinatenbegriff Gebrauch. Hier findet sich auch die berühmte heronische Formel für den Dreiecksinhalt

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}.$$

Ob Heron abgesehen von dieser Dioptrik noch sonst über geometrische Materien geschrieben, steht nicht fest, indess wird hier sehr wahrscheinlich gemacht, dass jene Abhandlung nur der Bestandtheil eines umfassenden geometrischen Werkes gewesen sei, welches Heron in höherem Auftrage abgefasst habe. Ein solches Lehrbuch sollte dem Berufs-Feldmesser als Mittel dienen, sich wissenschaftlich auszubilden und die empirischen Regeln früherer Zeit durch Besseres zu ersetzen. Zur Charakterisirung jener handwerksmässigen Messpraktik wird ein Ueberblick über die altägyptische Geometrie gegeben, deren Nachklänge, wie später gezeigt wird, noch bis in die neueste Zeit hinaufreichen. Weiterhin durchmustert Cantor alle auf uns gekommenen heronischen Fragmente und thut dar, dass dieselben recht wohl in jenes hypothetische grössere Werk hineinpassen. Wir haben hierunter aphoristische Vorschriften über die Berechnung von Drei- und Vierecken, einen sehr respektablen Exkurs über Kreisrechnung und ebenso gewisse stereometrische Rechnungsregeln zu verstehen. Eingehend ist von Heron's Manier die Rede, Brüche auf sogenannte Stammbrüche des Zählers 1 zu reduciren, sowie von seinem Verhalten bei der Ausziehung von Quadratwurzeln. Auch gewisse diophantische und vor Allem bestimmte quadratische Gleichungen versteht er zu behandeln, nur begegnet ihm bei einer geometrischen Aufgabe zweiten Grades das Unglück, die Determination ausser Acht zu lassen und so auf imaginäre Werthe zu gerathen. Hier hilft ihm der mehr kühne als glückliche Gedankensprung, $\sqrt{-1} = 1$ zu setzen.

**Abschnitt II.** Römische Feldmessung. Die Gromatik der

Republik lässt einen doppelten Ursprung nicht verkennen. Zweifellos ist die Eintheilung der Ebene durch zwei die Cardinalpunkte des Horizontes verbindende Axen, Cardo und Decumanus, eine tuskische Erfindung, welche von den römischen Auguren wieder aufgegriffen wurde. Die zur Auffindung der Mittagslinie dienenden Methoden, deren eine vom rein mathematischen Standpunkt aus das höchste Interesse erregen muss, werden hier analysirt. Das älteste geodätische Instrument der Römer, die Stella oder Groma, deutet nach Otfried Müller's von Cantor theilweise rektificirter, theilweise auch adoptirter Ansicht ebenfalls auf die Heimath Etrurien hin. Allein in relativ früherer Zeit machten sich bereits griechisch-alexandrinische Einflüsse in Rom geltend, und Julius Cäsar's Verdienst ist es, für diese Einwirkungen einen fruchtbaren Boden geschaffen zu haben. In zwei politisch-administrativen Hauptaufgaben seines thatenreichen Lebens stand Cäsar völlig unter dem Einfluss der hellenistischen Aegypter, nämlich in seiner Einführung der Kalenderreform, die, wie Carl Riel erst neuerlich nachwies, total den analogen Institutionen der Pharaonenzeit nachgebildet ist, und in seiner Anordnung einer durchgreifenden Landesvermessung. So wurden denn Heron's Elemente das Grund- und Hauptbuch der römischen Agrimensoren. Die Reihe dieser Männer, die man füglich besser als Zunftgenossen denn als Gelehrte kennzeichnet, beginnt der Baumeister Vitruvius, bei dem sich der von Dürer wieder reproducirte Werth $\pi = 3\frac{1}{8}$ findet; ihm folgt der als agronomischer Schriftsteller wohlbekannte Columella, der sich in seiner Anleitung zur Berechnung von Grundstücken offenkundig von Heron abhängig zeigt, und hierauf Julius Frontinus, Direktor der römischen Wasserleitungen. Auf heronischem Boden steht ferner Hyginus (nicht der Verfasser des astronomischen Lehrgedichtes) und Ballus, dessen Verfahren, militärische Vermessungen auszuführen, durchaus der *διοπτρικά* entnommen scheint. Nicht minder gilt dies von Nipsus und Sextus Julius Africanus, deren Darstellungsweise jedoch von der heronischen Eleganz bereits abweicht, indem statt ähnlicher Dreiecke congruente verwendet werden. Vor Allem Anderen aber müssen uns die Nachrichten interessiren, welche der Wolfenbütteler Codex

Arcerianus über zwei sonst apokryphe Männer enthält, über Apophroditus und Bertrubus, oder, wie wahrscheinlich zu lesen sein wird, Epaphroditus und Vitruvius. Bei Ersterem finden wir zwei neue musterhaft einfache Formeln zur Bildung der Summen von Polygonal- und Pyramidalzahlen, Formeln, welche deutlich für griechische, wo nicht indische Herkunft Zeugniss ablegen. Den Schluss der specifisch römischen Periode bilden Boethius und der von Chasles an's Licht gezogene Anonymus von Chartres, die beide freilich weit mehr die unvollkommenen als die guten und wissenschaftlich empfehlenswerthen Parthien aus Heron's Text herübergenommen haben.

Abschnitt III. Die Schüler der Römer. Unter diesen Spätlingen ragt besonders der Brite Alcuin hervor, dessen „propositiones ad acuendos juvenes“ sich vielfach heronisch inspirirt erweisen. So treten uns die falschen ägyptischen Dreiecks- und Vierecksregeln entgegen, und eine Theilungsaufgabe lässt sich ihrem Sinne nach nur durch die Bekanntschaft ihres Erfinders mit altrömischen Rechtsverhältnissen erklären. Auf Alcuin folgt naturgemäss Gerbert, in dessen Werken ältere Autoren wie Macrobius direkt citirt werden. Ausser der schon länger bekannten Geometrie des gelehrten Pabstes wird ihm aber wohl noch ein zweites geometrisches Werkchen zuzutheilen sein, welches Cantor in einem Salzburger Codex gefunden hat. Unmittelbare Textvergleichung zeigt die Abhängigkeit des Autors von Sextus Africanus, Nipsus, Heron, besonders jedoch von Epaphroditus. Als letzte Ausläufer der heronisch-lateinischen Geometrie aber ergeben sich uns die practica geometriae des grossen Mathematikers Leonardo Fibonacci, die erst 1489 gedruckte praktische Arithmetik Widmann's und des polyhistorischen Mönches Gregorius Reysch „Margaritha Philosophica“.

Die stetige Continuität wissenschaftlicher Fortpflanzung von den ältesten historischen wo nicht prähistorischen Anfängen bis zum Beginn der Renaissance-Epoche ist durch Cantor's Monographie ausser Zweifel gesetzt. Dem Texte reihen sich 45 Seiten mit umfänglichen literarischen Nachweisen, sowie ein gutes Namen- und Sachregister an.

Genauere Recensionen rühren her von M. Curtze (Jenaer Literaturzeitung), Schiaparelli (Memoiren des lombardischen Institutes) und vom Referenten (Beilage zur Allgemeinen Zeitung). Ausserdem ist besonders A. Favaro's Besprechung aus Boncompagni's „Bullettino“ (Tomo IX, p. 165—182) hervorzuheben, weil dieselbe in Bezug auf die Person Heron's eine derjenigen Cantor's entgegengesetzte Ansicht vertritt und auch über die pythagoräisch-platonischen Methoden zur Construction rationaler rechtwinkliger Dreiecke einen längeren Zusatz enthält. Gr.

---

F. J. Studnicka. Die Bruchrechnung bei den Römern. Casopis IV. (Böhmisch) 1875.

Nach Hankel zusammengestellt. W.

---

E. Wiedemann. Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften bei den Arabern. Pogg. Ann. CLIX. 656-658.

Von verschiedenen Autoren, zuletzt von Tyndall, war die von Risner im 16ten Jahrhundert übersetzte Schrift: „Al Hazen filii Alhayzeni Arabis optica“ demselben Verfasser zugeschrieben, wie das Buch Al Khazini's von der Wage der Weisheit. Aus einer Leidener Handschrift, die Herr Wiedemann aufgefunden, geht aber hervor, dass die Verfasser der beiden Schriften nicht identisch sind. Der Verfasser der Optik heisst Hasan Jbn al Haitam.

In einer kurzen Notiz wird dann noch erläutert, dass bei Al Khazini von einer Aenderung des Gewichts bei der Bewegung nicht die Rede ist. Wn.

---

F. J. Studnicka. Ueber die Art, wie die Araber die cubischen Gleichungen von der Form

$$x^3 - Px + Q = 0$$

lösten. Casopis IV. (Böhmisch.) 1875.

Nach Hankel. W.

---

V. A. LE BESGUE. Notes sur les opuscules de Léonard de Pise. Boncompagni Bull. IX. 583-594.

Anmerkungen zu den von Boncompagni herausgegebenen Schriften des Leonardo aus Pisa. Der Verfasser bespricht darin 16 verschiedene Probleme jenes Autors, die meist der Zahlentheorie angehören. Wn.

---

A. FAVARO. Intorno ad uno scritto su Andalò di Negro, pubblicato da D. B. Boncompagni. Padova. Rondi.

Die Arbeit ist ein Referat an die Akademie von Padua über jene, in Boncompagni's Bull. VII. befindlichen Abhandlungen, über welche F. d. M. VI. p. 26 berichtet worden ist. O.

---

M. STEINSCHNEIDER. Prophatii Judaei Montepessulani Massiliensis (a. 1300) prooemium in almanach adhuc ineditum e versionibus duabus antiquis (altera quoque interpolata) una cum textu hebraico e manuscriptis primum edidit, suamque versionem latinam verbalem adjecit. Boncompagni Bull. IX. 595-613.

Prophatius oder, wie er eigentlich hiess, Jacob ben Machir, scheint zwischen 1307 und 1309 gestorben zu sein. Soweit seine schriftstellerische Thätigkeit sich auf mathematischem Gebiete bewegte, übersetzte er aus dem Arabischen verschiedene astronomische Schriften, sowie die Sphärik des Menelaus und die Elemente des Euclides; seiner eigenen Feder entstammt die Beschreibung eines von ihm selbst erfundenen Quadranten und ein unter dem Namen „ewiger Almanach" bekanntes astronomisches Tabellenwerk. Die Codices, welche für letzteres existiren, werden hier auf's Genaueste registrirt und auf ihre Probehaltigkeit geprüft. Alsdann wird die Einleitung dazu in vierfacher Form wiedergegeben, in Steinschneider's eigener und in einer älteren lateinischen Uebersetzung, in einer sogenannten „paraphrasis" und endlich im hebräischen Originaltext. Sachlich ist in dieser

Vorrede der Umstand bemerkenswerth, dass Prophatius den Ptolemäus verwirft und den Araber Arzachel als seine Quelle bezeichnet. Gr.

---

COPERNICO in Italia. Traduzione dal Tedesco del A. Sparagna. Boncompagni Bull. IX. 315-319.

F. HIPLER. Copernico in Bologna. Traduzione dal Tedesco del A. Sparagna. Boncompagni Bull. IX. 320-325.

Uebersetzungen von Artikeln aus der Posener, Thorner und Ermländischen Zeitung, welche sich mit dem Aufenthalt des Copernicus in Italien beschäftigen, auf Grund der von C. Moligola in den Archiven der Familie Malvezzi de' Medici gefundenen Acten der deutschen Nation der Universität Bologna, vom Jahre 1200—1650. O.

---

M. CANTOR. Sulla nazionalità del Copernico. Traduzione dal Tedesco del A. Sparagna. Boncompagni Bull. IX. 701-716.

Uebersetzung des in der Beilage zur Allgemeinen Augsburger Zeitung vom 1. August 1876 erschienenen Aufsatzes von Cantor. Derselbe stellt die Gründe zusammen, die dafür sprechen, dass Copernicus ein Deutscher gewesen sei. O.

---

F. HIPLER. Die Chorographie des Joachim Rheticus. Aus dem Autographon des Verfassers und mit einer Einleitung versehen. Schlömilch Z. XXI. Hl. A. 125-150.

Die Einleitung enthält Notizen über das Leben des Rheticus. Namentlich wird sein Verkehr mit Herzog Albrecht von Preussen besprochen, und der zwischen Beiden gepflogene Briefwechsel abgedruckt. O.

---

B. BONCOMPAGNI. Intorno ad un trattato d'aritmetica di Giovanni Widmann di Eger. Boncompagni Bull. IX. 188-210.

Eine tief eingehende bibliographische Untersuchung über das arithmetische Hauptwerk Widmann's „Behende und hübsche Rechnung auf allen Kauffmannschafften", von welchem vier Ausgaben bekannt sind (Leipzig 1489, Pforzheim 1508, Hagenau 1519, Augsburg 1526). Daran schliesst sich eine die beachtenswerthen Punkte hervorhebende Inhalts-Analyse (Summation arithmetischer und geometrischer Reihen, heronische Dreiecksformel, Halbmesser des einem Dreieck umschriebenen Kreises etc.) und eine Darlegung des Wenigen, was man von Widmann's Lebensumständen weiss. Gr.

---

F. NAPOLI. Intorno alla vita ed ai lavori di Francesco Maurolico. Boncompagni Bull. IX. 1-22.

Scritti inediti di F. Maurolico. Boncompagni Bull. IX. 23-1121.

Francesco Maurolico ist am 16ten September 1494 zu Messina geboren und am 21ten Juli 1575 gestorben. Er war Geistlicher und wurde Abt des Klosters S. Maria del partu bei Castro nuovo und Professor der Mathematik in Messina. Die vorliegende Arbeit giebt einen Ueberblick über die Schriften und Arbeiten des italienischen Mathematikers. Neben seiner Kosmographie und Geschichte Siciliens hat er sich namentlich Verdienste erworben durch die Wiederherstellung, Reinigung und Erläuterung der Schriften antiker Mathematiker, wie der des Archimedes, des Euklides und anderer. Auch eigene Arbeiten astronomischen, wie rein mathematischen Inhalts über Kegelschnitte, Bestimmung von Schwerpunkten etc. sind ihm zu verdanken. Im Anschluss an die Arbeit von Napoli werden vier bisher noch nicht herausgegebene Schriften des Maurolico veröffentlicht, nämlich: 1) Ein Brief an Juan Vega, Vicekönig von Sicilien, 2) Demonstratio algebrae, 3) Maurolyci Siculi geometricarum quaestionum libri duo, 4) Brevis demonstratio centri in parabola. O.

---

F. R. Friis. Tychonis Brahei et ad eum doctorum virorum epistolae nunc primum collectae et editae Fasc. I. Havniae apud G. E. C. Gad.

Die Besprechung dieses ersten Heftes des erst jetzt von Friis veröffentlichten Briefwechsels zwischen Tycho und mehreren seiner Zeitgenossen wird zweckmässiger Weise bis zum Erscheinen der übrigen Hefte verschoben. Es soll deshalb hier nur erwähnt werden, dass diese Sammlung die in den Bibliotheken zu Kopenhagen, Wien, Pulkowa und Basel vorhandenen und hierhergehörigen Briefe umfasst, während der bereits von Tycho selbst (Uraniborg 1596) herausgegebene Briefwechsel zwischen ihm, dem Landgrafen Wilhelm IV. von Hessen und dessen Hofastronomen Rothmann ausgeschlossen bleibt. B.

---

D. Berti. Copernico e le vicende del sistema copernicano in Italia nella seconda metá del secolo XVI. e nella prima del XVII. con documenti inediti intorno a Giordano Bruno e Galileo Galilei. Roma. Paravia.

Das Referat selbst wird im nächsten Bande im Zusammenhang mit anderen dahingehörigen Schriften nachgeholt werden. Vorläufig möge auf die eingehende Recension von A. Favaro in Schlömilch Z. XXI. Hl. A. 85-96 verwiesen werden. O.

K. von Gebler. Galileo Galilei und die Römische Curie. Stuttgart. Cotta.

Das Referat selbst wird im nächsten Bande nachgeholt werden. Vorläufig möge auf die Recension von Cantor in Schlömilch Z. XXI. Hl. A. 96-99 verwiesen werden. O.

---

E. Heis. E pur si muove. Ann. Soc. scient. Brux. I. B. 201-206.

Der Verfasser zeigt durch zahlreiche Citate, dass keine der Biographien vor 1789 diese apocryphen Worte enthielt. Sie werden zum ersten Male in zweifelnder Form angeführt in dem: „Dictionnaire

historique ou histoire abrégée, par une société, 7$^{me}$ édition, Caen, Leroy, IV. 1789. Sie sind dann von Feller, Biot, Hoefer und vielen anderen reproducirt worden. Die neueren Forscher, Crouessart, Bertrand (und Th. H. Martin) sind sämmtlich der Meinung, dass Galilei diese Worte niemals gesprochen habe. (Uebrigens sind diese apocryphen, Galilei zugeschriebenen Worte viel älter, als Herr Heis meint. Sie finden sich schon Bd. III. p. 49 Zeile 1-5 des Werkes: Querelles littéraires ou Mémoire pour servir à l'Histoire des Révolutions de la République des lettres depuis Homère jusqu'à nos jours. Paris, 1761, 4 vol. in 12., dessen Verfasser Augustin Simon Irailh ist).

Mn. (O.)

---

F. J. Studnička. Ueber Marcus Marci und seine Schrift „De proportione motus" überhaupt und die Gesetze des elastischen Stosses insbesondere. Prag. Ber. 1875. 1-8.

Durch eine in Jullien's „Probleme" übergegangene kurze Notiz Montucla's aufmerksam gemacht, analysirt der Verfasser das von dem böhmischen Gelehrten Johann Marcus Marci (Marek) im Jahre 1639 veröffentlichte medicinisch-physikalische Werk „De proportione motus seu regula sphygmica". Dasselbe enthält eine Reihe durchaus richtiger und in Folge dessen sehr beachtenswerther Bemerkungen über den Stoss elastischer Körper. Es wird sogar bis zur Lösung der Billard-Aufgabe vorgeschritten, an einem gegebenen Ball den Punkt anzugeben, an welchen ein zweiter angespielt werden muss, um einen dritten zu treffen. Am Schluss jenes Buches wird noch ein monochordähnliches Instrument zur Messung der Pulsfrequenz und dessen Erweiterung zu einer wirklichen Pendeluhr beschrieben, und zwar finden wir hier bereits den Satz vor, dass sich die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen verhalten. Unter allen Umständen verdient Marek's Name neben denen eines Wallis, Wren und Huyghens genannt zu werden. Gr.

S. Günther. Note sur Jean-André de Segner fondateur de la météorologie mathématique. Boncompagni Bull. IX. 217-229.

Der Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist, zu zeigen, dass Segner (geb. am 9. October 1704 zu Presburg, gest. am 5. October 1777 als Professor der Mathematik zu Göttingen) zuerst die Frage der atmosphärischen Ebbe und Fluth behandelt hat. Es ergiebt sich dies aus einer Dissertation Segner's vom Jahre 1733: „De mutationibus aeris a luna pendentibus“ (Jena), die Herr Günther hier wieder abgedruckt und commentirt hat. Diese Priorität Segner's war ganz in Vergessenheit gerathen, so dass z. B. in Gehler's Wörterbuch Segner's Name bei dem obigen Problem nicht genannt wird.

In der Einleitung führt Herr Günther noch andere Verdienste Segner's an, von denen hier als weniger bekannt die Entdeckung des Satzes hervorgehoben werden möge, dass jeder Körper drei freie Rotationsaxen hat. Wn.

P. van Geer. Johannes Bernoulli en zyn strijd over het beginsel der levendige krachten. Nieuw Arch. II. 193-206.

Vor einigen Jahren wurde durch das Collegium Bernoullianum zu Basel bei Gelegenheit eines Festes ein Brief von Johannes Bernoulli an de Mairan herausgegeben, worüber u. a. auch berichtet wurde in den F. d. M. VI. p. 27. In dieser Arbeit nun wird im Anschluss an eine frühere des Verfassers die vollständige historische Erläuterung dieses merkwürdigen Briefes mitgetheilt. G.

---

G. Berthold. Daniel Bernoulli's Gastheorie, eine historische Notiz. Pogg. Ann. CLIX. 659-661.

Durch Abdruck einer Stelle aus der von Daniel und Johann II Bernoulli im Jahre 1746 gemeinsam verfassten Schrift: „De la nature et des propriétés de l'aiman“ (enthalten in dem Recueil des pièces qui ont remporté des prix de l'académie royale des

sciences t. V. Paris 1752) zeigt der Verfasser, welcher Unterschied zwischen den Anschauungen der modernen Gastheorie und denen Bernoulli's besteht. Wn.

---

J. W. L. Glaisher. Biographie de Jean Wilson.
N. C. M. II. 110-114.

Notiz von de Morgan (a budget of paradoxes p. 132-133), vervollständigt durch einige der Bibliothek von Cambridge entnommene Notizen. Wilson, geb. 1741, gest. 1793, ein geschickter Algebraiker, verliess die Wissenschaft, um sich der Advokatur zu widmen. Er hat in seinem Vaterlande einen grossen Ruf als Beamter und Rechtskundiger genossen. Mn (O).

---

G. B. Biadego. Intorno alla vita ed agli scritti di Gianfrancesco Malfatti, matematico del secolo XVIII. Boncompagni Bull. IX. 361-381.

Catalogo dei lavori di Gianfrancesco Malfatti. Boncompagni Bull. IX. 382-387.

Catalogo di lavori relativi al problema di Malfatti. Boncompagni Bull. IX. 388-397.

Lettere inedite di G. F. Malfatti. Boncompagni Bull. IX. 393-480

Giovanni Francesco Guiseppe Malfatti ist zu Ala am 26. September 1731 geboren, studirte Mathematik in Bologna, namentlich bei Vincenzo Riccati, wurde 1771 Professor der Mathematik an der neu gegründeten Universität zu Ferrara, wo er am 9. October 1807 starb. Die Arbeit bespricht zunächst Malfatti's Leben und wendet sich dann zu den hauptsächlichsten Arbeiten desselben, besonders zu der Arbeit über das nach ihm benannte Problem. Daran schliesst sich ein Verzeichniss seiner Arbeiten, deren vier und zwanzig publicirte und zwei unedirte angeführt werden. Dann folgt ein Verzeichniss der Literatur über das Malfatti'sche Problem, zwei und dreissig Arbeiten zählend. Im letzten Abschnitt werden bisher noch nicht publicirte Briefe veröffentlicht, nämlich acht und sechzig an Anton Lorgna, neun an Girolamo Tiraboschi,

zwei an Bartolomeo de Calvagni und je einer an den Grafen Alfonso Bonfioli, Leonardo Salimbeni, Antonio Cagnoli. O.

---

J. HERSCHEL. Memoir and correspondance of Caroline Herschel. London J. Murray.

Referat im Quart. J. of Sc. VI.

---

W. v. ZAHN. Commemorazione di Ermanno Hankel. Traduzione dal Tedesco del A. Sparagna. Boncompagni Bull. IX. 290-296.

Catalogo dei lavori del Ermanno Hankel. Boncompagni Bull. IX. 297-308.

Ersteres ist die Uebersetzung des Nachrufs aus Clebsch Ann. VII., s. F. d. M. VI. p. 31. O.

---

C. E. SÉDILLOT. Lettre à D. B. Boncompagni sur la vie et les travaux de M. Louis Amélie Sédillot. Boncompagni Bull. IX. 649-655.

Catalogo dei lavori di Luigi Amelio Sédillot. Boncompagni Bull. IX. 656-700

Louis Pierre Eugéne Amélie Sédillot ist zu Paris am 23. Juni 1808 geboren, ein Sohn des Orientalisten und Astronomen J. J. Sédillot, war Professor der Geschichte an der Pariser Akademie, starb am 2. December 1875. Bekannt gemacht hat er sich namentlich durch seine Untersuchungen über orientalische Astronomie und Mathematik. O.

---

F. KLEIN. Notice sur la vie et les travaux de Louis Othon Hesse. Traduite de l'allemand par P. Mansion. Boncompagni Bull. IX. 309-314.

Uebersetzung der im „Bericht über die kgl. polytechnische Schule zu München für das Studienjahr 1874/1875" erschienene

Arbeit. Sie enthält neben einer kurzen Notiz über den äusseren Lebensgang Hesse's eine Uebersicht über die wichtigsten Untersuchungen, wobei namentlich diejenigen hervorgehoben werden, welche die Wissenschaft um neue Methoden bereichert haben.

O.

---

P. Zech. C. G. Reuschle. Ein Nekrolog. Schlömilch Z. XXI. Hl. A. 1-4.

Ein Nachruf für den am 22. Mai 1875 gestorbenen Mathematiker.

Ursprünglich Theologe, hatte sich C. G. Reuschle erst nach Absolvirung seiner theologischen Examina dem Studium der Mathematik zugewandt. Er lebte vom Jahre 1840 an als Professor der Mathematik, Geographie und Physik am Gymnasium zu Stuttgart. In dem vorliegenden Aufsatze wird die umfassende, auch andere Gebiete als die Mathematik beherrschende Bildung und Gelehrsamkeit des Verstorbenen geschildert. In der Mathematik hat er sich durch verschiedene Aufsätze in Crelle's, Schlömilch's und Grunert's Journal, sowie durch Lehrbücher bekannt gemacht. Sein Hauptwerk ist die, kurz vor seinem Tode erschienene „Tafel complexer Primzahlen, welche aus Wurzeln der Einheit gebildet sind.“ O.

---

O. Abria et J. Hoüel. Notice sur la vie et les travaux de Victor-Amédée Le Besgue. Boncompagni Bull. IX. 554-582.

Victor-Amédée Le Besgue ist geboren am 2. October 1791 zu Grandvilliers (Oise). Er war zuerst an verschiedenen Lyceen Lehrer, später Professor an der Facultät von Bordeaux. Er starb am 10. Juni 1875 zu Pau. Seine Arbeiten, deren ausführliche Liste dem vorliegenden Aufsatze beigegeben ist, waren vorzugsweise zahlentheoretischen Inhalts. Von seinen hauptsächlichsten Arbeiten hat Le Besgue selbst ein kurzes Résumé gegeben, das den Schluss der obigen Note bildet. Wn.

---

M. Cantor. Goffredo Friedlein. Boncompagni Bull. IX. 531-536.

B. Boncompagni. Catalogo dei lavori del Dr. Goffredo Friedlein.

Der erste der beiden vorstehenden Aufsätze ist eine Uebersetzung einer Arbeit aus Schlömilch's Zeitschrift (siehe F. d. M. VII. p. 13), der zweite enthält ein Verzeichniss sämmtlicher Arbeiten Friedlein's. Wn.

---

F. v. Kobell. Dr. Friedrich Julius Richelot. Münch. Ber. 1876. 125.

1831 Docent, 1832 ausserordentlicher, 1844 ordentlicher Professor verbrachte Richelot sein ganzes Leben (6. November 1808 bis 1. April 1875) in seiner Vaterstadt Königsberg. Von seinen zahlreichen im Cataloge of Scientific Papers (Vol. V. 1871) verzeichneten Schriften werden hier nur einige der wichtigsten angegeben, welche sich auf elliptische und Abel'sche (nicht „Abelian'sche) Integrale beziehen. Gr.

---

F. v. Kobell. Heinrich Ludwig d'Arrest. Münch. Ber. 1876. 124.

Geboren am 13. Juli 1822 zu Berlin, gestorben am 14. Juni 1875 zu Kopenhagen arbeitete der Genannte zuerst unter Encke's Leitung, ward später Observator und Professor zu Leipzig, und zuletzt Direktor der Sternwarte zu Kopenhagen. Die Astronomical Society London's hatte ihm ihre Medaille zuerkannt. Von seinen Arbeiten werden genannt die Habilitationsschrift „Ueber das System der kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter“, die ausgedehnten Untersuchungen über die sonnennahen Kometen, die Studien über das Florentiner Problem. Seinen Namen führt ein 1851 von ihm entdeckter und berechneter periodischer Komet; 1862 entdeckte er die „Freya“. Gr.

---

F. v. KOBELL. Charles Wheatstone. Münch. Ber. 1876. 117-118.

Wheatstone (1802 — 19. Oktober 1875) bekleidete seit 1834 die Professur der Physik am Kings-College zu London. Von seinen Erfindungen werden genannt das Kaleidophon, Mikrophon, Telephon, Stereoscop, der 1837 zu London erstmalig angewandte Telegraph, sowie ein Apparat zur Geschwindigkeitsbestimmung der Elektricität. Gr.

---

A. Nekrologie 1875. Hoffmann Z. VII. 165-168.

Es werden kurze biographische Notizen über 37 Gelehrte der naturwissenschaftlichen Fächer gegeben. Unter diesen gehören zu den mathematischen Zweigen ganz oder zum Theil die folgenden: F. W. A. Argelander Astr., F. J. Richelot, Matthieu Astr., E. Stahlberger Phys., H. L. F. Schrön Astr., C. G. Reuschle, J. G. Friedlein Hist., H. L. d'Arrest Astr., A. G. Theorell Meteor., J. H. J. Müller, C. Wheatstone Phys., Baron von Gumpach, Sédillot Hist. H.

---

Nekrolog des Professors Dr. Johann Müller. Hoffmann Z. VII. 85-90. Augsb. Allg. Zeitung.

Der Verfasser ist ein College des Verstorbenen. Johann Heinrich Jacob Müller, geb. 1809 zu Kassel, gest. 1875 zu Freiburg i. B., studirte 1829—34 Mathematik und Naturwissenschaften in Bonn und Giessen, war von 1834 Lehrer am Gymnasium zu Darmstadt, von 1837 an der Realschule in Giessen, von 1844 Professor der Physik in Freiburg. Seine wissenschaftlichen Forschungen beziehen sich hauptsächlich auf Licht, Galvanismus und Magnetismus Seine Hauptthätigkeit bestand in der Publication von Lehrbüchern der Physik. Am meisten bekannt ist seine deutsche Bearbeitung des Lehrbuchs von Pouillet; hierzu kamen die kleineren Werke „Grundriss der Physik“ nebst mathematischem Supplementband und „Schule der Physik“. Ein anderer Nekrolog steht in No. 250 der Freiburger Zeitung.

H.

---

Nachträgliche Todesanzeige. Hoffmann Z. VII. 342.

Belovič, Professor, in Agram gest. im Mai 1876.

H.

A. Schlenkrich. Nekrolog Gernerth's. Hoffmann Z. VII. 423-426.

August Gernerth, geb. zu Wien am 16. August 1825, gest. zu Wien am 23. Mai 1876, studirte in Wien bis 1844 und widmete sich der Mathematik, Astronomie und Chemie. Er war von 1850 Supplent, von 1852 Lehrer am akademischen Gymnasium, von 1863 bis 1867 k. k. Unterrichtsrath, von 1869 Director des k. k. Real- und Obergymnasiums im III. Gemeindebezirk. 1857 gab er heraus das Lehrbuch „Grundlehren der ebenen Geometrie", 1863 „Bemerkungen über ältere und neuere mathematische Tafeln", 1866 „Fünfstellige gemeine Logarithmen der Zahlen und der Winkelfunctionen", welche eine weite Verbreitung gefunden haben. H.

Oppel. Nekrolog von Fresenius. Hoffmann Z. VII. 520-524.

Friedrich Carl Fresenius, geboren zu Frankfurt a. M. am 24. Juni 1819, gestorben am 18. August 1876, studirte bis 1842 in Bonn und Marburg, war von da an 8 Jahre Lehrer an der Bender'schen Erziehungsanstalt in Weinheim, dann 2 Jahre Hauslehrer in Mailand, dann bis 1855 Professor der Mathematik am Gymnasium zu Eisenach, von 1857 Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Frankfurt a. M. Seine wissenschaftliche Thätigkeit war vor allem der Methodik zugewandt, er wirkte für die Selbstständigkeit des Schaffens und cultivirte die genetische und heuristische Methode. Er hatte lebhaftes Interesse für die neuere Geometrie, wollte sie aber nicht an die Stelle der Euklid'schen setzen, sondern ihr nachfolgen lassen. Besonders ausführlich ist seine persönliche Charakterisirung. Die Redaction fügt die Titel von 6 methodischen Arbeiten hinzu. H.

S. GÜNTHER. Adolf Zeising als Mathematiker. Schlömilch Z. XXI. Hl. A. 157-165.

Adolf Zeising ist geboren am 24. September 1810 zu Ballenstedt, gestorben am 27. April 1876 zu München. Der Mathematik gehört er insofern an, als er den Begriff des Schönen mathematisch auf Grundlage des goldenen Schnittes zu fixiren suchte. O.

D. BIERENS DE HAAN. Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. (IX. X. XI.) Versl. en Mededeel. X. 161-206.

IX. Hier finden wir eine Fortsetzung der früheren Beiträge (F. d. M. VII. p. 25), welche sich auf die Geschichte der mathematischen Wissenschaften in den Niederlanden beziehen. Zuerst wird über Willebrord Snellius und dessen Verdienste in der Cyclometrie gehandelt, die er, Ludolph's van Ceulen Arbeit verfolgend und erweiternd, erwarb. Dann wird über Philippus von Lansbergen gesprochen, welcher 1616 seine Cyclometricae Novae Libri herausgab, worin er durch ein abgeändertes Verfahren die Quadratur des Kreises bestimmte. Weiter kommt der berühmte Christiaan Huyghens an die Reihe, welcher in seinem Werk: „De circuli magnitudine inventa" auch die Bestimmung des Kreisumfangs behandelt und ausser den zwei bekannten Wegen auch die Theorie des Schwerpunkts einführt. Zum Schluss wird das Urtheil Montucla's aus dessen „histoire des recherches sur la quadrature du cercle" angeführt und dessen geringere Bekanntschaft mit den Leistungen Ludolph's van Ceulen nachgewiesen.

X. Cornelis von Nieurode, Landmesser und Rechenlehrer in Utrecht, ist die Hauptperson dieses Abschnitts. Er gab zwei Werkchen heraus, welche gegenwärtig sehr selten sind. Das erste derselben, welches von dem Verhältniss des Kreisdurchmessers zum Umfang handelt, erschien 1628 und enthält auch eine Auflösung der unter dem Namen des „goldenen Schnittes" bekannten Aufgabe. Das zweite erschien erst nach seinem Tode, enthält die fünfzehn Bücher Euclid's und ferner einen Anhang

über die „surdischen Zahlen“ die „Commensurabilies oder Communicanten“, das sind solche Wurzelgrössen, welche ein rationales Verhältniss haben, und die „binomischen und residu'schen Zahlen“ indem die beiden unter einander irrationalen Grössen durch die Zeichen plus oder minus unterschieden werden.

XI. Hierin wird die Geschichte der Logarithmentafeln und der Logarithmotechnie fortgesetzt. Zuerst kommt Dirk Rembrantz van Nierop (1610-1682), er war Schuhmacher von Beruf, hat aber viele Werke über Stern- und Seefahrtskunde geschrieben; 1671 gab er eine Logarithmentafel der Sinus, Tangenten und Secanten heraus, nebst einer Einleitung über den Gebrauch derselben zur Berechnung von ebenen und Kugeldreiecken.

Ueber ein volles Jahrhundert später treten die Namen des schon früher genannten Adolf Friedrich Marci und eines Niederländischen Officiers J. Wolfram in den Vordergrund; der letzte beschäftigte sich mit allerhand Zahlenrechnungen, sein grosses und wichtiges Werk über natürliche oder hyperbolische Logarithmen bis auf 48 Decimalen ist auch in deutscher Sprache erschienen.

Noch andere Holländer stellten um dieselbe Zeit Untersuchungen über die Berechnung von Logarithmentafeln an. Hierzu gehören Wilhelm Otto Reitz, Rector zu Middelburg (1702-1768), sein Neffe Karl Konrad Reitz und Dirk Klinkenberg (1709-1799), welcher sich auch auf astronomischem Gebiet, namentlich durch Berechnung von Kometen- und Planetenbahnen wohlverdienten Ruhm erworben hat. G.

---

E. Mailly. Histoire des sciences et des lettres en Belgique pendant la seconde moitié du XVIII. siècle. Rapport de Mrs. C. Houzeau et E. Quetelet. Bull. de Belg. (2) XLII. 475-479, 675-676.

Analysirende Auszüge aus einer Arbeit, auf die wir nach ihrem Erscheinen in den akademischen Publicationen zurückkommen werden. Mn. (O.)

F. J. Studnicka. Ueber die Entwickelung unserer physikalischen Literatur im Laufe der letzten fünfzig Jahre. Casopis V. (Böhmisch).

Ein Ueberblick der in böhmischer Sprache erschienenen, hierhergehörigen Arbeiten. W.

---

H. Stoy. Zur Geschichte des Rechenunterrichtes. I. Thl. Diss. Jena.

Die eigentlichen Motive, welche den Verfasser zur Abfassung seiner Schrift bestimmten, sind pädagogischer Natur. Da aber eine Geschichte des Unterrichts im Rechnen eine genaue Kenntniss des historischen Verlaufes der Rechenkunst selbst zur unumgänglichen Voraussetzung hat, so unternimmt er es zuerst, eine Geschichte der Logistik zu liefern. Von dieser liegt uns jetzt der erste die „Periode des Numerationsrechnens" behandelnde, von der ältesten Zeit bis zum späteren Mittelalter reichende Theil vor, welcher sich wiederum in drei Kapitel zergliedert. Deren erstes handelt „von der Entstehung und Entwickelung der Zahlvorstellungen", das zweite „vom Zählen und den Zahlzeichen", das dritte „von der Praxis des Rechnens". Zunächst studirt der Verfasser in ähnlicher aber noch sorgfältigerer Weise, als dies bereits von Hankel geschehen war, den psychologischen Vorgang, welcher in der Vorzeit bei der Bildung der ersten Zahlvorstellungen obgewaltet haben muss. Leiten lässt er sich dabei von einem Principe, welches im Wesentlichen auch die gesammte moderne Entwickelungsgeschichte der organischen Körper beherrscht, dass nämlich der noch jetzt in jedem einzelnen Individuum stündlich sich vollziehende Entwickelungsprocess ein treues Spiegelbild des historischen Werdens sei; indess leugnet er nicht, dass diese Analogie keine absolute genannt werden könne. Bis zur vollendeten Conception des Begriffes der abstrakten unbenannten Zahl unterscheidet er vier Uebergangsstufen. Das zweite Kapitel befürwortet an erster Stelle die Hypothese, die Zahlzeichen seien im Allgemeinen früher entstanden als die zugehörigen Zahlwörter. Hierauf wird das relative Alter der ver-

schiedenen Zahlschreibmethoden untersucht und nachzuweisen versucht, dass die lateinischen Ziffern die ältesten, weil die primitivsten, und speciell früher entstanden seien als die griechischen Buchstaben-Zahlen. Mit Rücksicht auf diese letzteren werden auch die sogenannten herodianischen Ziffern herbeigezogen, welche allein geeignet erscheinen, im instrumentalen Rechnen Verwendung zu finden. Bemerkenswerth sind die Bemerkungen über das Verhältniss der römischen Zahlzeichen zum Stellenwerthsystem. Es folgt eine Beschreibung der sogenannten digitalen Arithmetik, welche bei den meisten Fachschriftstellern eine sehr stiefmütterliche Behandlung sich gefallen lassen musste; ihr Wesen und die Gründe, welche auch noch in verhältnissmässig später Zeit deren Beibehaltung als nothwendig erscheinen liessen, werden übersichtlich dargelegt. Eine dem Aventin entnommene Tafel ermöglicht uns die Kenntnissnahme der für die verschiedenen Zahlen ausgesonnenen theilweise ziemlich complicirten Fingerstellungen. Den Schluss des zweiten Kapitels bildet die Besprechung des Abakusrechnens; der Verfasser weist im Gegensatze zu Friedlein's Meinung überzeugend nach, dass die Linien des römischen Rechenbrettes senkrecht gegen die Person des Rechners gezogen waren, und dass so auf höchst naturgemässe Weise aus dem Linien-Abakus der Columnen-Abakus sich herausbilden musste. Mit dem dritten Kapitel wird das zweite Heft beginnen.

Bemerkt möge noch werden, dass Stoy's Abhandlung umfängliche Besprechungen durch den Referenten in den „Jahrb. f. Philol. u. Pädagogik“ und durch Treutlein in der „Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterricht“ erfahren hat. Letztere Recension ist in der Lage, die Behauptung Stoy's, als sei im sechzehnten Jahrhundert die Fingerrechnung bereits vollständig verschwunden gewesen, durch direkten Hinweis auf das Rechenbuch des älteren Apian (Ingolstadt 1532) thatsächlich entkräften zu können. Gr.

---

M. Cantor. Die Rechenkunst im sechszehnten Jahrhundert von A. Kuckuck. Traduzione dal Tedesco del Dr. Alfonso Sparagna. Boncompagni Bull. IX. 183-187.

**Wörtliche Uebersetzung der Recension, welche über die Festschrift von Kuckuck-Kallius (Berlin 1874) in der historisch-literarischen Abtheilung der „Zeitschr. f. Math. u. Phys.“ (20 Jahrg. S. 66ff.) erschienen ist.** Abgesehen von der Kritik sind Cantor's Zusätze erwähnenswerth, welche sich besonders mit dem Coburger Rechenmeister Simon Jacob und den von ihm eingeführten Neuerungen beschäftigen. Besonders betreffen diese die sogenannte wälsche Praktik, d. h. die Gewohnheit, jeden Bruch in die Form

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\cdots\right)$$

umzugiessen; hiermit beschäftigt sich auch sehr ausführlich der Ulmer Johann Krafft. Eine Anmerkung des Herausgebers giebt genaue literarhistorische Nachweisungen über die Ausgaben von Simon Jacob's Rechenbuch (Frankfurt 1565 und 1600).

Gr.

---

F. J. Studnicka. Ueber den Ursprung und die Entwickelung der Zahlentheorie. Casopis IV. (Böhmisch).

Der Verfasser giebt einen kurzen historischen Ueberblick über den Ursprung und die Entwickelung der Zahlentheorie in zwei Abtheilungen, deren erste die Zeit von den ersten Anfängen im Alterthum bis zu Fermat, und deren zweite die Zeit von Fermat bis jetzt behandelt. Reichliche Citate erläutern die Darstellung.

W.

---

S. Günther. Mathematisch-historische Miscellen. Schlömilch Z. XXI. Hl. A. 57-64.

I. Die geometrischen Progressionen bei den Arabern. Der Verfasser bemerkt, dass bei den Arabern sich Spuren über die Kenntniss der geometrischen Reihen bisher nur bei Albiruni gefunden haben. Dieser knüpft an das Schachspiel an und giebt die bekannte Zahl für die Summe der Weizenkörner richtig an; auch kennt er noch einige weitere Eigenschaften derselben, die sich in seinem chronologischen Werke „Alâthâr Albâkiya“ finden.

Die allgemeine Summenformel hat Albiruni indess wahrscheinlich noch nicht gekannt, sondern die Zahl mit Hülfe von Kunstgriffen, die er griechischen Ueberlieferungen verdankt, bestimmt.

II. Die magischen Quadrate bei Gauss. Ergänzung zu der grösseren Arbeit des Verfassers: „Historische Studien über magische Quadrate". Aus dem Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher ergiebt sich, dass sie in Correspondenz über magische Quadrate gestanden haben und zwar aus Veranlassung von Arbeiten, die Clausen, Schumacher's Assistent, ihm vorgelegt hatte. O.

---

S. Günther. Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. Teubner.

Das Referat selbst wird im nächsten Bande nachgeholt werden. Vorläufig möge auf die eingehende Besprechung von Cantor in Schlömilch Z. XXI Hl. A. 99-103 verwiesen werden.

O.

---

H. Hankel. Prospetto storico dello sviluppo della geometria moderna; scritto postumo. Traduzione dal Tedesco del Alfonso Sparagna. Boncompagni Bull. IX. 267-289.

Uebersetzung der Einleitung von Hankel's „Elemente der projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung „s. F. d. M. VII. p. 353. O.

---

V. Liguine. Note sur l'origine de l'idée de la cinématique. Nouv. Ann. (2) XV. 499-501.

Der Verfasser bemerkt, gegenüber den Ausführungen von Transon und Lucas, dass schon Euler den Gedanken der reinen Bewegungslehre gefasst habe, und citirt zum Beweise eine Stelle der Schrift: Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum (N. Comm. i. Ac. Petrop. XX. p. 189.).

O.

---

F. KLEIN. Ist Oerstedt oder Schweigger der Entdecker des Elektromagnetismus? Pogg. Ann. CLVII. 647-648.

Im fünften Bande des Jahrbuches p. 9 war über eine anonyme Brochure mit dem obigen Titel referirt worden, in welcher die Priorität der Entdeckung des Elektromagnetismus für Schweigger in Anspruch genommen wurde. Der Verfasser der vorliegenden Notiz bemerkt, dass diese Behauptung unrichtig sei. O.

---

J. C. HOUZEAU. Table chronologique des découvertes astronomiques. Ann. de l'obs. de Brux. 1877. Bruxelles. Hayez 1876. 52-124.

Diese Tafel ist in 3 Theile getheilt, welche sich mit den Beobachtungen, den Methoden und den Instrumenten beschäftigen. Diese Eintheilung ist etwas künstlich, denn die Hypothesen, die Beobachtungen, die Instrumente und die Theorien stehen in einer zu engen Verbindung, um sie in einer historischen Uebersicht mit Nutzen zu trennen. Der Verfasser hat sich auch genöthigt gesehen die Analyse verschiedener Theile von Werken, wie vom Almagest, in verschiedene Theile zu setzen. Herr Houzeau hatte sich vorgenommen, in seiner chronologischen Tafel, nicht die besten Arbeiten über jede Frage anzugeben, sondern die ersten Untersuchungen, die, welche einen neuen Weg eröffneten. Er ist dadurch gezwungen gewesen, manchen Schriftstellern, welche jeder Kritik ermangeln, wie Höfer und Bailly, die die Existenz einer wissenschaftlichen Astronomie in sehr entlegenen Zeiten annehmen, zu viel Vertrauen zu schenken. Man wird daher schwerlich dem, was er von den Indern und Chinesen sagt, viel Glauben schenken, oder gar solcher Aeusserung wie die folgende: „XIV. Jahrhundert: Chiron, der Führer der Argonauten construirt eine Himmelskugel“. Den ersten astronomischen Schriftsteller Indiens, Aryabatta, stellt er 800 Jahre zu früh (300 vor Christus, statt 500 nach). Auch zeigen sich einige Lücken. So ist die erste Beobachtung des Neptun (23. VIII. 1846) nicht bemerkt. Trotz dieser Ausstellungen jedoch scheint dem Referenten die

chronologische Tafel des Herrn Houzeau ein in seiner Art vortrefflicher Versuch. Mn. (O.)

---

S. GÜNTHER. Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung. Erlangen. Besold.

Der in der Grazer Naturforscherversammlung unter obigem Titel gehaltene Vortrag erscheint hier umgearbeitet zugleich mit Noten, welche die einzeln berührten Themata weiter verfolgen und so einer durch die Umstände auferlegten Kürze nachträglich abhelfen sollen. Die gegenwärtige Schrift nicht weniger als der Vortrag ist zugleich auch für Nichtmathematiker bestimmt. (Kurz besprochen in Hoffmann Z. VII. 474 und Grunert Arch. LIX. litt. B. 36. Der Vortrag ist in Hoffmann Z. VII. 159-165 abgedruckt). H.

---

## Capitel 2.

## Philosophie.

E. DÜHRING. Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Zweite theilweise umgearbeitete und mit einer Anleitung zum Studium der Mathematik vermehrte Auflage. Leipzig. Fues. 8.

Ueber die erste Auflage dieses Werkes ist bereits in eingehender Weise F. d. M. V. p. 59-70 berichtet worden. Auch später hat Ref. noch Gelegenheit gehabt, aus Anlass eines Berichtes von Bertrand (s. F. d. M. VII. p. 22) auf das Werk zurückzukommen. Schon in der ersten Auflage hatte sich die Vorliebe des Verfassers, überall zu kritisiren, in nicht eben angenehmer Weise geltend gemacht. In der neuen Auflage sind Anmerkungen und eine Anleitung zum Studium der Mathematik hinzugekommen, in denen dies noch mehr hervortritt. Namentlich ist dort die Art und Weise, so wie die Sprache, in welcher der Verfasser

seine absprechenden Urtheile über Alles, was bisher eines Namens genoss, abgiebt, eine so schroffe und das gewöhnliche Maass wissenschaftlicher Kritik überschreitende, dass dieselbe fast unlesbar wird. . O.

---

J. Hoüel. Ueber die Rolle der Erfahrung in den exacten Wissenschaften. Grunert Arch. LIX. 65-75.

Die Abhandlung des Herrn J. Hoüel, über welche F. d. M. VII. 28 berichtet wurde, ist hier von F. Müller in's Deutsche übersetzt und mit einigen literar-historischen Anmerkungen versehen. M.

---

H. Scheffler. Die Naturgesetze und ihr Zusammenhang mit den Principien der abstracten Wissenschaften. Erster Theil. Die Theorie der Anschauung oder die mathematischen Gesetze. Leipzig. Fr. Förster.

Der Verfasser entfaltet eine bewundernswerthe Erfindsamkeit an Namen für erdachte Beziehungen zwischen mathematischen Gegenständen, welche den Eindruck neuer philosophischer, das ganze Gebiet verbindender Auffassung hervorzubringen geeignet sind. Wissenschaftlicher Inhalt, von einigem Reproducirten abgesehen, ist nicht vorhanden. H.

---

Funcke. Grundgedanken der mechanischen Naturerklärung. Pr. Neumünster.

Die Schrift handelt der Reihe nach vom Wesen der Naturerklärung, vom Causalitätsprincip und Naturgesetz, von Stoff und Kraft, von Arten und Constitution der Materie, von Valenz, von Grösse der Molecule und Atome, von Aggregatzuständen und von physikalischen Agentien und Chemismus. Der Anfang zeigt grössere Gründlichkeit und haltbarere, klarere Gedanken als im weiteren Fortgang zur Ausführung gelangen, wo der Vortrag

mehr und mehr in eine blosse Musterung und Zusammenstellung vorgefundener Ideen ohne logische Kritik übergeht. Letztere vermisst man z. B., wenn der Verfasser Stösse der Molecule als einfache, keiner Erklärung bedürftige Vorgänge behandelt, während er Wirkung in die Ferne (die er freilich zulassen zu müssen glaubt) für eine schwer zu begreifende Sache ansieht ohne an die Frage zu denken, was man unter einer Wirkung verstehen soll, die nicht Wirkung in die Ferne sei. Eine formulirte Angabe des Grundgedankens der Naturerklärung kommt nicht vor; dem Verfahren zufolge scheint jedoch der Verfasser über die unter Laien übliche Auffassung nicht hinauszugehen, der gemäss von der Erklärung nichts weiter als Reduction auf geläufige Vorstellungen verlangt wird, mögen diese auch noch so unentwickelt und vag sein. Im ersten Abschnitt wird die psychische Genesis der Grundbegriffe mehr angedeutet als ausgeführt; der Versuch eines weiteren Verfolges vom richtig Begonnenen führt den Verfasser meist auf Abwege und nur darum auf Schwierigkeiten. Es ist richtig, dass die Erkenntniss, hervorgehend aus dem Bedürfniss sich in der Erscheinungswelt zurecht zu finden, an die Stelle der natürlichen Einheit des Sinneneindrucks die künstliche Einheit der Substanz setzt. Dass aber beide ähnliche, soweit möglich übereinstimmende Bilder liefern sollen, ist eine unnöthig herbeigezogene, irrige Forderung (der Aether ist der Farbe nicht ähnlich). Diese Täuschung hindert den Verfasser entschiedene Principien in der Genesis der Begriffe aufzufinden. Er hat die andere wichtigere Forderung übersehen, dass das Substrat den Wechsel der Erscheinung überdauern muss. Ebenso ist die Bemerkung richtig, dass wir die Art leichter erkennen als das Individuum z. B. eine Fliege. Der Verfasser findet keine andere Erklärung als Mangel an geistiger Kraft. Dennoch liegt die ausreichende nicht weit; er brauchte nur in Betracht zu ziehen, wie durch das hinzutretende Erkennen der Art (Vergleichung der zweiten Fliege mit der ersten) die, zwar jederzeit vorausgehende, aber unvollendete Erkenntniss des Individuums fortentwickelt und als dauernde Fähigkeit erst zum Bewusstsein gebracht wird. Auch scheint er die Identitätsfrage nicht als ge-

sonderte aufzufassen, vielmehr mit einzumischen. Bei Besprechung des Causalitätsbegriffes vermisst man sehr die Vergegenwärtigung der bei der Causalität in Betracht kommenden Elemente oder Factoren. Obgleich der Verfasser die vulgäre Auffassung nicht ohne Correction lässt, wird er doch durch sie dazu verleitet, Ursache und Wirkung als gleichartige Dinge anzusehen. Es findet sich kein Wort der Beachtung, dass die exacte Wissenschaft nur dauernde Ursachen (Ursachen wohl zu unterscheiden von momentanen Umständen) und nur Veränderungen als Wirkung kennt, während im vulgären ungenauen Gebrauch der Vorgang Ursache des Vorgangs ist, so dass die Erklärung im Grunde keinen Schritt weiter kommt. Indem der Verfasser sich in der mannichfaltigen Anwendung des Causalitätsbegriffs umsieht, ergeben sich allerdings einige anzuerkennende Scheidungen, z. B. zwischen dem Naturproduct und Artefact, doch wird keine einzige Bemerkung zu einem exacten Abschluss geführt. Das Folgende, welches sich eklektisch zwischen vielbesprochenen Aufstellungen bewegt, bietet keinen besonderen Anlass zum näheren Eingehen.

H.

---

STRICHEN. Rapport sur une thèse de M. Ch. Savez: La matière est-elle inerte? Bull. de Belg. (2) XLI. 1153-1155.

Der Berichterstatter kritisirt die These des Herrn Savez (Die Materie ist nicht träge, denn die Bewegung gehört zu ihrem Wesen), ohne tief in die Frage einzugehen und ohne die Arbeit zu analysiren, in der man unter anderen folgende Behauptung findet: Es giebt keine gleichförmige Bewegung. Die Newton'sche Attraction ist eine falsche Induction.

Mn. (O.)

---

DE SAINT-VENANT. Philosophie et enseignement des mathématiques. Sur la réduction des démonstrations à leur forme la plus simple et la plus directe. C. R. LXXXIII. 102-106, 256-257.

Um die einfachsten Beweise für elementare Sätze aufzufinden, räth der Verfasser die beim gewöhnlichen Beweise zu Hülfe gezogenen Sätze wieder aufzulösen und deren Beweise als Theile in den Gesammtbeweis einzufügen. Indem er so mit dem Euklid'schen Beweise für den Pythagoräischen Satz verfährt, gelangt er zu einem solchen, der durch blosse Verschiebung der Theile des Quadrats zustande kommt. Er bespricht ferner mit ausschliesslicher Bezugnahme auf die französischen Unterrichtsanstalten das Verhalten zur Infinitesimalrechnung, welches, entgegen bestimmten Verordnungen, die unendlichen Grössen durch künstliche Auskunftsmittel zu umgehen gesucht habe, und befürwortet ein directes Eingehen des Unterrichts auf die Infinitesimaltheorie, sieht jedoch dieselbe noch für schwierig und geheimnissvoll an. Beide Auslassungen ignoriren Bekanntes in grossem Umfang und zeigen eben nur die Anfänge von Ideen, die anderweit längst Platz gegriffen haben. H.

---

J. Belovič. Das Beweisverfahren in den inversen Rechnungsarten betrachtet vom Standpunkte der genetischen Methode. Hoffmann Z. VII. 345-355.

Der Artikel wendet sich gegen Ausführungen von Zerlang und Börner. Er macht auf Täuschungen aufmerksam, in denen ein vermeintlich genetisches oder heuristisches Verfahren befangen ist, namentlich wenn dasselbe Prämissen und Resultat, beide unbekannt, entwickeln zu können vorgiebt. Der besonders zur logischen Correction dienende Gesichtspunkt ist die Auffassung der algebraischen Transformation, z. B.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c},$$

als Lehrsatz, welcher den Rechnungsgang in die Wahl des Schülers stellt, nicht als Aufgabe der Division oder Addition. Nicht der Satz, sondern aus dem Satze die Anwendung ist entwickelungsfähig. H.

---

G. Dillner. Om Matematikens studium vid några af den Tysken Universiteten. Reseberättelse.. Upsala Universitets-Arskrift 1876. Matematik och Naturwetenskap.

Enthält hauptsächlich ein Referat über die Statuten der mathematischen Seminarien zu Göttingen, Halle, Berlin, Königsberg, Breslau und Bonn. Der Verfasser theilt auch den Jahresbericht 1850-1851 des Seminars zu Göttingen mit, sowie den Bericht des Herrn Schering über die Wirksamkeit desselben Seminars während des Jahres 1874-1875. Auf Grund eigener Beobachtung giebt der Verfasser einen Bericht über die Arbeiten des Göttinger Seminars während des Wintersemesters 1875-1876. Herr Weierstrass hat dem Verfasser gütigst ein interessantes Verzeichniss über einen Theil der Fragen mitgetheilt', die unter seiner Leitung im Berliner Seminar behandelt worden sind. Auch der Bericht des Herrn Weber über die Wirksamkeit des Seminars zu Königsberg 1875-1876 wird angeführt. Endlich wird ein Vergleich zwischen den mathematischen Studien in Deutschland und im Vaterlande des Verfassers aufgestellt, der für letzteres sehr unvortheilhaft ausfällt. Als Hauptgrund wird die Anordnung der Examina an den schwedischen Universitäten angegeben, die sehr nachtheilig und hinderlich für das Studium von rein wissenschaftlichen Fragen sei. Der Verfasser schliesst mit folgenden Worten: „Ein wissenschaftliches Examen, in der Hauptsache unserem Licentiatexamen entsprechend, aber unabhängig von jedem anderen vorbereitenden Examen ausser dem Maturitätsexamen auf den klassischen oder realen Schulen, sowie eine entsprechend vermehrte Zahl von akademischen Lehrern würde dem schwedischen Studenten Gelegenheit bieten, sich unter gleichen Bedingungen mit dem deutschen zu messen, sowohl in Bezug auf den Umfang der wissenschaftlichen Kenntnisse als auf die Zeit, die zur Aneignung dieser Kenntnisse verwendet wird; und ich glaube, dass der Vergleich in solchem Falle für uns vollkommen befriedigend ausfallen würde.“

M. L.

P. Mansion. Note sur l'enseignement des mathématiques dans les colléges. Ann. Soc. scient. Brux. I. A. 160-170.

Jeder Unterrichtszweig muss zur Erziehung beitragen, muss den übrigen wichtigen Zweigen nützlich, nicht schädlich sein. Die Fähigkeiten für Zahlen und Geometrie treten bei den Kindern etwa im zehnten Jahre, manchmal sogar früher auf. Die Fähigkeit der logischen Deduction dagegen erst im 15. und die Fähigkeit zur Kritik und Mechanik noch später. Man sollte daher vor dem funfzehnten Jahre die Kinder nur in den Elementen der Mathematik und des Zeichnens in praktischer und anschaulicher Form unterrichten und den speculativen und abstracten Unterricht erst später beginnen. Man muss daher speciell alle die geometrischen Gegenstände, welche die Theorie der Grenzen voraussetzen, soweit als möglich verschieben. Ebenso sollte man in engster Weise die Algebra der Arithmetik, die Trigonometrie der Geometrie anschliessen. Der pädagogische Einfluss der Mathematik kommt hauptsächlich der Fähigkeit der Deduction im Bereich der Grössenidee zu Statten. Mn. (O.)

---

Schultzen. Der erste geometrische Unterricht. Pr. Goslar.

Der Verfasser verlangt, dass man dem Anfänger in der Geometrie durch eine vorausgehende Orientirung in den Raumgebilden zu Hülfe komme. Die Schrift geht das Pensum für Quarta durch und sucht durch angeknüpfte Fragen der Forderung zu genügen. H.

Börner. Geometrische Propädeutik. Pr. Ruhrort.

Die vorliegende Schrift stellt zuerst die Grundsätze, dann den Entwurf einer geometrischen Propädeutik, letztere in abgekürzter Form, auf. Sie zeichnet sich dadurch aus, dass sie die strenge mathematische Methode in vollem Maasse würdigt und als das nothwendig zu erreichende Ziel betrachtet, nach welchem die Propädeutik unmerklich hinführen soll. Daher verwirft sie

principielle Entgegensetzung und Abweichungen, die nicht im einzelnen Falle zweckentsprechend sind. Die stereometrische Betrachtung wird zugezogen, doch soll sie kein blosses formelles Mittel zur Herleitung der Begriffe sein, sondern das Interesse durch Darbietung von Fähigkeiten wach erhalten. Der Fortschritt ist vom Besondern zum Allgemeinen, vom Würfel, Quadrat durch das rechtwinklige Viereck und Dreieck zum beliebigen Dreieck. Der Verfasser hebt folgende Grundsätze hervor: Der Unterricht soll an bekannte Begriffe anknüpfen, aber nicht bei diesen und bei dem inductiven Verfahren stehen bleiben, sondern allmählich die Methode ausbilden und sich mehr und mehr der mathematischen Form anschliessen. Das Ganze soll systematisch geordnet sein und darf in der Begründung keine Lücke enthalten.

H.

---

F. Reidt. Soll beim trigonometrischen Unterrichte das geometrische oder das arithmetische Princip vorherrschen? Hoffmann Z. VII. 1-12.

Erler. Das geometrische und das arithmetische Princip beim trigonometrischen Unterrichte. Hoffmann Z. VII. 435-439.

Das letztere Princip wird im Text zutreffender das analytische genannt; denn es wird damit die Methode bezeichnet, welche von Anfang an die Totalität der Dreiecksaufgaben in's Auge fasst und systematisch löst. Mit dem Entgegengesetzten ist kein Princip kenntlich gemacht; es kann damit nur das gewöhnliche, synthetische Verfahren gemeint sein, das jede Aufgabe für sich betrachtet. Der Verfasser der ersten Schrift räth beides zu verbinden, weil jedes in einer Hinsicht unzureichend sei. Wie sich in der That der der analytischen Methode zugeschriebene Nachtheil, dass das Kennenlernen einer Universalmethode zur Gedankenlosigkeit führt, durch jene Verbindung abwenden lässt, ohne das Princip zu verdunkeln, würde weit deutlicher an's Licht getreten sein, wenn die Bedingung, unter der allein die analytische

Idee auf der Schule, wo sie nicht heimisch ist, Berechtigung hat, in Betracht gezogen wäre, die nämlich, dass jene Methode auf Anwendung der erworbenen Fertigkeit hinzielt, welche das erneute Nachdenken erfordert und das Bewusstsein der Bedeutung der Rechnungselemente rege erhält. Die eigentliche Frage der Ueberschrift bleibt unbeantwortet.

Gerade auf diese Frage geht aber der zweite Aufsatz von Erler ein und entscheidet sie nach vergleichender Charakterisirung beider Methoden dahin, dass zuerst und so lange die analytische vorherrschen soll, bis der Schüler zum Bewusstsein erlangter Fertigkeit gelangt ist und deren Früchte kennen gelernt hat.

H.

---

S. Günther. Zum Unterricht in der höhern Analysis.
Hoffmann Z. VII. 356-369.

Der Verfasser mustert die vorhandenen Lehrbücher der höheren Analysis, deren Nachweis am Schlusse gegeben wird, grösstentheils nach subjectiven Gesichtspunkten. Nur im Anfang wird die Scheidung der Methoden, wiewohl ziemlich flüchtig, in Angriff genommen, dieselben jedoch sogleich in ein verkehrtes Verhältniss gebracht. Nach vorliegender Darstellung war Hoppe's Infinitesimaltheorie der erste Fortschritt über die verurtheilte Lagrange'sche Ableitung aus Reihen und über die vagen Begriffe vom Unendlichkleinen nebst mannichfaltigen Auskunftsmitteln, ward aber nachher vollkommen ersetzt durch die Grenzmethode. Der Verfasser überspringt also gänzlich die methodischen Leistungen Cauchy's, den er nur als Kritiker Lagrange's kurz erwähnt; er weiss nichts davon, dass eben jene von ihm gerühmte Grenzmethode durch Cauchy's Arbeiten ihre Ausbildung erhielt, und übersieht, dass die neue Infinitesimaltheorie gerade die Bestimmung hat, die Mängel dieser vorher herrschenden Grenzmethode, bestehend in vielfachen Lücken der Bündigkeit, unnöthiger Einengung des Rechnungsverfahrens und unnatürlicher Verhüllung der logischen Beziehungen, zu beseitigen. Dass etwa die neueren Lehrbücher, denen er schlechthin die Grenzmethode

zuschreibt, einen solchen Standpunkt beanspruchten und eine Verbesserung der alten zum Ziele nähmen, dafür fehlt jede Erklärung. Der Verfasser hat also den Fortschritt der Methode völlig ignorirt. Die Uebergehung von Cauchy's Schriften findet sich auch im literarischen Nachweis, und wird hier durch Nachtrag der Redaction corrigirt. H.

---

# Zweiter Abschnitt.

## Algebra.

### Capitel 1.

### Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

G. BELLAVITIS. Riassunto delle lezioni di algebra. Padova. 8.

Das Buch soll eine Einführung in die sogenannte „Algèbre complémentaire" sein. Cap. I. behandelt die numerische Auflösung der algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten, Cap. II. die algebraische Lösung der Gleichung $3^{\text{ten}}$ und $4^{\text{ten}}$ Grades und einiger algebraisch auflösbarer Gleichungen vom höheren Grade. In Cap. III. folgen auf die Entwickelung der Binomialformel die Sätze von Hudde, Rolle, Sturm und Sylvester; darauf Einiges über den Gebrauch der Decimalfactoren bei der Auflösung von Gleichungen und die Zerlegung gebrochener Functionen. Cap. IV. enthält die Factoriellen, die Combinationen und einiges Allgemeine über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Cap. V. giebt einen Abriss der Determinantentheorie und der Elimination aus Gleichungen beliebiger Grade. Cap. VI. enthält eine Einleitung in die Zahlentheorie bis zu den Congruenzen $2^{\text{ten}}$ Grades, Cap. VII. die Anwendung der Logarithmen, auch der Gauss'schen, die Exponential- und hyperbolischen Functionen. In Cap. VIII. zeigt der Verfasser die Verwerthung seiner Methode der Aequi-

pollenzen in der Theorie des Imaginären, woran sich die cyklometrischen und die trigonometrischen Functionen schliessen. Im folgenden Cap. IX. werden die Interpolation, die abgeleiteten Functionen, die unendlichen Reihen, die Näherungsmethoden behandelt, und es wird die Functionentheorie fortgesetzt bis zu der Einführung der elliptischen Functionen. Das Schlusscapitel X. enthält die symmetrischen Functionen, die Theorie der linearen Substitutionen, die Theorie der algebraischen Formen mit Anwendung der Discriminanten, Invarianten und Covarianten.

Ein ausführliches Referat über das Buch findet sich Darboux Bull. X. 67-69; ebenso Mondes (2) XL. 619. M.

---

J. M. J. Sachse. Allgemeine Arithmetik und Algebra. Coblenz. J. Hölscher.

Dieses, als III. Theil des „Allgemeinen Deutschen Rechenbuches“ erschienene, Lehrbuch ist bestimmt zum Gebrauche in den mittleren und oberen Klassen von Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen und an Schullehrer-Seminarien. In dem ersten, dem theoretischen Theile werden die Hauptgesetze für die 7 arithmetischen Operationen gegeben; daran schliessen sich die quadratischen und Exponentialgleichungen, die Progressionen, Kettenbrüche, diophantischen und cubischen Gleichungen, und den Schluss bildet die sogenannte „Syntaktik“, nämlich die Permutationen, Combinationen, Variationen und der binomische Satz. Der zweite, der praktische Theil, enthält circa 5700 Uebungsbeispiele, praktische Aufgaben aus der Physik etc., Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung etc. Ein Anhang giebt physikalische Tabellen, Epacten-Tafeln und andere in der praktischen Arithmetik vorkommende Tabellen. M.

---

E. Schröder. Ueber v. Staudt's Rechnung mit Würfen und verwandte Operationen. Clebsch Ann. X. 289-317.

Mit Staudt's Wurfrechnung (Beitr. zur Geom. der Lage § 19-21, 27-29) haben sich neuerdings Lüroth und der Referent

in geometrischer Weise beschäftigt (Gött. Nachr. 1873 S. 767; Clebsch Ann. VIII. 1; IX. 333; cfr. Jahrb. V. 307; VI. 301; VII. 357); der Verfasser behandelt dieselbe von der algebraischen Seite. Die homogenen Coordinaten der Punkte eines Kegelschnitts können als ganze rationale Functionen 2ten Grades eines Parameters dargestellt werden; wenn $t_0$, $t_1$, $t_\infty$ die Parameter der festen drei ersten Punkte aller betrachteten Würfe, $t_a$, $t_b$, $t_{ab} = t_c$ die der vierten Punkte von 3 Würfen, von denen der letzte das Product der beiden ersten ist, so besteht, wie Herr Schröder zeigt, die Relation

$$t_c = \frac{t_a t_b (t_1 - t_\infty - t_0) + (t_a + t_b) t_\infty t_0 - t_0 t_1 t_\infty}{-t_a t_b + (t_a + t_b) t_1 - t_1 t_\infty + t_\infty t_0};$$

woraus dann die Fälle der Addition und der inversen Operationen abgeleitet werden. Durch eine lineare gebrochene Substitution wird ein neuer Parameter $\tau$ eingeführt (das Doppelverhältniss der vier Punkte $t_0$, $t_1$, $t_\infty$, $t$), für welchen $\tau_{ab} = \tau_a \cdot \tau_b$ und $\tau_{a+b} = \tau_a + \tau_b$, so dass also die symbolische Multiplication eine wirkliche wird. Schon aus der früheren Form leuchtet die Commutativität, aus dieser die Associativität und Distributivität ein.

Zwei Determinanten-Operationen aus dem vorhergehenden werden hervorgehoben und verallgemeinert; die eine führt zu der Gleichung der linearen Mannigfaltigkeit $(n-1)$ter Stufe, welche im Raume von $n$ Dimensionen $n$ Punkte einer unicursalen Mannigfaltigkeit 1ter Stufe $n$ten Grades verbindet; bei der andern werden $n+1$ Variabeln aus $n+1$ linearen Gleichungen in Determinantenform, welche sich nur durch die eine Colonne unterscheiden, derartig eliminirt, dass das Eliminationsresultat aus dem gemeinsamen Kern der gegebenen Determinanten durch Ränderung entsteht; der Verfasser erwähnt die Hülfe, die ihm Herr Voss hierbei geleistet.

Im zweiten Theile bespricht er den Zusammenhang dieses Aufsatzes mit seinen formalen Untersuchungen, über welche er im Programm von Baden-Baden 1874 (cfr. Jahrb. VII. p. 55) schon eine vorläufige Mittheilung gemacht. Irgend eine Function $c = f(a,b)$ nennt er symbolisches Product von $a$ und $b$, und die Auflösungen

nach $a, b$ symbolische Quotienten $a = \frac{c}{b}$, $b = c:a$, was im Allgemeinen verschiedene Operationen sind: die Ausführbarkeit und Eindeutigkeit wird dabei vorausgesetzt. Durch Gleichsetzung der Resultate der mit 2, bez. 3 Grössen vorgenommenen Operationen erhält man eine grosse Zahl von Gleichungen, die zum Theil von einander abhängen, wie z. B. aus $a:b = ab$ folgt $a:b = \frac{b}{a} = ab$, oder durch gewisse Vertauschungsprincipien auseinander abgeleitet werden können. Hieraus ergiebt sich eine Gruppirung dieser Gleichungen. Allen, die in einem logischen Zusammenhange stehen, entspricht dann stets ein Algorithmus; es ist nun wünschenswerth, Lösungen oder Beispiele für diese Algorithmen zu ermitteln. Der Verfasser giebt mehrere solche Lösungen und zeigt, wie sie die Wurfrechnung als Particularfall enthalten.

Sm.

---

G. Biasi. Il calcolo sulle incognite delle equazioni algebriche. Verona, Münster e Milano, Brigola.

Siehe Abschn. II. Cap. 3.

---

P. Gordan. Fundamentalsatz der Algebra. Clebsch Ann. X. 572-576.

Herr Gordan theilt eine wesentliche Vereinfachung des zweiten Gauss'schen Beweises für die Existenz der Wurzeln algebraischer Gleichungen mit. Er setzt

$$f(x+u) = f(x) + uP(x, u),$$

betrachtet dann die Resultante $R_{f(x),\, P(x,u)}$, welche $= R_{f(x),\, P(x,-u)}$ ist und also eine Function $\frac{n(n-1)}{2}$ ten Grades von $u^2$ wird. Besitzt diese eine Wurzel $v$, so ist $v$ ein Theiler von $f(x)$; aus der Existenz desselben folgt diejenige einer Wurzel von $f(x)$, wie durch Betrachtung der Fälle nachgewiesen wird, dass 1) $v$ reell, 2) imaginär aber von einem Grade $< \frac{n}{2}$; 3) imaginär und vom Grade $\frac{n}{2}$ sei.

No.

---

Rouquet. Note sur la continuité des racines des équations algébriques. Nouv. Ann. (2) XV. 154-159.

Nachweis dafür, dass mit stetiger Aenderung der Coefficienten einer algebraischen Gleichung auch die Wurzeln derselben sich stetig ändern. No.

---

S. R. Minich. Sull' uso analitico delle differenze tra le radici nella teoria delle equazione algebriche. Acc. R. L. (2) III. 303-352.

---

Hunrath. Algebraische Untersuchungen nach Tschirnhausen's Methode. Pr. Glückstadt.

Nach der von Tschirnhausen (Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione, Acta erud. 1683, p. 204 sq.) gegebenen Methode werden die beiden Aufgaben behandelt: 1) Aus einer Gleichung $n^{ten}$ Grades eine andere desselben Grades abzuleiten, in der ein beliebiger zwischen der höchsten Potenz der Unbekannten und dem absoluten Gliede liegender Term (ein beliebiger Zwischenterm) fehlt; und 2) Aus einer Gleichung $n^{ten}$ Grades eine andere desselben Grades abzuleiten, in der zwei beliebige Zwischenterme fehlen. Es werden gewisse Gesetze für die Form der aufgestellten Bedingungsgleichungen discutirt, specielle beachtenswerthe Fälle erwähnt, und Anwendungen gemacht auf die Auflösung der Gleichung $2^{ten}$ Grades, der reducirten und der allgemeinen Gleichung $3^{ten}$ Grades, und der reducirten und der allgemeinen Gleichung $4^{ten}$ Grades. Benutzt sind als Quelle ausser Tschirnhausen's Abhandlung hauptsächlich Lagrange's Réflexions sur la résolution algébrique des équations, Nouv. Mém. de l'Ac. de Berlin, année 1770, p. 134-215, und année 1771, p. 138-254. M.

---

E. Catalan. Sur la transformation des équations. N. C. M. II. 342-349.

Beweis des Satzes von Jerrard, zum Theil nach Serret's Algèbre supérieure. Mn. (O.)

---

H. NÄGELSBACH. Studien zu Fürstenau's neuer Methode der Darstellung und Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten. Grunert Arch. LIX. 147-192.

Ueber die Methode des Herrn Fürstenau vgl. F. d. M. VI. 59 und 133. Der Herr Verfasser der vorliegenden Arbeit leitet die Resultate jener Untersuchungen aus einigen Determinantensätzen ab und untersucht eingehend nicht nur den Fall, in welchem die Gleichung eine einzige grösste Wurzel hat, sondern auch denjenigen Fall, in welchem einige Wurzeln absolut gleich und grösser als die übrigen sind. Ebenso werden in den einfachsten und wichtigsten Fällen die Werthe der Fehler bei den einzelnen Näherungswerthen untersucht und dann daraufhin umgekehrt aus den Zeichen der auftretenden Determinanten Schlüsse auf die Zahl und Art der absolut grössten Wurzeln gezogen. Hierauf werden die Vorzeichen der Fehler in Betracht gezogen und damit einige Fragen in Angriff genommen, die bisher nur sehr ungenügend behandelt waren. Es folgt eine Angabe für die näherungsweise Berechnung der Coefficienten einer Gleichung, deren Wurzeln die $i$ grössten oder die $n-i$ kleinsten der gegebenen Gleichung sind; ebenso für diejenige von Ausdrücken, welche gegen einen der mittleren Wurzelwerthe convergiren, und endlich werden einige numerische Beispiele gegeben. No.

---

F. H. STOLL. Mathematisch-physikalische Miscellen. II. Pr. Bensheim.

Ueber eine Erweiterung der regula falsi und den Zusammenhang derselben mit der Newton'schen Näherungsmethode. Der Verfasser setzt zunächst die gewöhnlich „regula falsi" genannte Methode auseinander und zeigt dann, theils durch geometrische Betrachtung, theils auf analytischem Wege ihren Zusammenhang mit der Newton'schen Näherungsmethode. O.

---

H. Brocard. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 328-330.

In der algebraischen Gleichung $\varphi(x) = q$ seien alle Coefficienten, auch $q$, positive ganze Zahlen. Ist dann $t$ eine positive ganze Zahl und hat man

$$\varphi(t) < q, \quad \varphi(t+1) > q$$

und macht man

$$h = \frac{q - \varphi(t)}{\varphi(t+1) - \varphi(t)},$$

so wird $t + h$ ein angenäherter Werth von $x$ zwischen $t$ und $t + 1$ sein. Diese von Cardan gegebene Näherungsmethode wird besprochen. O.

---

H. Eggers. A new method of solving numerical equations. Analyst III. 149-150.

Wenn $x_0$ eine angenäherte Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist, so ist

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)\, f'(x_0)}{\{f'(x_0)\}^2 - f(x_0)\, f''(x_0)}$$

eine weitere Näherung. Diese Formel ist zuweilen schneller convergent als die Newton'sche. Glr. (O.)

---

J. König. Ein allgemeiner Ausdruck für die ihrem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel der Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades. Clebsch Ann. IX. 530-541.

Sind die Zeichen der Reihe

$$1, \cos\varphi, \cos 2\varphi, \cos 3\varphi, \ldots$$

bekannt, so kann daraus der Werth des Winkels $\varphi$ berechnet werden; bedeutet $w_n$ die Anzahl der Zeichenwechsel in den ersten $n$ Gliedern, so wird

$$\varphi = \pi \lim_{\infty} \left( \frac{w_n}{n} \right).$$

Entwickelt man nun $\frac{1}{f(x)}$ in eine recurrirende Reihe, wobei

$f(x)$ eine ganze, rationale Function $m^{\text{ten}}$ Grades bedeute, so nähert sich der Coefficient von $x^n$ der Grenze

$$M_1 . r_1^{-n} \cos(\eta_1 + n\omega_1),$$

wenn

$$r_1(\cos\omega_1 + i\sin\omega_1)$$

die dem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel von

$$f(x) = 0 \quad \text{und} \quad M_1(\cos\eta_1 + i\sin\eta_1)$$

einen von den Wurzeln abhängenden Ausdruck bedeutet. Der Werth von $\eta_1$ hat aber nur auf eine endliche Anzahl von Vorzeichen der Reihe

$$\cos(\eta_1),\ \cos(\eta_1 + \omega_1),\ \cos(\eta_1 + 2\omega_1),$$

Einfluss, und so hat man in jenen Vorzeichen gleichfalls ein Mittel, $\omega_1$ zu bestimmen. Es ist wie oben

$$\omega_1 = \pi \lim_{\infty} \left(\frac{w_n}{n}\right).$$

Für $r_1$ ist der Werth bekanntlich die Grenze der $n^{\text{ten}}$ Wurzel aus dem Coefficienten von $x^n$ in der Entwickelung des Bruches $1 : f(x)$.

No.

---

Peiffer. Die Geometrie als Hülfsmittel zur Auflösung höherer algebraischer Gleichungen. Pr. Siegen.

An verschiedenen Beispielen werden die bekannten Methoden erläutert, mit Hülfe geometrischer Darstellung der Function $y = f(x)$ die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zu ermitteln; es wird gezeigt, wie nach der Newton'schen Methode die Maxima und Minima gefunden werden, ferner wie nach Budan's Satz ein Merkmal über die Anzahl der innerhalb bestimmter Grenzen gelegenen reellen Wurzeln gewonnen wird, wie in vielen Fällen die Fourier'sche Methode zur vollständigen Analyse der Zahlengleichungen führt und von besonderer Wichtigkeit für die näherungsweise Berechnung der reellen Wurzeln transcendenter Gleichungen ist.

M.

---

L. Lalanne. Exposé d'une nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques de tous les degrés (troisième partie.) C. R. LXXXII. 1487-1490

Die Methode des Herrn Lalanne wurde F. d. M. VII. p. 42 besprochen. Die diesmalige Mittheilung enthält einen Bericht über die praktische Prüfung der Methode an mehreren Beispielen.

No.

---

F. Vallès. Des formes imaginaires en algèbre. Paris, Gauthier-Villars.

---

A. Zielinski. Solution of numerical equations of higher degrees with secondary (imaginary) roots. Analyst III. 52-55.

Sätze über die imaginären Wurzeln der Gleichung $n^{ten}$ Grades mit Beispielen.

Glr. (O.)

---

N. Bougaïeff. Numerische Gleichungen zweiten Grades. Mosc. Math. Samml. VIII. (Russisch.)

Fortsetzung der schon früher vom Verfasser in derselben Sammlung angestellten Untersuchungen (s. Bd. VII. p. 38).

P.

---

E. Isè. Nota di calcolo grafico sulla risoluzione delle equazioni di primo grado. Battaglini G. XIV. 181-190.

---

S. Levi. Quistioni. Battaglini G. XIV. 351-352.

Zwei specielle Gleichungen, die nur reelle Wurzeln besitzen sollen, werden angegeben.

Nr.

---

F. Hromádko. Ueber die quadratischen Gleichungen. Casopis V. (Böhmisch.)

Eine kurze Bemerkung über das Unendlichgrosswerden einer Wurzel einer quadratischen Gleichung und über den harmonischen Durchschnitt beider Wurzeln.

W.

---

F. J. BROCKMANN. Die quadratischen und höheren Gleichungen im Gymnasialunterrichte. Pr. Cleve.

Eine Zusammenstellung der gebräuchlichsten Auflösungsmethoden für die Gleichungen des 2ten und 3ten Grades. Von den Gleichungen höheren Grades werden nur solche berücksichtigt, welche sich durch geeignete Substitution auf den zweiten Grad reduciren lassen. Schl.

---

O. CHAKRAVARTI, N. LAI DEY. Solution of a question. Educ. Times XXVI. 97-98.

Lösung der Gleichungen

$$x(y+z^{-1}) = a, \quad y(z+x^{-1}) = b, \quad z(x+y^{-1}) = c$$

für den speciellen Fall, wo

$$1+a+ac = 0, \quad 1+c+bc = 0.$$

O.

---

F. H. STOLL. Mathematisch-physikalische Miscellen. II. Pr. Bensheim.

Zur Lösung der cubischen Gleichungen. Herr L. Matthiessen hat in seinem Buche: „Die algebraischen Methoden der Auflösung der litteralen quadratischen, cubischen und biquadratischen Gleichungen" p. 24 eine Methode zur Auflösung der allgemeinen cubischen Gleichung

$$x^3+px^2+qx+r = 0$$

mittels der Substitution $\frac{x-z}{x-z^2} = u$ gegeben. Dieselbe hat jedoch, ebenso wie die Cardanische Formel für den Fall einer negativen Discriminante, also für den Fall dreier reeller Wurzeln, den Uebelstand, dass dieselben in complexer Form erscheinen. Gelangt man also im Laufe der Rechnung zu einer negativen Discriminante, so muss man die Rechnung von vorn anfangen, um die gewöhnliche goniometrische Methode einzuschlagen. Diesen Uebelstand nun will der Verfasser durch seine Methode vermeiden. Er reproducirt zunächst die Herleitung von Matthiessen und giebt dann einen Weg an, um direct die auf Matthiessen'sche Weise gefundenen complexen Werthe durch die Substitution

$$z_1 = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z_2 = \varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi) \text{ und}$$
$$\varrho\cos\varphi + \tfrac{1}{3}p = R\cos\psi, \quad \varrho\sin\varphi = R\sin\psi$$

in reelle Form zu bringen. Dann giebt der Verfasser eine Methode um den casus irreducibilis zu lösen, indem er von der Formel

$$\operatorname{tg} 3\varphi = \frac{3\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}^3\varphi}{1 - 3\operatorname{tg}^2\varphi}$$

statt von $\cos 3\varphi$ ausgeht. O.

---

E. Liebrecht. Ueber kubische Gleichungen. Grunert Arch. LIX 217.

Ein arithmetisches Kriterium dafür, ob die Gleichung

$$x^3 + ax + b = 0$$

eine oder drei reelle Wurzeln hat. M.

---

A. G. Greenhill. Mechanical solution of a cubic by a quadrilateral linkage. Messenger (2) V. 162-163.

Bezieht sich auf die von Herrn St. Loup 1874 gegebene Lösung, siehe C. R. LXXIX. 1323-1324, F. d. M. VI. p 64.

Glr. (O).

---

J. J. Walker. Solution of a question (4600). Educ. Times XXVI. 48.

Aufstellung der Bedingungsgleichung für die Coefficienten einer cubischen Gleichung, damit die Wurzeln derselben Seiten eines Dreiecks sein können. O.

---

L. Tanner. Solution of a question (5029). Educ. Times XXVI. 49.

Hat $x^3 - 3px + q = 0$ nur eine reelle Wurzel $\alpha$, so ist $\alpha^2 > 4p$; sind dagegen alle drei Wurzeln reell, so muss eine numerisch kleiner sein als $2p^{\frac{1}{2}}$. O.

---

C. Moreau. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 186.

Ueber eine Gleichung dritten Grades. O.

---

HEILERMANN. Bemerkung zu der Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Schlömilch Z. XXI. 364-365.

In einer im Jahre 1855 erschienenen Programmabhandlung hat der Herr Verfasser eine Methode zur Zerlegung der quadratischen, cubischen und biquadratischen Functionen veröffentlicht, welche zur Auflösung der entsprechenden Gleichungen führt. Diese Methode wird hier für die biquadratischen Gleichungen noch einmal kurz angedeutet. Sie beruht darauf, dass die biquadratische Function

$$f(x) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4\partial xy^3 + ey^4$$

durch die Substitution

$$x = \alpha\xi + \beta\eta, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta$$

in eine quadratische Function der Variabeln $\xi^2$, $\eta^2$ verwandelt wird. M.

---

J. DIEKMANN. Zur Theorie der biquadratischen Gleichungen. Hoffmann Z. VII. 100-106.

Der Aufsatz schliesst sich an diejenige Lösungsweise an, nach welcher die 3 höchsten Terme zum Quadrat eines Trinoms ergänzt werden, während der Rest $-T^2x^2 - 2Rx - S^2$ durch die Bedingung $T^2S^2 = R^2$ als negatives Quadrat bestimmt wird. Es werden nun die 2 Fälle

$$T = R = 0; \quad S = R = 0$$

discutirt, in welchen die cubische Bedingungsgleichung nicht in Anwendung kommt, und zwar die Coefficienten der Urgleichung sogleich in deren 4 Wurzeln dargestellt. So ergiebt sich, dass die biquadratische Gleichung ohne Resolvente lösbar ist, wenn die Wurzeln arithmetisch oder geometrisch proportionirt, oder äquianharmonisch oder harmonisch zugeordnet sind. Die Bedingung in Coefficienten ausgedrückt lautet (nach Elimination des 5ten):

$$2\left(\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{b}{a}\frac{c}{a} + \frac{d}{a} = 0,$$

ist also durch $c$ und durch $d$ erfüllbar. H.

---

WEICHOLD. Nouvelle solution de l'équation générale du quatrième degré. C. R. LXXXII. 1093-1095, Mondes (2) XL. 282-283.

Mit einer geringen, nicht sehr vortheilhaften Aenderung ist es die Lagrange'sche Methode, welche vorgetragen wird.

No.

---

N. FITZ. Solution of the general biquadratic equation. Analyst III. 50-51.

Methode zur Lösung der Gleichungen $4^{ten}$ Grades.

Glr. (O.)

---

F. KLEIN. Weitere Untersuchungen über das Ikosaëder. Erl. Ber. 1876. Heft 9. 16-29.

Die Gleichung $12^{ten}$ Grades, auf welche das Ikosaëder führt (s. Jahrb. VII. p. 53), war mittelst einer Gleichung $5^{ten}$ Grades in quadratische Faktoren zu zerlegen, also mit deren Hülfe zu lösen. Der Verfasser beginnt nun mit dieser Note die umgekehrte Untersuchung, durch die Betrachtung der Ikosaëdergleichung die Auflösung der Gleichungen $5^{ten}$ Grades zu fördern.

Sei die Ikosaëdergleichung, in der kanonischen Form:

$$f(\eta) \equiv \eta(\eta^{10} + 11\eta^5 - 1) = 0,$$

$H$ deren Hesse'sche Form, $T$ die Functionaldeterminante von $f$ und $H$, so wird, als allgemeinste Covariante von $f$, die Gleichung $60^{ten}$ Grades:

$$\text{(I.)} \qquad 1728 \, . \, H^3(\eta) - x f^5(\eta) = 0$$

betrachtet, welche den willkürlichen Parameter $x$ enthält. Diese Gleichung definirt die *Ikosaëderfunction* $\eta$, eine Function von $x$, die hier als die fundamentale Irrationalität betrachtet wird. Durch irgend eine Wurzel von (I.) und durch $5^{te}$ Wurzeln der Einheit drücken sich die übrigen 59 Wurzeln rational und linear auf einfache Weise aus.

Die Darstellung von $\eta$ geschieht hier nach Schwarz mit Hülfe hypergeometrischer Reihen. Seien diese nämlich:

$$F_1 = F(\tfrac{11}{60}, -\tfrac{1}{60}, \tfrac{2}{3}, x),$$
$$F_2 = F(\tfrac{11}{60}, -\tfrac{1}{60}, \tfrac{1}{2}, 1-x),$$

so wird

$$\eta(x) = \frac{-1{,}785\ldots F_1 + 2{,}858\ldots F_2}{6{,}101\ldots F_1 - 5{,}658\ldots F_2}.$$

Die Function $\eta$ steht nun im Zusammenhang mit den von Kronecker und Brioschi studirten Resolventen $6^{ten}$ Grades der Gleichungen $5^{ten}$ Grades. Eine solche Resolvente, mit den 6 Wurzeln $z_i$, hat die Eigenschaft, dass die $\sqrt{z_i}$ lineare Functionen von 3 Parametern $A_0, A_1, A_2$ sind. Hier handelt es sich zunächst um die sogenannte specielle Resolvente, die linear in die Form übergeht:

$$\text{(II.)} \qquad z'^6 + 10z'^3 - 12\sqrt[3]{x}\,z' + 5 = 0,$$

und für welche zwischen den Parametern eine quadratische homogene Relation existirt: $A_0^2 + A_1 A_2 = 0$.

Die Auflösung von (II.) wird nämlich direct durch die von (I.) gegeben, indem die $\sqrt{z_i'}$ sich linear und homogen zusammensetzen aus den Ausdrücken:

$$\frac{\eta}{\sqrt[6]{-f(\eta)}}, \quad \frac{-1}{\sqrt[6]{-f(\eta)}}, \quad \frac{\eta^2}{\sqrt[6]{-f(\eta)}},$$

welches die Parameter $A_0, A_1, A_2$ sind. Man sieht das direct so ein: Die Beziehungen zwischen den $\sqrt{z_i}$ und den $A_0, A_1, A_2$ zeigen, dass alle 60 Werthe der Verhältnisse $A_0 : A_1 : A_2$ als lineare Combinationen der ursprünglichen $A_0, A_1, A_2$ erscheinen; so dass man ein geschlossenes System von 60 linearen Transformationen hat, die

$$A_0^2 + A_1 A_2 = 0$$

in sich überführen. Dies giebt für die Parameter

$$\eta = \frac{A_2}{A_0} = -\frac{A_0}{A_1}$$

eine endliche Gruppe von 60 linearen Transformationen, was nach dem früheren Aufsatze des Verfassers auf eine Ikosaëdergleichung für $\eta$ führt.

Diese geometrische Auffassung führt den Verfasser auch, was die Hauptsache ist, zur Behandlung der oben genannten allgemeinen Gleichung $6^{ten}$ Grades, für welche

$$A_0^2 + A_1 A_2$$

nicht gleich 0 ist. Es werden, geometrisch zu reden, dem Punkte $A_0:A_1:A_2$ die beiden Punkte des Kegelschnitts $A_0^2+A_1A_2=0$ zugeordnet, in welchen derselbe von der Polare des Punktes geschnitten wird. Die Parameter $\eta_1$, $\eta_2$ dieser beiden Schnittpunkte hängen von je einer Ikosaëdergleichung ab, deren Parameter $x_1$ und $x_2$ von den Coefficienten $A$, $B$, $C$ der gegebenen Gleichung durch eine quadratische Gleichung abhängen. Diese Gleichung wird hier explicite angegeben. Dabei müssen freilich noch die je 60 Wurzeln der beiden Gleichungen für $\eta_1$ und $\eta_2$ einander eindeutig zugeordnet werden, was hier nicht vollständig ausgeführt scheint. Dann aber ergeben sich $A_0$, $A_1$, $A_2$ und somit die Wurzeln der Gleichung 6^ten^ Grades unmittelbar.

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass alle in diese Entwickelungen eingehenden ganzen Functionen von $A_0$, $A_1$, $A_2$, die bei den 60 Substitutionen unverändert bleiben, sich auch als simultane Invarianten der Ikosaëderform $f$ und der quadratischen Form (von den Wurzeln $\eta_1$, $\eta_2$)

$$A_1\eta^2+2A_0\eta-A_2$$

auffassen lassen und ganze Functionen der 3 Coefficienten $A$, $B$, $C$ der Gleichung 6^ten^ Grades und einer vierten Invariante $D$ werden.

Nr.

---

A. v. d. Schulenburg. Solution of the general equation of the fifth degree. Analyst. III. 141-148. 173-178.

Uebersetzung der Arbeit: „Die Auflösung der Gleichungen fünften Grades, Halle, Schmidt 1861" durch Herrn A. B. Nelson, ohne Kritik.

Glr. (O.)

---

## Capitel 2.

## Theorie der Formen.

F. Faà de Bruno. Théorie des formes binaires. Turin, Librairie Brero Succ. de P. Marietti. 1876.

Zur Einführung in das weite Gebiet der invarianten-theoretischen Forschungen, die in rascher Entwickelung jetzt schon alle

Zweige der Mathematik durchdringen, hat bisher nur das Salmon'sche Werk „Algebra der linearen Transformationen" (übersetzt von Fiedler) dienen können. Auch dieses ist mehr Hand- als Lehrbuch und wird vom Anfänger mit Vortheil nur in Verbindung mit den Fiedler'schen „Elementen der neueren Geometrie" benutzt werden.

Die hiernach bestehende Lücke sucht das vorliegende Lehrbuch auszufüllen. Dem Salmon'schen Buche gegenüber ist es viel elementarer gehalten, indem es sich darauf beschränkt, den Leser nur bis zu den Originalarbeiten hinzugeleiten. Freilich setzt es auf der anderen Seite wieder die Theorie der Determinanten voraus. Der Inhalt ist die Theorie der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung und der wesentlichsten Eigenschaften der Invarianten und Covarianten. Wir bezeichnen den Inhalt der einzelnen Kapitel genauer:

In Kapitel 1 werden neben den einfacheren Eigenschaften der symmetrischen Functionen die partiellen Differentialgleichungen (von Brioschi und Cayley aufgestellt) mitgetheilt, welchen die Functionen genügen und welche erlauben, ihren Ausdruck in den Coefficienten der Form nach zu bilden. Dieser Methode werden am Schlusse des Buches Tafeln der symmetrischen Functionen bis zur Ordnung 11 incl. angehängt. Auch die Borchardt'sche Darstellung durch die „erzeugende Function" wird wiedergegeben.

Kapitel 2 und 3 über die „Resultanten" und „Discriminanten" sind etwas knapp gehalten, wohl desshalb, weil der Verfasser in einem früheren Buche diese Theorie auseinandergesetzt hatte. Auch wird es bei einigen dieser Sätze, wie bei (50), p. 93 (auch nach Correctur des Druckfehlers) für den Anfänger nicht leicht sein, zu verstehen, ob die Theoreme für 2 Gleichungen von gleichem Grade oder auch für solche von ungleichem Grade gelten sollen.

Kapitel 4 enthält die Ueberführung der Formen ungraden Grades und vom Grade 4 und 8 in die kanonische Form, die Summe von Potenzen.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit den Invarianten, hauptsächlich nach den Methoden und auch nach der Bezeichnungsweise der

Engländer. Zunächst werden die Eigenschaften in Bezug auf die Coefficienten der Form abgeleitet, die partiellen Differentialgleichungen, die Berechnung der Zahlencoefficienten der Invariante bei gegebener Gestalt derselben. Sodann die analogen Eigenschaften der Invarianten in Bezug auf die Wurzeln der Form. Am Schlusse des Buches finden sich auch noch Tafeln der Invarianten der Formen $2^{ten}$ bis $5^{ten}$ Grades, in den Ausdrücken durch die Wurzeln sowohl als durch die Coefficienten.

Kapitel 6 handelt ähnlich von den Covarianten und giebt weiter auch die directere Aufstellung einer Reihe solcher durch verschiedene Operationen, wie Polarenbildung (Emananten) etc.; als Beispiel die Aufstellung der kanonischen Form der Formen graden Grades. Von den Anwendungen erwähnen wir weiter die Lösungen der Gleichungen $3^{ten}$ und $4^{ten}$ Grades; aber zu diesen dem Anfänger doch interessantesten Anwendungen ist zu bemerken, dass die Durchführung der Lösung für die Gleichung $3^{ten}$ Grades nicht gegeben, vielmehr mit einem Citat auf Cayley erledigt wird (No. 136), und dass auch für die Lösung der Gleichung $4^{ten}$ Grades in der Form (23) No. 138 auf den nothwendigen Zusammenhang zwischen den Vorzeichen der 3 Quadratwurzeln nicht ausdrücklich aufmerksam gemacht wird.

Kapitel 7 enthält speciellere Untersuchungen: die Hermite'sche Theorie der associirten Formen, ferner das von Hermite gegebene Gesetz der Reciprocität, nach welchem jeder Covariante $r^{ter}$ Ordnung (in den Coefficienten) von einer Form $n^{ten}$ Grades eine Covariante $r^{ter}$ Ordnung von einer Form $r^{ten}$ Grades entspricht; weiter ein Beispiel einer typischen Darstellung, derjenigen der Form $5^{ten}$ Grades durch Einführung zweier linearer Covarianten; und endlich Einiges über die Tschirnhausen'sche Transformation.

Am Schlusse ist noch eine Einführung in die symbolische Darstellungsweise, die nach den Arbeiten von Clebsch und Gordan sich als die angemessenste gezeigt hat, gegeben. Vielleicht würde das wichtige Gesetz der Reciprocität des Kapitel 7 bei einer Anwendung dieser Darstellungsweise klarer hervorgetreten sein.

Wenn somit, wie diese Inhaltsangabe zeigt, auch einige Lücken vorhanden sind, so ist doch das Buch, bei dem methodisch

geordneten und fast überall sehr klar dargestellten Stoff, auch bei uns zu einer Einführung in die Disciplin der neueren Algebra sehr wohl geeignet, insbesondere auch für das Selbststudium. Für eine Uebersetzung wäre aber zu wünschen, dass die Kapitel 2 und 3, etwa auf Kosten des ersten Kapitels, weiter ausgeführt würden. Es ist noch zu bemerken, dass die Brauchbarkeit des Buches in einem demselben vorangedruckten Briefe von H. Gordan anerkannt wird.

(Ein Referat über das Buch findet sich auch in Darboux Bull. X. 166.) Nr.

---

C. Jordan. Mémoire sur les covariants des formes binaires. Liouville J. (3) II. 177-233.

C. Jordan. Covariants des formes binaires. C. R. LXXXII. 269-270.

Herr Jordan giebt, in Ausführung der im 7. Band des Jahrbuchs, p. 58 erwähnten Note, die ausführliche Darstellung zunächst der symbolischen Rechnungsmethode in der Formentheorie, sodann des von Gordan gegebenen Beweises der Endlichkeit des den binären Formen zugehörigen Systems. Die letztere Darstellung geschieht auf Grundlage von Gordan's früheren Arbeiten, nicht nach dessen neueren Entwickelungen (s. F. d. M. VII. p. 50). Die Absicht ist, das System von Grundformen, das zu einer binären Form gehört, enger zu begrenzen. Zu diesem Zwecke werden die bei Gordan auftretenden Relationen, welche zwischen den Formen dritter Ordnung (in den Coefficienten) existiren, sowie dessen Zahlengleichungen einer specielleren Discussion unterworfen, was den Verfasser zu gewissen oberen Grenzen für Grad und Ordnung der Grundformen führt. Nr.

---

E. Bertini. Sistema simultaneo di due forme biquadratiche binarie. Battaglini G. XIV. 1-14.

Das simultane vollständige System zweier binärer biquadratischer Formen wird nach den in Clebsch's „Binäre Formen“

mitgetheilten Methoden aufgestellt. Es ergeben sich, wie schon von Gordan, (Clebsch Ann. II.) gezeigt ist, ausser den Systemen der beiden einzelnen Formen, noch 20 simultane Formen, nämlich 4 Invarianten, 8 quadratische Covarianten, 4 biquadratische und 4 vom $6^{ten}$ Grade, im Ganzen also 30 Formen, wovon indess einige möglicherweise überflüssig sind. Nr.

---

G. Battaglini. Nota sulla quintica binaria. Battaglini G. XIV. 54-66.

Eine eingehende geometrische Interpretation des Systems der binären Form $5^{ten}$ Grades, indem die bekannte geometrische Bedeutung des Systems der Formen niedrigeren Grades auf die Polaren jener Form angewandt wird. Nr.

---

L. Wedekind. Studien im binären Werthgebiet. Habilitationsschrift. Carlsruhe.

Es werden dreierlei Gegenstände behandelt. Zuerst wird der Begriff des Doppelverhältnisses von 4 auf einer reellen Fläche $2^{ten}$ Grades gelegenen Punkten (siehe F. d. M. VII. p. 57) analytisch entwickelt in den Ausdruck

$$\frac{12(a_\xi a_\eta b_\zeta b_\vartheta - a_\xi a_\zeta b_\eta b_\vartheta - a_\xi a_\vartheta b_\eta b_\zeta) + i(\xi\eta\zeta\vartheta)\sqrt{-6(abcd)^2}}{24 a_\xi a_\vartheta b_\eta b_\zeta},$$

wo $a_x^2 \equiv b_x^2 = 0$ die Gleichung der gegebenen Fläche, $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\vartheta$ die 4 betreffenden Punkte derselben sind. Derselbe wird mit den projectivischen Massrelationen zwischen einem diese Punkte verbindenden Geradenpaare, wie sie von anderer Seite gegeben sind, verglichen.

Sodann werden geometrische Betrachtungen über solche Punktgruppen, insbesondere über die Construction eines das Doppelverhältniss darstellenden Punktes und der Hesse'schen Covariante gegeben.

Endlich wird die Bedeutung verschiedener Covarianten einer binären Form $f$ untersucht. Der Weg ist der einer directen Betrachtung der bezüglichen Coefficientenrelationen. Die behandelten

Fälle sind: 1) $H(\equiv(ff)^2)\equiv 0$; 2) $H$ besteht aus einem einzigen Term; 3) $(ff)^4\equiv 0$. Das letztere sagt im Allgemeinen aus, dass die binäre Form $n^{ten}$ Grades einen $(n-1)$-fachen Factor hat; und ausserdem werden die drei bekannten Ausnahmefälle, die Formen $4^{ten}$, $6^{ten}$ und $12^{ten}$ Grades, welche durch die regulären Körper dargestellt werden können, wiedergefunden (vgl. das Referat über Klein's Arbeit, F. d. M. VII. p. 53). Nr.

---

A. Clebsch. Sulla teoria delle forme binarie del sesto ordine e la trisezione delle funzione ipperellittiche. Brioschi Ann. 2) VII. 247-258.

Fortsetzung der F. d. M. VII. 59 angezeigten Uebersetzung. Nr.

---

Waschtschenko-Zachartschenko. Theorie der binären Formen. Nachr. v. Kiew. 1876-1877. (Russisch.)

Fortsetzung der von demselben Verfasser in derselben Sammlung (1875-1876) veröffentlichten „Theorie der Determinanten." P.

---

M. A. Baraniecki. Geometrische Folgerungen aus der algebraischen Theorie der binären quadratischen Formen. Denkschr. d. P. G. VIII. (Polnisch.)

Eine kurze Darstellung bekannter Eigenschaften dieser Formen. Dn.

---

E. Bonsdorff. Harledning och geometrisk tydning af de vigtigaste kombinanterna i det ternära kubiska systemet. Helsingfors. 8.

Die Theorie der ternären cubischen Formen hat bekanntlich in der letzten Zeit, hauptsächlich durch Arbeiten deutscher Mathematiker bedeutende Fortschritte gemacht. Herr Aronhold zeigte

zeigte in der classischen Abhandlung, Crelle J. LV. 1858, dass alle zu einer solchen Grundform gehörigen abgeleiteten Formen mit Invarianten-Eigenschaft (die Covarianten, Contravarianten und Zwischenformen mit einbegriffen) ein in sich abgeschlossenes System bilden und dass es im Ganzen nur 34 solche unabhängige Invarianten giebt, durch welche sich alle übrigen algebraisch ausdrücken lassen. Später haben Clebsch und Gordan (in Clebsch Ann. I. 56 und VI. 436) zusammen werthvolle Arbeiten über diesen Gegenstand geliefert, worin auch die Combinanten der ternären cubischen Formen untersucht werden. Neulich hat Gundelfinger (Clebsch Ann. VIII. 136) sich mit der geometrischen Deutung dieser Combinanten beschäftigt. Die gegenwärtige Abhandlung des Herrn Bonsdorff ist hauptsächlich eine Bearbeitung der beiden letztgenannten Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf den im Titel angegebenen Zweck. Die von Herrn Lindemann herausgegebenen Vorlesungen über Geometrie von Clebsch scheinen dem Verfasser damals nicht bekannt gewesen zu sein.

Die in Rede stehende Abhandlung zerfällt in drei Theile. Im ersten werden einige (im Ganzen 15) zum ternären cubischen System gehörige Formen, welche später in Anwendung kommen, abgeleitet und ihr Bildungsgesetz näher untersucht. Der zweite Theil enthält einige allgemeine Sätze über Combinanten und behandelt eingehender den speciellen Fall, wo das System, auf welches die Combinante sich bezieht, aus zwei Formen besteht, nämlich aus der Grundform ($f$) und ihrer Hesse'schen Covariante ($\Delta$). Zur Auffindung solcher Combinanten werden zwei Methoden angegeben, und einige von diesen Bildungen werden in ihrer Beziehung zu den früher betrachteten Invarianten untersucht. Im dritten Theil beschäftigt der Verfasser sich mit der geometrischen Deutung der ternären cubischen Formen. Da die Grundform selbst, gleich Null gesetzt, die allgemeine Gleichung einer Curve dritter Ordnung giebt, so ist jede Invariante als der analytische Ausdruck einer Eigenschaft anzusehen, welche der Curve wesentlich, d. h. unabhängig vom Coordinatensystem, angehört. Alle Curven dritter Ordnung, welche dieselben neun Wendepunkte be-

sitzen, bilden einen sogenannten syzygetischen Büschel, welcher durch die Gleichung $nf + \lambda\Delta = 0$, wo $n$ und $\lambda$ unbestimmte Parameter sind, allgemein dargestellt wird. Auf solche Büschel beziehen sich die von Herrn Bonsdorff betrachteten Combinanten. Bei Untersuchungen dieser Art hat man sich gewöhnlich der vereinfachten sogenannten kanonischen Form bedient, auf welche wie Hesse und Cayley gezeigt haben, die Gleichung dritten Grades durch geeignete Wahl von Coordinaten sich immer zurückführen lässt. Statt dessen zieht Herr Bonsdorff es vor, die aus der allgemeinen Form abgeleiteten Bildungen unmittelbar zu discutiren. Von den hier gegebenen Deutungen waren die meisten schon früher bekannt; nur einige neue sind hinzugefügt worden; die so gefundenen geometrischen Sätze sind aber zu complicirt, um wirkliches Interesse darzubieten.

Lf.

---

J. Tannery. Sur les substitutions linéaires par lesquelles une forme quadratique ternaire se reproduit elle-même. Darboux Bull. XI. 221-233.

Die von Herrn Hermite gegebenen, zum Theil nur a posteriori bewiesenen Resultate werden im Zusammenhange analytisch abgeleitet. Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit der Aufstellung der Form der Substitutionen selbst, der zweite mit der Aufeinandersetzung zweier derartiger Substitutionen. No.

---

B. Igel. Ueber die Discriminante der Jacobi'schen Covariante dreier ternären quadratischen Formen. Wien Ber. LXXIV.

Es wird der Factor, um den sich diese Discriminante von der Resultante der drei quadratischen Formen unterscheidet, ausgerechnet, was zu einem lange bekannten Resultate führt.

Nr.

F. Brioschi. Studi analitici sulle curve del quarto ordine. Brioschi Ann. (2) VII. 202-216.

An die früheren Arbeiten anschliessend, hat diese den Zweck, die Covarianten einer ternären biquadratischen Form

$$ax_3^4 + 6\gamma x_3^2 + 4\beta x_3 + \alpha$$

auszudrücken als ganze Functionen von $x_3$, deren Coefficienten ganze Functionen von $\alpha$ und dem simultanen System der binären Formen $\alpha, \beta, \gamma$ vom Grade 4, 3, 2 sind. Zunächst für $\beta \equiv 0$, wobei die Aufsuchung der Doppeltangenten auf Gleichungen $4^{\text{ten}}$ und $3^{\text{ten}}$ Grades zurückkommt. Nach der noch zu erwartenden Fortsetzung der Arbeit wird eingehender darüber referirt werden.

Nr.

---

F. Brioschi. Sulle condizione che devono essere verificate dai parametri di una curva del 4° ordine perchè la medesima sia una conica ripetato. Acc. R. d. L. (2) III. 91-92.

Nr.

---

P. Gordan. Ueber einen Satz von Hesse. Erl. Ber. 1876. 89-95.

M. Nöther. Ueber die algebraischen Formen mit identisch verschwindender Hesse'scher Determinante. Erl. Ber. 1876. 51-56.

P. Gordan und M. Nöther. Ueber die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet. Clebsch Ann X. 547-568.

Die Bedeutung des Verschwindens der Hesse'schen Determinante war bisher nur in den einfachsten Fällen festgestellt worden, und noch existirte keine Methode, um die von Hesse aufgestellte Behauptung: „Beim identischen Verschwinden jener Determinante lasse sich die Form von $n$ Variabeln linear in eine solche von weniger Variabeln transformiren“ zu untersuchen (vgl. F. d. M. VII. p. 79).

In der ersten der genannten Arbeiten wird nun hauptsächlich durch Betrachtung des Verhaltens der Determinante einer

reducibeln Form in Bezug auf deren Factoren und der zwischen den Polaren bestehenden Relation — auf einem etwas weitläufigen Wege der Satz für alle ternären Formen als richtig erwiesen.

In der letzten Arbeit, von der die zweite Note ein Auszug ist, wird dagegen die allgemeinste Frage gestellt und mit neuen Methoden behandelt. Das Resultat ist, dass der Satz wohl für die ternären und quaternären, nicht aber für die Formen von mehr als $n$ Variabeln gültig ist; dass vielmehr für diese höheren Fälle ganze Klassen von Formen mit verschwindender Hesse'scher Covariante existiren, ohne dass zwischen ihren Polaren lineare Relationen stattfinden.

Die Methode der Untersuchung besteht aus mehreren Schritten. Es werden lineare partielle Differentialgleichungen untersucht, deren Coefficienten erst selbst wieder durch ein System solcher definirt werden. Um sodann die rationalen ganzen Lösungen derselben zu finden, werden Betrachtungen angestellt über rationale Transformationen bei mehreren Variabeln, die aber unbestimmter Art sind, nämlich mit identisch verschwindender Substitutionsdeterminante.

Für die ternären Formen genügt hier übrigens schon der erste Schritt, und für diese liegt der Beweis in folgendem Schluss: Es seien $\Delta$ die Hesse'sche Determinante von $f(x_1, x_2, x_3)$, $\Delta_{ik}$ die ersten Unterdeterminanten von $\Delta$, und $\Delta_{ik}$ nicht $= 0$, so hat man für $\Delta = 0$ zunächst:

$$\Delta_{ik} = \varrho\, h_i\, h_k,$$

$$\Sigma\, h_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Für diese Grössen $h_i$ $(x_1, x_2, x_3)$ wird die Gleichung

$$h_i\ (h_1, h_2, h_3) \equiv 0$$

aufgestellt, die aber nicht für variable $h_i$ bestehen kann, da die $h_i$ keinen Factor gemein haben sollen. Daher sind die $h_i$ constant, was der Satz Hesse's ist.

Es werden alle quinären Formen mit $\Delta = 0$ aufgestellt; die Formen von mehr als 5 Variabeln nur für den Fall, dass die entsprechenden $h_i$ ein einfach unendliches Gebiet füllen. Nr.

F. Brioschi. Sulle condizioni per la decomposizione di una cubica in una conica ed in una retta. Acc. R. d. L. (2) III. 89-90.

Aus der Gleichungsform

$$x_3^3 - 4ux_3 + 2v = 0$$

werden die beiden Bedingungen des Zerfallens der Curve 3ter Ordnung in Gerade und Kegelschnitt, ausgedrückt in simultanen Invarianten von $u$ und $v$, hergeleitet. Nr.

---

F. Brioschi. Sopra una proprietà dei piani tritangenti ad una superficie cubica. Acc. R. d. L. (2) III. 257-259.

Wie sich nach Clebsch (Crelle LIX) die Doppeltangenten einer Curve 4ter Ordnung als gemeinsame Tangenten zweier Curven 10ter Klasse ausdrücken, so werden hier die dreifachen Tangentenebenen einer cubischen Fläche als gemeinsame Tangentenebenen dreier bestimmter Flächen 10ter Klasse angegeben, wieder mittelst der speciellen Gleichungsform. Nr.

---

C. F. E. Björling. Om simultana covarianter af 4de ordningen och af 4de klassen till tvo kagelsnitt. Ovf. Stockh. 1876. 21-27.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2. C.

---

A. Cayley. On the analytical forms called factions. Rep. Brit. Ass. 1875.

„Faction" ist ein Product von Differenzen, in denen jeder Buchstabe gleich oft vorkommt. In einer „Quadrifaction" kommt jeder Buchstabe 2 Mal, in einer „Cubicfaction" 3 Mal u. s. f. vor. Eine gebrochene Faction ist ein Product von Factionen, die keine gemeinsamen Buchstaben haben; also

$$(a-b)^2 (c-d)(d-e)(c-e)$$

ist eine gebrochene Faction, nämlich das Product der Quadrifactionen

$$(a-b)^2 \quad \text{und} \quad (c-d)(d-e)(c-e).$$

Für die Quadrifactionen besteht der Satz, dass jede Quadrifaction eine Summe von gebrochenen Quadrifactionen ist dergestalt, dass jede zusammensetzende Quadrifaction 2 oder auch 3 Buchstaben enthält. Man hat daher die Identität

$$2(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$$
$$= (b-c)^2(a-d)^2 + (c-a)^2(b-d)^2 + (a-b)^2(c-d)^2,$$

welche den Satz für den Fall von 4 Buchstaben verificirt.

Die Theorie steht in Zusammenhang mit der der Invarianten eines Systems binärer Formen. Csy. (O.)

---

## Capitel 3.

# Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

N. L. Cauchy. Mémoire sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques. Nouv. Ann. (2) XV. 385-396, 433-451.

Eine Besprechung dieses Wiederabdrucks der Cauchy'schen Arbeit an dieser Stelle erscheint dem Referenten unangebracht. No.

---

G. Darboux. Sur la théorie de l'élimination entre deux équations à une inconnue. Darboux Bull. X. 56-64.

Einfacher und strenger Beweis der nothwendigen und ausreichenden Bedingung für die Gemeinsamkeit von $p$ Wurzeln für zwei Gleichungen mit einer Unbekannten, gestützt auf das Lemma: Wird bei einem System von $n$ homogenen linearen Gleichungen zwischen $n$ Unbekannten die Determinante nebst allen Minoren bis zur Ordnung $p$ ausschliesslich Null, so giebt es stets eine Lösung, in der $p-1$ beliebig gewählte Unbekannte Null sind, ohne dass alle andern es gleichfalls seien. No.

---

G. Bardelli. Alcune proprietà dei coefficienti di una sostituzione ortogonale. Rend. d. Ist. Lomb. (2) IX. 167-174.

Die Elemente einer orthogonalen Substitution werden als Functionen einer unabhängigen Veränderlichen angesehen. Es wird nun die Determinante aus den ersten, respective den zweiten Ableitungen jener Coefficienten betrachtet und von diesen Determinanten werden einige Eigenschaften abgeleitet, wie z. B. dass die Determinante aus den ersten Ableitungen für eine ungrade Anzahl von Elementen verschwindet, für eine grade ein Quadrat wird. No.

---

A. Capelli. Intorno ai valori di una funzione lineare di più variabili. Battaglini G. XIV. 141-146.

Bildet man die symmetrische lineare Function $V$ der Functionen

$$X_0, X_1, X_2, \dots X_\mu,$$

welche aus

$$X_0 = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

durch Anwendung einer Gruppe von Substitutionen

$$1, S_0, S_2, \dots S_\mu$$

entstehen, so ist $V$ in allen $x$ dann und nur dann symmetrisch, wenn die Gruppe transitiv ist. No.

---

W. Veltmann. Ueber eine besondere Art von successiven linearen Substitutionen. Grunert Arch. LVIII. 342-353.

Entstehen $x_n$ und $y_n$ aus $x_{n-1}$ und $y_{n-1}$ durch die Substitutionen

$$x_n = ax_{n-1} + by_{n-1}, \quad y_n = \alpha x_{n-1} + \beta y_{n-1},$$

wo $a, b, \alpha, \beta$ von $n$ unabhängig sind, so kann man $x_n$, $y_n$ als Functionen jener vier Constanten ausdrücken. Der Herr Verfasser findet die Ausdrücke dadurch, dass er zwischen $x_\lambda$ und $x_{\lambda+1}$ eine Reihe von $m$ Zwischengliedern einschiebt und neue Werthe $a', b', \alpha', \beta'$ der Art bestimmt, dass jedes folgende Paar $x, y$ durch Substitutionen mit diesen Constanten aus dem vorhergehen-

den entsteht, und dass beide Reihen für ganzzahlige Indices gleiche $x, y$ geben. Wächst dann $m$ in's Unendliche, so liefert die Integration der entstehenden Differentialgleichung die Werthe für $x_n, y_n$. No.

---

A. CAPELLI. Dimostrazione di due proprietà numeriche offerte delle sostituzioni ed osservazioni sopra le sostituzioni permutabili con una sostituzione data. Battaglini G. XIV. 66-75.

Ist

$$n = m_1 n_1 + m_2 n_2 + \cdots + m_\omega n_\omega$$

und

$$M = m_1!\, m_2! \ldots m_\omega!\, n_1^{m_1} . n_2^{m_2} \ldots n_\omega^{m_\omega},$$

so ist $n!$ durch $M.\varphi(\mu)$ theilbar, wenn $\mu$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $n_1, n_2, \ldots n_\omega$ ist. No.

---

F. J. STUDNIČKA. Ueber den Ursprung und die Entwickelung der Determinantenlehre. Casopis V. (Böhmisch).

Der Verfasser giebt eine erschöpfende Uebersicht aller Arbeiten, die zur Schöpfung und Umbildung dieser Theorie beigetragen, von den symbolische Aggregaten angefangen, deren in dem Briefwechsel zwischen Leibniz und De l'Hospital Erwähnung geschieht, bis auf die neuere Zeit. W.

---

E. J. MELLBERG. Theorie för Determinant-Kalkylen. Helsingfors. 8.

Der Verfasser beginnt mit einer geschichtlichen Einleitung (nicht weniger als 50 Seiten umfassend), und giebt darin zahlreiche Auszüge aus den Arbeiten von Leibniz, Cramer, Bezout, Vandermonde, Laplace, Lagrange, Gauss und Cauchy, um den Antheil, welcher einem jeden von diesen Geometern in der Begründung der Determinanten-Rechnung zukommt, hervortreten zu lassen. Im Uebrigen enthält die Abhandlung eine ganz elementare

Darstellung der Lehre von den Determinanten und ihren gewöhnlichen Anwendungen, wobei als Ausgangspunkt die Betrachtung der alternirenden Functionen benutzt wird. Leider lässt sie in Bezug auf Genauigkeit der Beweise manches zu wünschen übrig, wodurch der Werth, den sie sonst für das elementare Studium haben könnte, vermindert wird. Lf.

---

P. Mansion. Introduction à la théorie des déterminants à l'usage des établissements d'instruction moyens. Gand. Hoste. Mons. Marceaux 8.

Ganz elementare Einleitung, die nur die Theorie der Determinanten mit 2 oder 3 Zeilen enthält, ohne Benutzung der Theorie der Permutationen. Diese rein methodische Schrift ist den Jahrgängen 1875 und 1876 der Revue de l'instruction publique en Belgique entnommen, wo der Verfasser bei Gelegenheit der Schriften von Hesse, Studnicka, Dölp, Reidt, Diekmann und Hattendorff seine Ansichten über den Unterricht der Theorie der Determinanten auseinandergesetzt hatte. Mn. (O.)

---

J. Diekmann. Einleitung in die Lehre von den Determinanten und ihrer Anwendung auf dem Gebiete der niedern Mathematik. Essen. Baedeker.

Diese zum Gebrauche an Mittelschulen bestimmte Schrift unterscheidet sich von ähnlichen vornehmlich durch den Abschnitt über höhere Gleichungen, in welchem einige Sätze der Theorie der Invarianten und Covarianten elementar abgeleitet sind, um sie zur Auflösung der Gleichungen 2., 3. und 4. Grades zu benutzen. Ausserdem verdient Erwähnung die Auflösung einiger quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten mit Hülfe der Determinanten. St.

---

M. Falk. Lärobok i Determinant teoriens första grunder för högne laroanstalter och till yelfstudium utasbetact. Upsala. W. Schultz.

Enthält eine Darstellung der elementaren Sätze der Determinantentheorie, nebst einer ziemlich reichen Sammlung von Exempeln. M. L.

---

D. KEMPER. Determinants. Analyst III. 17-24.

Zusammenstellung der elementaren Sätze über Determinanten. Die Ableitung ist die gebräuchliche. Glr. (O.)

---

F. CASORATI. Sui determinanti di funzioni. Rend. d. Ist. Lomb. (2) VIII.

Umformungen von Determinanten. So die der Functionaldeterminante von Functionen, die einen Factor gemein haben, in die Form

$$K = \Sigma \pm \Phi_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_n},$$

wobei die Bedeutung von $K \equiv 0$, nämlich dass die zwischen den $\Phi$ bestehende Relation homogen ist, behandelt wird. Ebenso die Aufstellung der Hesse'schen Determinante $H(\xi)$ einer Function

$$\varphi(\xi) \equiv f(x_1 x_2, \dots x_n),$$

wo die $x_i$ linear von weniger als $n$ Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\nu$ abhängen. Nr.

---

J. W. L. GLAISHER. Theorem relating to the differentiation of a symmetrical determinant. Quart. J. XIV. 245-248.

Bezeichnen wir mit $\varDelta$ die symmetrische Determinante

$$| \varepsilon_{\lambda\mu}\, a_{\lambda\mu} |,$$

wo $\varepsilon_{\lambda\mu} = 2$ oder $= 1$ sein soll, je nachdem $\lambda = \mu$ oder $\lambda \gtrless \mu$ ist; setzen wir ferner

$$u = 1 : \sqrt{\varDelta},$$

so ist

$$\frac{d}{da_{\alpha\beta}} \frac{d}{da_{\gamma\delta}} \frac{d}{da_{\varepsilon\zeta}} \cdots u = \frac{d}{da_{\alpha'\beta'}} \frac{d}{da_{\gamma'\delta'}} \frac{d}{da_{\varepsilon'\zeta'}} \cdots u,$$

für jede beliebige Permutation $\alpha', \beta', \dots$ der gleichen oder un-

gleichen Indices $\alpha, \beta, \ldots$. Der Beweis dieses Satzes wird durch die Differentiation eines vielfachen Integrales geführt, dessen Werth

$$\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$$

ist. Am Schluss wird auf andere Sätze aufmerksam gemacht, deren Beweis in derselben Art geliefert werden kann; solche sind z. B.

$$a^{2n+1} \cdot \left(\frac{d}{da}\right)^{2n} \cdot e^{a^2} = (2a^3)^n \cdot \left(\frac{d}{da}\right)^n \cdot (ae^{a^2});$$

$$b^{2n} \cdot \left(\frac{d}{db}\, b\right)^{2n} \cdot e^{a^2 b^2} = \left(\frac{1}{2a}\right)^n \cdot \left(\frac{d}{da}\right)^n \cdot \left[a^{2n} \cdot \left(\frac{d}{da}\right)^{2n} e^{a^2 b^2}\right].$$

No.

---

W. Spottiswoode. On determinants of alternate numbers. Proc. L M. S. VII. 100-112.

Sowie mit Hülfe der alternirenden Zahlen eine Determinante $n^{\text{ten}}$ Grades mit gewöhnlichen Zahlen als ein Product von $n$ linearen Factoren dargestellt werden kann (vgl. Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme p. 121), so lässt sich auch eine Determinante mit alternirenden Zahlen in $n$ lineare Factoren zerlegen, und zwar in doppelter Art, indem diese Factoren sowohl aus den Elementen der Zeilen, als auch aus denen der Colonnen gebildet sein können. In der vorliegenden Abhandlung, zum Theil aus Mittheilungen des Herrn Clifford bestehend, werden noch untersucht die Multiplication von Determinanten der genannten Art und die Partialdeterminanten des adjungirten Systems. St.

---

F. Hoza. Ueber das Multiplicationstheorem zweier Determinanten $n^{\text{ten}}$ Grades. Grunert Arch. LIX. 403-406.

Die Richtigkeit des Satzes wird durch Zerlegung und Summation der $n^n$ Theildeterminanten des Products bewiesen.

No.

---

S. GÜNTHER. Das allgemeine Zerlegungsproblem der Determinanten. Grunert Arch. LIX. 130-146.

Neue Methode, die Laplace'sche Zerlegung einer Determinante aufzustellen, nebst einer Regel, die Zeichen der Partialproducte zu finden. Die Glieder dieser Formel werden nach einem zweifachen Typus angeschrieben, was weder in pädagogischer noch in practischer Beziehung gegenüber dem bisher üblichen Verfahren von Vortheil sein dürfte. St.

---

F. HOZA. Ueber Unterdeterminanten einer adjungirten Determinante. Grunert Arch. LIX. 401-403.

Der Herr Verfasser will den Borchardt'schen Beweis für den bekannten Jacobi'schen Satz, auf eine Art reproduciren, die Anfängern besser entsprechen dürfte. Referent kann keinen Unterschied zwischen Original und Reproduction entdecken. No.

---

F. HOZA. Beitrag zur Theorie der Unterdeterminanten. Grunert Arch. LIX. 387-401.

Die ganze Abhandlung, welche „eine wesentliche Vervollständigung der Laplace'schen Zerlegungsformel" sein soll, erledigt sich durch die Bemerkung, dass man in Determinanten mit Berücksichtigung des Zeichens die Colonnen vertauschen kann.
No.

---

K. WEIHRAUCH. Zur Construction einer unimodularen Determinante. Schlömilch Z. XXI. 134-137.

Von einer Determinante sind als die Elemente der ersten Colonne ganze, positive oder negative Zahlen gegeben, deren grösster gemeinsamer Theiler die Einheit ist. Die übrigen Elemente der Determinante sollen so bestimmt werden, dass sie ganzzahlig sind, und der Werth der Determinante gleich 1 wird. Herr Hermite hatte eine Lösung dieser Aufgabe gegeben; Herr Weih-

rauch giebt eine neue, welche sich auf die Resultate seiner Untersuchungen über die Auflösungen einer unbestimmten Gleichung ersten Grades stützt. No.

---

E. D'OVIDIO. Nota sui determinanti di determinanti. Atti di Torino XI. 349-356.

---

R. F. SCOTT. Solution of a question (4526). Educ. Times XXV. 106-107.

Beweis der Identität:

$$\begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & \dots & 1 \\ s_n & s_{n-1} & \dots & s_0 \\ s_{n+1} & s_n & \dots & s_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{2n-1} & s_{2n-2} & \dots & s_{n+1} \end{vmatrix} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \Pi(a_1-a_2)^2 \begin{vmatrix} x & a_1 & a_1 \dots a_1 & a_1 \\ a_2 & x & a_2 \dots a_2 & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_{n-1} & \dots x & a_n \\ 1 & 1 & \dots 1 & 1 \end{vmatrix},$$

wo

$$s_n = a_1^r + a_2^r + \cdots a_n^r \text{ und } \Pi(a_1-a_n)^2$$

das Product der Quadrate der Differenzen aller möglichen Paare der Grössen $a_1\, a_2 \dots a_n$ bezeichnet. O.

---

H. STEPHEN SMITH. On the value of a certain arithmetical determinant. Proc. L. M. S. VII. 208-212.

Bezeichnet $(m, n)$ den grössten gemeinschaftlichen Divisor der ganzen Zahlen $m$, $n$, und $\psi(m)$ die Anzahl der $m$ nicht überschreitenden Zahlen, die relativ prim zu $m$ sind, so ist die symmetrische Determinante

$$\Sigma\pm(1,1)\,(2,2)\dots(m,m) = \psi(1).\psi(2)\dots\psi(m).$$

St.

---

KOSTKA. Ueber die Bestimmung von symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch ihre Coefficienten. Borchardt J. LXXXI. 281-290.

Ist

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

und

$$\Delta = \Sigma \pm x_1^0 x_2^1 x_3^2 \dots x_n^{n-1}, \quad D = \Sigma \pm x_1^{\alpha_0} x_2^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_{n-1}},$$

so lässt sich $D:\Delta$ auf folgende Weise in Determinantenform darstellen. Ist $\alpha_\lambda \leqq \alpha_{\lambda+1}$, so verwandelt man $D$ in eine Determinante $\alpha_{n-1}+1^{\text{ter}}$ Ordnung derart, dass die $\lambda^{\text{te}}$ Zeile die Grössen $x_\lambda^0, x_\lambda^1, \dots x_\lambda^{\alpha_{n-1}}$ enthält, falls $\lambda \leqq n$ ist, dagegen nur Nullen und eine einzige 1 falls $\lambda > n$ ist, und zwar steht die 1 in einer Colonne, deren Glieder $x_1^b, x_2^b, \dots x_n^b$ nicht in $D$ vorkommen. Endlich darf in jeder solchen Colonne nur eine 1 stehen. Die so erhaltene Determinante, welche bis auf eine Potenz von $(-1)$ mit $D$ identisch ist, kann dadurch in ein Product von $\Delta$ mit einer anderen Determinante verwandelt werden, dass man zu jeder der letzten $\alpha_{n-1}+1-n$ Colonnen die vorhergehenden resp. mit $a_{n-2}, a_{n-1}, \dots a_0$ multiplicirt hinzufügt. So ist dann $D:\Delta$ als Determinante dargestellt, deren Glieder ausser den $a$ nur 0 oder 1 sind. Ist nun eine symmetrische Function

$$F = \Sigma x_1^{\gamma_0} x_2^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_{n-1}}$$

von $m$ Gliedern zu bestimmen, so bildet man $\Delta \cdot F$. Dies wird eine Summe von höchstens $m$ Determinanten $\Sigma D_\lambda$, und drückt man jeden der Quotienten $D_\lambda:\Delta$ nach der oben angegebenen Weise aus, so erhält man $F$ als Summe der verschiedenen Determinanten. Auf diese Ausführung folgen einige Vereinfachungen für praktische Berechnung sowie Anwendungen.

No.

---

G. Biasi. Il calcolo sulle incognite delle equazioni algebriche. Verona, Münster. Milano, Brigola.

Verfasser meint, man müsse die numerische Auflösung der algebraischen Gleichungen wie eine Operation der Arithmetik ansehen und in Folge dessen die Unbekannten der algebraischen Gleichungen wie „einfache Functionen“ der Coefficienten behandeln, Functionen, deren ein specieller Fall die Potenzen mit

gebrochenen Exponenten sind. Der Zweck des Buches ist nun, die Grundlagen für eine allgemeine Theorie dieser Functionen zu geben. Zu dem Ende beschäftigt sich der Verfasser zunächst mit den „gleichförmigen symmetrischen Functionen". Darunter sind Functionen gegebener Grössen $a, b, c \dots l$ verstanden, welche auf folgende Weise entstanden gedacht werden können. Man multiplicire die $p^{\text{te}}$ Potenz der Producte aus je $\pi$ der gegebenen Grössen $a, b, c \dots l$ mit der $r^{\text{ten}}$ Potenz der Producte aus je $\varrho$ dieser Grössen, und mit der $t^{\text{ten}}$ Potenz der Producte aus je $\tau$ etc., doch so, dass keines der Elemente $a, b, c \dots l$ in diesem Producte mehrmals auftritt, und addire alle möglichen derartigen Producte. Die Bezeichnung

$$s_{\substack{p\ r\ t\ \dots \\ \pi\ \varrho\ \tau\ \dots}}$$

für diese Functionen, wo die Grössen $p, r, t \dots$ die Exponenten und die Grössen $\pi, \varrho, \tau \dots$ die Indices heissen, gestattet die Herleitung gewisser Reductionsformeln und die directe Anwendung der Differentiation in Bezug auf die Wurzeln einer Gleichung, ohne dass es nöthig wäre, auf die Coefficienten oder auf die Potenzsummen zu recurriren. Eine algebraische Gleichung $m^{\text{ten}}$ Grades lässt sich mit Hülfe der obigen Bezeichnung so schreiben:

$$x^m - s_{\substack{1\\1}}\, x^{m-1} + s_{\substack{1\\2}}\, x^{m-2} - \cdots (-1)^m s_{\substack{1\\m}} = 0.$$

Bezeichnet ferner $D$ das Differentialsymbol

$$\left(\frac{d}{da} + \frac{d}{db} + \cdots + \frac{d}{dl}\right),$$

und ist $\varphi$ irgend eine Function der Grössen $a\, b\, c \dots l$, so drückt die Gleichung $D\varphi = 0$ die nothwendige und hinreichende Bedingung aus, dass die Function $\varphi$ unverändert bleibt, wenn man zu jeder der Grössen $a, b, c \dots l$ irgend ein gleiches Increment hinzufügt. Jede solche Function $\varphi$, für welche $D\varphi = 0$ ist, heisst eine „Peninvariante" der Gleichung, deren Wurzeln die Grössen $a, b, c \dots l$ sind. Dieser Begriff der Peninvariante lässt sich auf ein System von 3 Gleichungen erweitern.

Im folgenden Abschnitt wendet sich der Verfasser zu dem einfachsten Fall der Rechnung mit den Unbekannten, in dem es

sich darum handelt, die Veränderungen der Coefficienten zu bestimmen, wenn die Unbekannten der Gleichung geändert werden, d. h. zur Transformation der Gleichungen. Die Anwendung der gleichförmigen symmetrischen Functionen erleichtert die directe Bestimmung der Coefficienten der transformirten Gleichung. Als Beispiel dient die Transformation von Tschirnhausen, welche hier unter einer übersichtlicheren Form erscheint. Es folgt die Anwendung auf die Transformation der Gleichung

$$f(x) = x^m - s_1 x^{m-1} + \cdots (-1)^m s_m = 0$$

durch die Beziehung $y = x^m$.

Das allgemeine Problem der Rechnung mit den Unbekannten zweier Gleichungen besteht nun darin, die Coefficienten $A_0, A_1, \ldots A_n$ der Gleichung

$$A_0 Z^n + A_1 Z^{n-1} + \cdots + A_n = 0$$

so zu bestimmen, dass $Z$ irgend eine bestimmte Function der Unbekannten $x, \xi$ zweier gegebener Gleichungen

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0,$$
$$\alpha_0 \xi^\mu + \alpha_1 \xi^{\mu-1} + \cdots + \alpha_\mu = 0$$

wird. Der Verfasser behandelt nur die einfachen Fälle, wo $Z$ die Functionen

$$x + \xi,\ x - \xi,\ x\xi,\ \frac{x}{\xi},\ x^\xi$$

darstellt. Als Anwendung erscheint die Bestimmung der Kriterien für die einfachen oder vielfachen gemeinsamen Wurzeln in 2 Gleichungen.

Im Folgenden werden die binomischen Gleichungen behandelt: das Vorige wird angewendet auf ein System zweier binomischen Gleichungen, und werden einige elementare Eigenschaften der $n^{ten}$ Einheitswurzeln bewiesen.

Im Schlusscapitel folgt die Andeutung allgemeiner Methoden zur „algebraischen Auflösung der Gleichungen", worunter der Verfasser das Problem versteht, alle Wurzeln einer vorgelegten Gleichung darzustellen als algebraische Functionen von Radicalen, deren Radicanden algebraische Functionen der Coefficienten der vorgelegten Gleichung sind. Ausgeführt werden jedoch diese Methoden nur für die Gleichungen $2^{ten}$, $3^{ten}$ und $4^{ten}$ Grades. M.

Julius Petersen. To Formler, hènhörende til de symmetriske Funktioners Theori. Zeuthen Tidsskr. (3; VI. 9-10.

Ein einfacher und eleganter Beweis der Waring'schen Formel für die symmetrische Function $s_p$ der Wurzeln einer algebraischen Gleichung wird erhalten, wenn man in der identischen Gleichung

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) = x^n + a_1\, x^{n-1} + \cdots + a_n$$

nach Division mit $x^n$ auf beiden Seiten die Logarithmen nimmt, diese in Reihen entwickelt, und die Coefficienten der beiden Entwickelungen vergleicht. Ebenso erhält man die $a_p$ durch die $s_p$ ausgedrückt durch Vergleichung der Coefficienten, wenn man in der Gleichung

$$1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} = e^{-\left(\frac{s_1}{x_1} + \frac{s_2}{2x^2} + \cdots +\right)}$$

die rechte Seite in eine Reihe entwickelt. Gm.

G. v. Escherich. Beiträge zur Bildung der symmetrischen Functionen der Wurzelsysteme und der Resultante simultaner Gleichungen. Wien. K. Gerold's Sohn. gr. 8°.

Bestimmt man eine Function $\Phi(\alpha_1^{h_1}, \alpha_2^{h_2}, \dots)$ so, dass sie verschwindet, wenn nicht alle $h$ einander gleich sind, wenn also die $\alpha$ nicht ein simultanes System von Wurzeln $\alpha_1^{\lambda}$, $\alpha_2^{\lambda}\dots$ der Gleichungen

$$F_1(x_1 \dots x_n) = 0, \dots, F_n(x_1 \dots x_n) = 0$$

bilden; und dass zugleich

$$\frac{F_1'(\alpha_1^h)\dots F_n'(\alpha_n^h)}{\Phi(\alpha_1^h \dots \alpha_n^h)}$$

den Werth der Functionaldeterminante $D(\alpha_1^h, \dots \alpha_n^h)$ annimmt, wenn

$$F_1(x_1) = 0, \quad F_2(x_2) = 0, \dots$$

die Schlussgleichungen des Systems sind, so erhält man den Ausdruck einer einförmigen symmetrischen Function

$$\Sigma\Psi(\alpha_1^h, \alpha_2^h, \dots \alpha_n^h)$$

als Coefficienten von $(x_1 . x_2 \ldots x_n)^{-1}$ in der Entwickelung nach fallenden Potenzen der $x$ von

$$\frac{\Psi(x_1, x_2, \ldots x_n)\ \Phi(x_1, x_2, \ldots x_n)\ D(x_1, \ldots x_n)}{F_1(x_1)\ F_2(x_2) \ldots F_n(x_n)}.$$

Die mehrförmigen symmetrischen Functionen, wie z. B.

$$\Sigma \Psi(\alpha_1^{h_1}, \ldots \alpha_n^{h_1};\ \alpha_1^{h_2}, \ldots \alpha_n^{h_2})$$

lassen sich dann gleichfalls leicht bestimmen und für ihre Berechnung kann man noch bedeutende Erleichterungen in besondern Fällen geben. Im zweiten Theile folgt im Anschlusse an die Jacobi'schen und Liouville'schen Untersuchungen die Ableitung mehrerer sehr allgemeiner Formeln, die aber hier nicht wiedergegeben werden können. No.

---

Moret-Blanc. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 138-140.

Sind die Grössen

$$a, b, c,\ a', b', c',\ a'', b'', c''$$

der Bedingung

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

unterworfen, so ist

$$\Sigma a^2\, \Sigma a'^2\, \Sigma a''^2 = [a \Sigma a' a'' + a' \cdot \Sigma aa'']^2 + [b \Sigma a' a'' + b' \Sigma aa'']^2 + [c \Sigma a' a'' + c' \Sigma aa'']^2 + [\Sigma (bc' - cb') a'']^2.$$

O.

# Dritter Abschnitt.

## Zahlentheorie.

### Capitel 1.

### Allgemeines.

F. J. Studnicka. Die Grundlehren der Zahlentheorie. Casopis IV. (Böhmisch.) 1875.

Der Verfasser entwickelt in übersichtlicher Weise die Lehre von der Theilbarkeit der Zahlen, die wichtigsten Eigenschaften der Zahlen, das Rechnen mit Congruenzen nebst der Anwendung auf die unbestimmten Gleichungen vom ersten Grade. W.

---

R. Jaensch. Die schwierigeren Probleme der Zahlentheorie in systematischem Zusammenhange bearbeitet zur beabsichtigten Einreihung dieses Stoffes in den Unterricht der Prima höherer Lehranstalten. Pr. Rastenburg.

Das Wort „schwieriger" ist subjectiv, das Wort „systematisch" ist gar nicht zu verstehen. No.

G. Dostor. Détermination du chiffre, qui termine les puissances successives des nombres entiers. Grunert Arch. LVIII. 436-437.

Die $(4q+r)^{\text{te}}$ Potenz einer ganzen Zahl endigt mit derselben Einerziffer, wie die $r^{\text{te}}$ Potenz derselben Zahl. Wenn man also

eine Tabelle der Einerziffern für die ersten vier Potenzen der Zahlen von 1—9 zusammen stellt, so kann man aus derselben die letzten Ziffern jeder beliebigen Potenz irgend einer Zahl ablesen.

Schl.

---

E. Lucas. Sur les rapports qui existent entre la théorie des nombres et le calcul intégral. C. R. LXXXII. 1303-1305.

Bedeuten $a$ und $b$ die beiden Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades mit ganzzahligen zu einander relativ primen Coefficienten, und ist

$$a+b=P,\ a.b=Q,\ a-b=\delta,\ u_n=(a^n-b^n):(a-b),$$
$$v_n=a^n+b^n,\ z=n\log\frac{a}{b};$$

so entsprechen die für

$$S(z)=(\delta.\sqrt{-1}.u_n):(2Q^{\frac{n}{2}})\ \text{ und }\ C(z)=v_n:(2Q^{\frac{n}{2}})$$

geltenden Formeln genau den für Sinus und Cosinus bekannten. Aus ihnen folgen mancherlei Eigenschaften für die Theiler von $u_n$ und $v_n$, wenn $n$ eine ganze Zahl bedeutet. Bezeichnet z. B. $n$ eine ungrade Zahl, so ist $u_n$ ein Theiler der quadratischen Form $x^2-Qy^2$. Ist $p$ eine Primzahl von der Form $4q+1$ oder $4q+3$, so sind die Divisoren von $u_{p^n}:u_n$ Theiler der quadratischen Form $x^2-py^2$ oder der Form $\delta x^2+py^2$.

No.

---

E. Lucas. Note sur nouveaux théorèmes d'arithmétique supérieure. C. R. LXXXIII. 1286-1288.

In der eben besprochenen Arbeit hatte der Herr Verfasser eines neuen Verfahrens Erwähnung gethan, mittels dessen die Zerlegung zusammengesetzter Zahlen, bezüglich die Erkennung von Primzahlen erleichtert werde. Durch Vergleichung mit den recurrenten Reihen von Fibonacci, Fermat u. s. w. lassen sich neue Resultate über Primzahlen ableiten. So ist z. B. $p=3.2^{4m+3}-1$ Primzahl, wenn in der Reihe der Zahlen $r_{n+1}=2r_n^2-1$, also 2, 9, 161, 51841, ... die $4m+3^{\text{te}}$ die erste durch $p$ theilbare ist. Sie ist zusammengesetzt, wenn von diesen $4m+3$ Zahlen schon

die $\alpha^{te}$ durch $p$ theilbar ist, und ihre Theiler sind dann von der Form $3.2^{\alpha}k\pm 1$. No.

---

E. Lucas. Note sur l'application des séries récurrentes à la recherche de la loi de distribution des nombres premiers. C R. LXXXII. 165-167.

Der allgemeine Ausdruck der Näherungswerthe des einstellig periodischen Kettenbruchs mit dem Zähler 1 und dem Nenner 1 ist bekannt; ebenso der Ausdruck des Zählers des $2n^{ten}$ Näherungswerthes $u_{2n}$ durch $u_n$ u. s. w. Diese letztere Beziehung erlaubt es, Schlüsse über die Primzahltheiler von $u_{2n}$ aus der Kenntniss der Primzahltheiler von $u_n$ zu ziehen. So ergeben sich Sätze wie: Bei den durch eine Primzahl von der Form $20q+11$ oder $20q+19$ theilbaren $u_n$ ist $n$ ein Vielfaches von $20q+10$ bezüglich $20q+18$. No.

---

P. Otte. Ueber die Theilbarkeit der Zahlen. Schlömilch Z. XXI. 366-370.

Verfasser löst in seiner Abhandlung die Aufgabe: für eine gegebene Primzahl $p$ einen solchen Factor $n_s$ zu finden, dass, wenn man mit demselben die letzten $s$ Stellen einer Zahl $Z$ multiplicirt und das Product von der durch die übrigen Ziffern dargestellten Zahl subtrahirt, die Theilbarkeit des Restes die der ursprünglichen Zahl bedingt. Dieser Factor $n_s$ muss der Congruenz

$$1+10^s.n_s\equiv 0 \pmod p$$

genügen. Ferner ist

$$10.n_s-n_{s-1}\equiv 0 \pmod p$$

und für $s=1$,

$$10n_1+1\equiv 0 \pmod p.$$

Aus den letzten beiden Congruenzen können der Reihe nach die Werthe für $n_1, n_2, n_3 ..$, d. h. für diejenigen Factoren ermittelt werden, welche mit der letzten, mit den zwei letzten, mit den drei letzten u. s. w. Stellen multiplicirt werden müssen. Für alle Primzahlen unter 100 hat der Verfasser die Factoren $n_1$ bis $n_4$ berechnet und in einer Tabelle zusammengestellt. Schl.

V. Schlegel. Theilbarkeit einer gegebenen Zahl durch eine andere. Schlömilch Z. XXI. 365-366.

Verfasser entwickelt ein einfaches und allgemein anwendbares Verfahren, um die Theilbarkeit einer Zahl durch eine andere, welche in der Einerstelle eine der Ziffern 1, 3, 7, 9 enthält, zu erkennen. Durch Multiplication mit dem einziffrigen Factor $k$, welcher resp. 1, 7, 3, 9 ist, lässt sich der Divisor $d$ stets auf die Form $10\lambda+1$ bringen. Es sei nun $a_0$ die mit demselben Factor $k$ erweiterte gegebene Zahl und $u_0$ ihre letzte Ziffer. Aus $a_0$ bildet man die neue Zahl

$$a_1 = \frac{a_0-u_0}{10} - \lambda u_0 = \frac{a_0-u_0(10\lambda+1)}{10},$$

indem man die Einerziffer $u_0$ abstreicht, und von der durch die übrigbleibenden Ziffern gebildeten Zahl das $\lambda$fache der abgestrichenen Einerziffer abzieht. Aus $a_1$ bildet man auf dieselbe Weise $a_2$, u. s. w. Wenn $a_0$ durch $10\lambda+1$ theilbar ist, so muss es auch jede der Zahlen $a_1$, $a_2$ ... sein, und die letzte

$$a_n = \frac{a_{n-1}-u_{n-1}(10\lambda+1)}{10}$$

ist in diesem Falle $=0$. Ferner ist

$$a_0 = (10\lambda+1)(u_0+10u_1+10^2u_2+\cdots 10^{n-1}u_{n-1})$$

d. h. die Endziffern der Zahlen $a_0$, $a_1$, $a_2$... bilden in der Reihenfolge $u_0$, $u_1$, $u_2$... die Einerziffer, Zehnerziffer u. s. w. des zweiten Factors der durch $10\lambda+1$ theilbaren Zahl $a_0$. Schl.

---

D. M. Sensenig. Divisibility by prime numbers. Analyst III. 25-26.

Beweis des Satzes, dass eine Primzahl $p$ (ausser 2 und 5) Theiler einer Zahl $N$ ist, wenn sie Theiler der Summe der als Zahlen betrachteten Gruppen von je so viel Stellen ist, als die Periode des Bruches $\frac{1}{p}$ Stellen enthält. Glr. (O.)

---

P. J. Vervaet. Zwei allgemeine Regeln für die Theilbarkeit decadischer Zahlen. Casopis V. (Böhmisch.)

Die beiden Regeln lauten, wenn ihr Wortlaut den gegebenen Beweisen gemäss corrigirt worden, folgendermaassen: 1) Eine Zahl $N(=10D+3)$ ist durch die ungrade Zahl $L$ theilbar, wenn die in $N$ enthaltene Anzahl Zehner ($D$), vermindert um ein gewisses Vielfaches der Einer ($J$), durch $L$ theilbar ist; dieses Vielfache ist ein $m$-faches, wobei $m$ durch die Gleichung gegeben ist

$$nL-10m=1.$$

2) Eine Zahl $N$ ist durch die grade Zahl $S$ theilbar, wenn die doppelte Zahl ($2D$) der Zehner von $N$ vermindert um ein gewisses Vielfaches ($m$-faches) der Einer ($J$) durch $S$ theilbar ist. Hierbei ist $m$ bestimmt durch:

$$nS-5m=1.$$

In beiden Regeln muss der Theiler $L$ resp. $S$ als frei vom Factor 5 vorausgesetzt werden. W.

---

L. L. Hommel. Om Tals Delelighed med hvilkesomhelst Primtal. Zeuthen Tidsskr. (3 VI 15-19.

Weitere Bemerkungen über eine Methode zur Prüfung der Theilbarkeit einer Zahl, über welche F. d. M. VII. p. 85 referirt ist. Gm.

---

F. Proth. Énoncés de divers théorèmes sur les nombres. C. R. LXXXIII. 1288-1289

Der Herr Verfasser theilt einige Theoreme mit, wie z. B. dass, wenn $p$ eine Primzahl ist, $2^p-2$ durch $p$, aber nicht durch $p^2$ oder $p^3$ theilbar sei; dass jede Zahl von der Form $6x+5$ einen Primzahltheiler von ebenderselben Form besitze, und andere ähnliche Sätze. No.

---

J. W. L. Glaisher. On formulae of verification in the partition of numbers. Proc. of London XXIV. 250-259. Rep. Brit. Ass. 1874.

Enthält Formeln, um zu entscheiden, ob eine Reihe von Theilungen vollständig sei. Betrachtet man alle Theilungen einer Zahl $n$, so ist die erste von Professor Sylvester herrührende Formel

$$\Sigma(1-x+xy-xyz+\cdots)=0.$$

Dazu hat der Herr Verfasser eine zweite Formel aufgestellt

$$\Sigma(1+x+xy+xyz+\cdots)=\Sigma 2^r.$$

Dabei ist $\Sigma 1$ die Zahl der Theilungen, und $x, y, z, \ldots$ geben an, wie oft in jeder Zerlegung die Zahlen 1, 2, 3,... vorkommen. Ebenso giebt $xy$ an, wie oft in einer Theilung die Anzahl der vorkommenden Einzen mit den vorkommenden Zweien combinirt werden können u. s. w. $r$ bezeichnet die Anzahl der verschiedenen in ihm enthaltenen Ziffern.

Bildet man die Theilungen von 9, also

$$9,\ 8+1,\ 7+2, \ldots \text{ bis zu } 1+1+1+1+1+1+1+1+1,$$

dann ist $\Sigma 1$, die Zahl der Theilungen,

$$=30,\quad \Sigma x=67,\quad \Sigma xy=47,\quad \Sigma xyz=10,$$

ferner

$$\Sigma 2^r=3.2^1+17.2^2+10.2^3,$$

d. h. es giebt 3 Theilungen

$$9,\quad 3+3+3,\quad 1+1+\cdots+1,$$

in denen nur eine Zahl vorkommt, 17, in denen 2, und 10, in denen 3 verschiedene Zahlen vorkommen. Die beiden Formeln sind dann:

$$30-67+47-10=0;\qquad 30+67+47+10=6+68+80.$$

Cly. (O.)

---

A. Cayley. Theorem in partitions. Messenger (2) V. 188.

Wenn $u_n$ die Anzahl von Theilungen der Zahl in Theile, welche nicht kleiner als 2, bezeichnet, so dass z. B. die Theilungen von 7 sind

7, 5 2, 2 5, 4 3, 3 4, 3 2 2, 2 3 2, 2 2 3,

so ist

$$u_2=1,\quad u_4=2,\quad u_6=5,\quad u_8=13$$
$$u_3=1,\quad u_5=3,\quad u_7=8,\quad u_9=21 \text{ etc.}$$

Die Zahlen werden so gebildet, dass jedes $u$ die Summe der beiden vorhergehenden ist. Glr. (O.)

---

W. Simerko. Summen der in einer gebrochenen arithmetischen Progression enthaltenen Ganzen. Casopis V. (Böhmisch).

Der Verfasser bestimmt die Summe der in einer gegebenen Anzahl von Gliedern der arithmetischen Progression

$$\frac{a+b}{n}, \quad \frac{2a+b}{n}, \ldots \frac{\alpha a+b}{n},$$

enthaltenen Ganzen und wendet das erhaltene Resultat dazu an, um die Zahl der ganzzahligen positiven Lösungen $x$, $y$, $z$, $r$ der Gleichungen

$$x = mr - nz, \quad y = -m'r + n'z \quad \left(\frac{m}{n} > \frac{m'}{n'}\right)$$

zu bestimmen, wenn $r$ überdies der Bedingung $r \leqq \alpha$ genügt. $u$ ist eine ganze positive Zahl. Desgleichen wird die Zahl der Lösungen für den Fall bestimmt, dass $x$ und $y$ unter gegebenen Grenzen bleiben müssen. Endlich werden in ähnlicher Hinsicht die Gleichungen

$$gx = mr - nz, \quad hy = -m'r + n'z$$

behandelt. W.

---

C. A. Laisant. Théorèmes sur les nombres. Mém. d. Bord. (2) II. 400-402.

Gehört $a$ zum Exponenten 3 für den Primzahlmodul $p$, so gehört $a+1$ zu 6, und umgekehrt. Gehört $a$ zu 6, so gehört $a+1$ in dem einzigen Falle $p = 7$, $a = 3$ zum Exponenten 3. No.

---

L. Sancery. De la répartition des nombres entre les diviseurs de $\varphi(\mu)$ lorsque $\mu$ est une puissance d'un nombre premier impair ou le double d'une telle puissance. Bull. S. M. F. IV. 17-29.

In der Reihe der Zahlen $a+px$, wo $a$ kleiner als die Primzahl $p$ ist und nach $p$ zum Exponenten $\theta$ gehört, giebt es beliebig viele Zahlen $A$ der Art, dass $A^{\theta}-1$ durch $p^{\varepsilon}$ theilbar sind, aber nicht durch $p^{\varepsilon+1}$, wenn $\varepsilon$ eine gegebene Zahl bedeutet. Gehört $A$ zum Exponenten $\theta$ nach $p$, so gehört es nach $p^{\nu}$ zu demselben, wenn die höchste Potenz von $p$, welche $A^{\theta}-1$ theilt, $\geqq p^{\nu}$ ist, wenn sie aber $p^{\nu-\delta}$ ist, so gehört $A$ zum Exponenten $\theta p^{\delta}$. Von diesen Sätzen aus gelangt man zu anderen, die sich auf das Doppelte einer Primzahlpotenz beziehen, durch den Satz: Jede ungrade Zahl, welche nach $p^{\nu}$ zum Exponenten $\theta$ gehört, gehört nach $2p^{\nu}$ zu demselben Exponenten. No.

---

V. Schlegel. Sätze über die Darstellbarkeit einer Zahl als Summe von Quadratzahlen. Schlömilch Z. XXI. 79-80.

Fünf ohne Beweis mitgetheilte und zum Theil bereits bekannte Sätze über die Formen der Zahlen, welche als Summe von mehreren Quadratzahlen darstellbar oder nicht darstellbar sind; z. B.: die Zahlen der Form $(4\lambda+3)2^{n}$ und alle Producte von je zwei solchen zu einander theilerfremden Zahlen sind diejenigen, welche sich nicht als Summe von weniger als drei Quadraten darstellen lassen. Schl.

---

J. W. L. Glaisher. On the representation of an uneven number as the sum of four squares and as the sum of a square and two triangular numbers. Phil. Mag. 1876.

Betrifft die Klasse von Sätzen aus der Zahlentheorie, welche aus transcendenten Identitäten für Jacobi's $\Theta$-Functionen hergeleitet werden. Csy. (O.)

---

D. M. Sensenig. Perfect cubes. Analyst III. 104-108.

Zweck der Arbeit ist, das allgemeine cubische Polynom

in specielle Formen zu transformiren, mit denen man für specielle Werthe von $x$ vollständige Cuben erhalten kann.

Glr. (O.)

---

EXNER. Der Rösselsprung als Zauberquadrat.
Pr. Hirschberg.

Im Anschluss an die von Clausen im 31ten Theile des Grunert'schen Archivs für das Rösselsprungproblem gelieferte Auflösung theilt der Verfasser das gewöhnliche Schachbrett in vier congruente Quadrate zu 16 Feldern, weist nach, dass in jedem solchen vier geschlossene Rösselsprünge möglich sind, und unterscheidet je nach der Gestalt der fertig gezeichneten Diagramme Rhombenquarten und Quadratquarten. Hierauf stellt er sehr genau die Bedingungen fest, unter welchen aus der einem bestimmten Viertel angehörigen Quart auf eine weitere Quart eines der drei übrigen Quadrate übergegangen werden kann. Diese Thatsachen benützt er, um die beiden Normalfiguren von Wenzelides, in welchen der geschlossene Rösselsprung zugleich als ein gleichsummiger auftritt, genau zu analysiren und die vom Erfinder selbst nicht mitgetheilten Constructionsprincipien festzustellen. Ersetzt man in jenen Figuren allgemein die Zahlen

$$n.8+1 \text{ bis } (n+1)8$$

durch $n$, so gehen dieselben in schematische, dem Clausen'schen ähnliche Zahlenquadrate über, wie aus dem nachstehenden Schema

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 0 | 7 | 2 | 3 | 5 | 4 |
| 0 | 7 | 5 | 2 | 5 | 4 | 2 | 3 |
| 2 | 5 | 7 | 0 | 3 | 2 | 4 | 5 |
| 7 | 0 | 2 | 5 | 4 | 5 | 3 | 2 |
| 6 | 7 | 1 | 0 | 1 | 6 | 4 | 3 |
| 1 | 0 | 6 | 7 | 4 | 3 | 1 | 6 |
| 7 | 6 | 0 | 1 | 6 | 1 | 3 | 4 |
| 0 | 1 | 7 | 6 | 3 | 4 | 6 | 1 |

ersehen werden kann. Alle Zeilen und Colonnen des Gesammtquadrates liefern hier die gleiche Summe 28, während 14 die Summe für jedes der vier Partialquadrate ist. Natürlich aber ist es nicht

unbedingt erforderlich, dass für die vier Theile die Summenzahl die gleiche ist; vielmehr wird es schon genügen, wenn je zweien Scheitelquadraten beziehungsweise die Summe $(14 \pm a)$ zukommt, unter $a$ jeden beliebigen ganzzahligen Werth verstanden. Ferner wird man sich überzeugen, dass je zwei symmetrisch zu einer der beiden Hauptdiagonalen gelegene Zahlen die constante Differenz 4 ergeben; indess wird a priori die Differenz 2 und 1 mit gleichem Rechte zugelassen werden müssen. Kennt man nun jene beiden Zahlenreihen, welche zu beiden Seiten der horizontalen Mittellinie liegen, so ist damit der Rösselsprung selber gegeben; Herrn Exner's Bezeichnungsweise würde allgemein die folgende sein:

$$a_{4,1} \quad a_{4,2} \quad a_{4,3} \quad a_{4,4} \, . \, a_{4,5} \quad a_{4,6} \quad a_{4,7} \quad a_{4,8}$$
$$a_{5,1} \quad a_{5,2} \quad a_{5,3} \quad a_{5,4} \, . \, a_{5,5} \quad a_{5,6} \, . \, a_{5,7} \quad a_{5,8}$$

Diese Zahlen müssen sonach gefunden werden. Hierzu verfährt er so: Er bildet aus den „Grundzahlen“ 0 0 11 22 33 44 55 66 77 sämmtliche Combinationen mit Wiederholungen zur Summe 14, 15, 16... und stellt diejenigen Combinationen gleicher Summe einander gegenüber, deren correspondirende Elemente die vorgeschriebene Differenz aufweisen. Ist z. B. 14 die Summe, 4 die Differenz, so entspricht der bereits eruirten Combination 7.6.1.0 die folgende

$$7-4.6-4.1+4.0+4 \equiv 3.2.5.4.$$

Hat man solchergestalt die ganze Reihe gebildet, so schliesst man durch Tatonnement alle unbrauchbaren Complexionen aus. Wie diese Regeln sich praktisch erproben und in der That alle möglichen symmetrischen Rösselsprünge liefern, muss in der interessanten Schrift selbst nachgesehen werden.

Unlängst äusserte M. Curtze in der „Jenaer Literaturzeitung“, das Problem der „magischen Rösselsprünge“ sei durch die vorstehend besprochene Arbeit wohl zum endgültigen Abschluss gediehen. Berücksichtigt man den Umstand, dass die Ausscheidung der brauchbaren Fundamentalverbindungen nicht durch ein independentes Verfahren, sondern durch den Versuch sich bewerkstelligt, sowie dass eine Ausdehnung der Exner'schen Methode auf das allgemeine Brett von $n^2$ Feldern mit grossen Schwierigkeiten verbunden sein würde, so wird man jenem Ausspruch nicht

völlig beizustimmen vermögen, ohne darum den grossen wirklich erzielten Fortschritt zu verkennen. Gr.

---

S. Hartmann. O magickém troy-a ctyrctverci. Kratický vynatek z obsírného déla. Prag. Klaudy.

Unserem Referate über Exner's Programm lassen wir ein paar Worte über obiges Broschürchen folgen, dessen früher Erwähnung zu thun vergessen worden ist. Dasselbe enthält eine sehr ausführliche Theorie des magischen Quadrates von $4^2$ Zellen, und zwar verrathen die topologischen Constructionen des Verfassers vielfach Aehnlichkeit mit jenen Betrachtungen, durch welche Exner den wechselseitigen Zusammenhang seiner „Quarten" bestimmte. Gr.

---

P. Mansion. Sur les carrés magiques. N. C. M. II. 161-164, 193-201.

1) Bericht mit einigen Zusätzen über die historische Note von Günther in seinen vermischten Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Leipzig, Teubner 1876 p. 188—270. 2) Construction magischer Quadrate durch Umschliessung, indem, nachdem man die Summe der Elemente jeder Linie zu Null gemacht, von jedem Element eine und dieselbe passend gewählte Zahl abgezogen wird. Nachher verdoppelt man den Werth jedes neuen Elementes, um die Brüche zu vermeiden. Mn. (O.)

---

Ed. Lucas. Sur un problème d'Euler, relatif aux carrés magiques. N. C. M. II. 97-101.

Der Verfasser behandelt hauptsächlich folgende Frage: Neun Zahlen sollen in ein Quadrat gestellt werden, so dass die Summe der Quadrate der Zahlen in den Horizontal-, Vertical- und Diagonalzeilen gleich ist. Euler hat das analoge Problem für 16 Zahlen unvollständig behandelt, mit Hülfe seiner eigenen Entdeckungen über die orthogonalen quaternären Substitutionen. Mn. (O.)

---

F. Müller. Ueber eine zahlentheoretische Spielerei. Schlömilch Z. XXI. 227-228.

Es wird mitgetheilt, dass die zahlentheoretischen Interpretationen der Gleichungen

$$\Pi(1+x^{2^\nu}) = \Sigma x^\varsigma, \quad \Pi(x^{-3^\nu}+1+x^{3^\nu}) = \Sigma x^\varsigma$$

(s. Schlömilch Z. XXI.) bekannt sind. Sie finden sich Euler, Introduct. etc. §§ 328—331. No.

---

G. Dostor. Propriétés des nombres. Grunert Arch. LVIII. 433-436.

Es lassen sich stets $n$ aufeinanderfolgende ungrade Zahlen auffinden, deren Summe gleich einer gegebenen Potenz der Zahl $n$ wird. So z. B. ist $n^3$ gleich der Summe der consecutiven ungraden Zahlen

$$n^2-n+1 \text{ bis } n^2+n-1.$$

Schl.

---

C. A. Laisant. Remarque sur un théorème d'arithmétique. N. C. M. II. 341-342.

Die Zahl $1^x+2^x+4^x$ ist ein Vielfaches von 7, wenn $x\pm1$ durch 3 theilbar ist. Mn. (O.)

---

A. B. Evans. Solution of a question (4604). Educ. Times XXV. 76.

Bestimmung von 4 ganzen Zahlen, deren Summe eine sechste Potenz ist und deren Summe zu je drei eine fünfte Potenz ist.

O.

---

Moret-Blanc. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 46-48.

Die Summe der Quadrate der Zahlen ist erst für $n = 24$ wieder ein Quadrat. O.

---

C. A. LAISANT. Sur un problème d'arithmétique. Mém. d. Bord. (2) II. 403.

Praktisches Verfahren, um aus dem Producte einer Zahl in die durch Umkehrung der Reihenfolge der Ziffern aus ihr erhaltene beide Factoren zu finden. No.

---

E. CATALAN. Sur un théorème d'arithmétique. N. C. M. II. 179-180, 368.

Lösung des Problems, ungrade aufeinanderfolgende Zahlen zu finden, deren Summe gleich $s$ ist. Folgerungen, wenn $s$ eine Potenz ist. Die Summe der $2n-1$ ersten Zahlen, die auf $n$ folgen, ist $(2n-1)^2$. Mn. (O.)

---

E. B. ELLIOTT, L. TANNER, R. TUCKER. Solution of a question (5009). Educ. Times XXVI. 28-29.

Alle Potenzen von 12890625 enden mit 12890625 und ebenso die Potenzen von allen Zahlen, die mit 12890625 enden. O.

---

W. SHANKS. Remarks chiefly on $487^2 \equiv 486$. Proc. of London XXV. 551.

Die Periode des Bruches $\frac{1}{487}$ ist durch 487 theilbar, folglich hat das Quadrat $\frac{1}{487^2}$ eine Periode von 486 Stellen. Hinzugefügt wird, dass 99... (81 Neunen) 00... (80 Nullen) theilbar durch 69499 ist, und der Quotient wird mitgetheilt. Cly. (O.)

---

W. H. WAHLEN. On division remainders in arithmetic. Phil. Mag. 1876.

Csy.

---

MARCHAND. Problèmes d'arithmétique. Mondes (2) XXXIX. 26-27, 348-349.

Zur Charakteristik der in beiden Noten behandelten Probleme führen wir das erste derselben an: „Man soll 2 aufeinanderfolgende Zahlen finden, deren $5^{te}$ Potenzen 489711 zur Differenz haben.“ O.

---

A. GENOCCHI. Intorno alle problemi aritmetici. Atti di Torino XI. 821-829.

---

Weitere Lösungen von Aufgaben aus der Zahlentheorie von M. JENKINS, HART, A. MARTIN finden sich Educ. Times XXVI. 30, 66, 87, 102.

O.

---

P. MANSION. On the law of reciprocity of quadratic residues. Messenger (2) V. 140-143, N. C. M. II. 233-239, 266-272.

Der Verfasser bemerkt, dass der einfachste Beweis, der für das Reciprocitätsgesetz gegeben ist, von Zeller herrührt (Berl. Monatsber. 1872, 846-847; s. F. d. M. IV. p. 76). Derselbe beruht auf einem Lemma von Gauss und einem Satz von Euler, der ein Kriterium zur Unterscheidung von Resten und Nichtresten giebt. Euler's Satz ist eine unmittelbare Folge des Fermat'schen Theorems, welches selbst ein evidentes Corrolar von dem Gauss'schen Lemma ist. Man erhält daher einen vollständigen und elementaren Beweis des Reciprocitätsgesetzes, indem man 1) Gauss's Lemma und dann den Fermat'schen Satz beweist, 2) Euler's Kriterium herleitet und 3) das Reciprocitätsgesetz nach Zeller's Methode. Diesen Weg befolgt Professor Mansion: derselbe ist unabhängig von der Theorie der primitiven Wurzeln und Indices. Glr. (O.)

---

E. SCHERING. Verallgemeinerung des Gauss'schen Kriterium für den quadratischen Rest-Character einer Zahl in Bezug auf eine andere.

L. KRONECKER. Bemerkung zur obigen Mittheilung. Berl. Monatsber. 1876. 330-341.

Herr Schering stellt folgende Verallgemeinerung des Gauss'schen Kriteriums für den quadratischen Rest-Charakter auf: Ist die beliebige Zahl $P$ zu $2A$ relativ prim, so wird mit Benutzung des Legendre-Jacobi'schen Zeichens $\left(\frac{A}{P}\right) = (-1)^{\mu}$, worin $\mu$ die Anzahl der negativen Reste bedeutet, welche entstehen, wenn man von den Producten $A, 2A, \cdots \frac{P-1}{2} A$ die absolut kleinsten Reste für den Theiler $P$ bildet.

Herr Kronecker knüpft hieran folgende Entwickelungen:

Sind $r$ und $s$ beliebige positive ganze Zahlen, $l, m, n$ dagegen ungrade und definirt man nach Eisenstein'scher Weise

$$(\mathfrak{A}) \qquad \left(\frac{r}{n}\right) = \prod_{k} \frac{\sin \frac{2rk\pi}{n}}{\sin \frac{2k\pi}{n}} \quad (k = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n-1)),$$

so kann man die rechte Seite derart transformiren, dass man

$$(\mathfrak{B}) \qquad \left(\frac{m}{n}\right) = \prod_{h,k} 2 \sin\left(\frac{h\pi}{m} + \frac{k\pi}{n}\right) 2 \sin\left(\frac{h\pi}{m} - \frac{k\pi}{n}\right), \quad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(m-1) \\ k = 1, 2, \ldots \frac{1}{2}(n-1) \end{pmatrix}$$

erhält. Nun folgen unmittelbar aus ($\mathfrak{A}$) die Gleichungen

$$(A) \qquad \left(\frac{r}{n}\right) = \left(\frac{r}{-n}\right), \left(\frac{r}{n}\right) = \left(\frac{sn+r}{n}\right), \left(\frac{1}{n}\right) = 1,$$
$$\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}};$$

$$(A') \qquad \left(\frac{r}{n}\right)\left(\frac{s}{n}\right) = \left(\frac{r.s}{n}\right);$$

$$(D) \qquad \left(\frac{r}{n}\right) \equiv r^{\frac{n-1}{2}} (\mathrm{mod}\, n);$$

und aus ($\mathfrak{B}$)

$$(B) \quad \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)}; \qquad (C) \quad \left(\frac{r}{mn}\right) = \left(\frac{r}{m}\right)\left(\frac{r}{n}\right).$$

Hier beweist ($D$) die Uebereinstimmung des oben definirten Zeichens mit dem Legendre-Jacobi'schen Symbol; die übrigen

Gleichungen liefern die Grundeigenschaften desselben. Die arithmetische Interpretation von (𝔄) führt zu der obigen Verallgemeinerung (𝔄′) des Gauss'schen Lemma's; die von (𝔅) zu der neuen Definition (𝔅′): dass $\left(\frac{m}{n}\right)$ gleich dem Vorzeichen von $\Pi\left(\frac{h}{m}-\frac{k}{n}\right)$ sei. Geht man umgekehrt von (𝔄′) und (𝔅′) aus, so erhält man aus (𝔄′) die in (*A*) und (*A*′), aus (𝔅′) die in (*B*) ausgesprochenen Eigenschaften. Endlich kann man leicht die Definitionen (𝔄′) und (𝔅′) als identisch erkennen. Es fehlen also für die Erkenntniss des so definirten Zeichens nur noch die Eigenschaften (*C*) und (*D*). Um diese abzuleiten und um zugleich den eigentlichen Kern dieser ganzen Klasse von Reciprocitätsbeweisen klar zu stellen geht Herr Kronecker nur von der Definition (𝔅′) aus. Diese liefert

$$(\alpha)\qquad \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{1}{4}(m-1)(n-1)},$$

$$(\beta)\quad \left(\frac{l}{n}\right)=\left(\frac{sn+l}{n}\right),\qquad (\beta')\quad \left(\frac{l}{n}\right)=\left(\frac{sn-l}{n}\right)(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)},$$

$$(\gamma)\quad \left(\frac{lm}{n}\right)=\left(\frac{l}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\right),\qquad (\gamma')\quad \left(\frac{l}{mn}\right)=\left(\frac{l}{m}\right)\left(\frac{l}{n}\right).$$

Diese Gleichungen ergeben die zahlentheoretische Bedeutung des Zeichens nebst seinen Eigenschaften, sobald dieselbe nur für Primzahlen feststeht; für quadratische Reste zeigt dies aber (γ), (β); ist also für einen einzigen quadratischen Nichtrest $m$ $\left(\frac{m}{n}\right)=-1$, so folgt aus (γ), (β), dass es für jeden der Fall ist. Die Existenz eines solchen liefert mit Hülfe des Gauss'schen Theorems (Disq. Arithm. IV. 129) einen Inductionsschluss. Die Arbeit endet mit einigen Bemerkungen über diese ganze Kategorie der Reciprocitätsbeweise, der auch der dritte und fünfte Gauss'sche angehören.

No.

---

V. Bouniakoffsky. Sur quelques propositions nouvelles, relatives au symbôle de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$. Bull. de Pét. XXII

In einem früheren Aufsatze hat der Verfasser folgendes Theorem bewiesen (siehe Bull. de l'Acad. T. XIV. „Sur un théorème, relatif à la théorie des résidus“): „Es seien $a$ und $r$ zwei ganze, ungrade, relative Primzahlen, von denen $r$ zwischen 1 und $2a-1$ inclusive liegt. Bezeichnet man mit $p$ eine Primzahl (2 ausgenommen) und bringt sie auf die Form

$$p = 2an+r,$$

so ist

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}n+m},$$

worin $m$ eine von $n$ unabhängige Zahl ist. Diese Zahl $m$ ist durch die Anzahl der Lösungen einer gewissen Ungleichheit bestimmt. In einer späteren Notiz (ibidem) ist der Ausdruck der Zahl $m$ als Function von $a$ und $r$ gegeben worden. In der gegenwärtigen Arbeit wird besonders ein specieller Fall hervorgehoben, in welchem die Zahl $m$ sich leicht bestimmen lässt; ist nämlich

$$p = 2an+a+2k,$$

oder

$$p = 2an'+a-2k,$$

und in beiden Fällen $\frac{a+1}{2}$ ein ungrades Multiplum von $k$, so hat man

$$\left(\frac{a}{2an+a+2k}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}n'+\frac{1}{2}\left(\frac{a-3}{2}+k\right)},$$

und

$$\left(\frac{a}{2an'+a-2k}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}n'+\frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{2}-k\right)}.$$

Zahlreiche Folgerungen und erläuternde Beispiele sind hinzugefügt. P.

---

Pepin. Étude sur la théorie des résidus cubiques.
Liouville J. (3) 313-325.

Die Arbeit behandelt auf Grund der Methoden von Gauss, Jacobi, Cauchy und die hauptsächlichsten Eigenschaften der Gleichung

$$4p = L^2+27M^2.$$

No.

---

C. A. LAISANT. Théorèmes sur les nombres premiers. Mém. d. Bord. (2) I. 399.

Theilt man eine Primzahl $P$ in einen graden Theil $p$ und in einen ungraden $i$, so ist $p^p.i^i$ gleich einem Vielfachen von $P$ vermehrt um $i$, und ebenso ist $p^i.i^p$ gleich einem Vielfachen von $P$ vermehrt um $p$. No.

---

H. BROCARD. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 331.

Die Anzahl der Primzahlen zwischen der positiven ganzen Zahl $A$ und ihrem Doppelten ist kleiner als die Anzahl der Primzahlen, die nicht grösser sind als $A$. O.

---

A. GENOCCHI. Cenni di ricerche intorno ai numeri primi. Atti di Torino XI 924-927.

ED. LUCAS. Sur la théorie des nombres premiers. Atti di Torino XI. 928-937.

---

P. S. et J. NEUBERG. Théorème d'arithmétique. N. C. M. II. 123, 215.

Folgerungen aus dem Satze, dass

$$(x-1)(x-2)\dots(x-p+1)\equiv x^{p-1}-1 \pmod p$$

eine identische Congruenz ist, wenn p eine Primzahl.

Mn. (O.)

---

E. CATALAN, S. RÉALIS, M. DE TILLY. Sur un mémoire de Libri. N. C. M. II. 30-34, 122, 150-152.

Beweis eines Satzes, der eine Combination der Sätze von Wilson und Fermat ist. Versuch eines Beweises der Libri'schen Methode zur Lösung von Congruenzen ersten Grades.

Mn. (O.)

---

R. DEDEKIND. Sur la théorie des nombres entiers algébriques. Darboux Bull. XI. 278.

Herr Dedekind will in diesen und den sich anschliessenden Aufsätzen seine Theorie der ganzen algebraischen Zahlen, bezüglich diejenige der allgemeinen idealen Zahlen nach den Principien geben, die er in dem 10$^{ten}$ Supplemente der zweiten Ausgabe von Dirichlet's Zahlentheorie (vgl. F. d. M. III. 63) mitgetheilt hat. Die vorliegende Einleitung giebt einen historischen Abriss der einschlägigen Arbeiten und endet mit der Definition des „Ideals" im Sinne des Herrn Verfassers. No.

---

J. C. HOUZEAU. Fragments sur le calcul numérique. Bull. de Belg. (2) XXXIX. 487-548; XL. 74-139, 455-524; XLI. 961-1011.

I. Der Verfasser handelt im ersten Fragment nach einer Notiz über die successiven Fortschritte auf dem Gebiete der Algorithmen von dem Schreiben der Zahlen, speciell von dem arithmetischen oder Abkürzungsfehler. Dieser Fehler ist der, den man durch Beschränkung auf eine gewisse Anzahl von Ziffern bei der Berechnung von irrationalen Grössen begeht. 1) Der Verfasser hat experimentell festgestellt, dass die Ziffern der Tafeln der gewöhnlichen Logarithmen und der natürlichen Sinus im Mittel den Werth 4.5 haben, wenn ihre Anzahl genügend gross genommen wird. Er schliesst daraus, dass es rationell ist, die letzte Decimale schon von 0,5 der letzten Stelle ab zu erhöhen. Ferner macht er verschiedene Bemerkungen über den bei der Addition von 10 oder 100 Zahlen begangenen Fehler. 2) Mittlerer arithmetischer Fehler (das Wort hat dieselbe Bedeutung wie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung) für Additionen. 3-5) Abkürzungsfehler in den trigonometrischen, logarithmischen Rechnungen und bei der Transformation von Formeln. 6) Rathschläge für die Präcision der Rechnungen: Msn lasse sich vertical die Einheiten derselben Ordnung, horizontal die Zahl, ihren Logarithmus und die gewöhnliche oder algebraische Bezeichnung entsprechen. II. Das zweite Fragment enthält eine Reihe von Vereinfachungen der gebräuchlichen arithmetischen Operationen, die theils bekannt, theils

neu und recht bemerkenswerth sind. Es möge hier angeführt werden:

$$\frac{N}{11}=\frac{N}{10}-\frac{N}{100}+\frac{N}{1000}\cdots,\quad \frac{N}{9}=\frac{N}{10}+\frac{N}{100}+\frac{N}{1000}\cdots$$

Der Verfasser leitet daraus das Mittel her, den Rest bei der Division einer Zahl durch 9 zu finden, dann die Ziffer der Einer, die der Zehner etc., was häufig bei gewissen logarithmischen Rechnungen Nutzen gewährt. Man kann die Theiler einer Zahl finden, indem man vom Logarithmus derselben diejenigen der Primzahlen, z. B. mit Hülfe des Rechenlineals subtrahirt. Man kann die Division ausführen, indem man mit dem reciproken Werth des Divisors multiplicirt. Der Verfasser giebt eine Tabelle der 9 ersten Vielfachen der reciproken Werthe der Zahlen von 1 bis 100 auf 12 Decimalstellen. Man kann durch die Logarithmen die ersten Ziffern einer Quadratwurzel finden und die anderen Ziffern durch eine Division bestimmen, oder auch die Logarithmen anwenden, um einen Theil der Ziffern eines Quotienten oder eines Productes zu bestimmen. Strenger Beweis, dass der Rest der Division von

$$a+10b+100c+\cdots \text{ durch } 10+k \text{ gleich } a-bk+ck^2\cdots$$

ist. Merkwürdig ist, dass der Verfasser bei den verschiedenen Arten der Ausführung der Subtraction nicht die Methode der österreichischen Schulen erwähnt hat, die sehr rationell ist und bei den Kopfrechnungen im kleinen Handel allgemein angewendet wird. III. Das dritte Fragment handelt von Gleichungen. Trigonometrische Lösung der quadratischen Gleichungen vermittelst Darstellung der Wurzel durch $k \tang \frac{1}{2}\varphi$, $\pm k \cot \frac{1}{2}\varphi$, eine Lösung, welche eine bequeme Anwendung der Logarithmen gestattet. Neue trigonometrische Lösung der cubischen Gleichung (sie wird als Product einer quadratischen und einer linearen Gleichung mit reellen Wurzeln betrachtet) mit Hülfe der Logarithmentafeln, um die praktische Berechnung der Wurzeln zu vereinfachen. Biquadratische Gleichung; Lösung und analoge Tafel. Untersuchung der Wurzeln einer beliebigen Gleichung nach ihrer Grösse: die Nachbarwerthe von $\pm 1$ nach der Methode von Viéta-Newton, die kleinen oder grossen, wesentlich von $\pm 1$ verschiedenen, durch Entwickelung

der Unbekannten in eine Reihe als Function der Coefficienten. Man findet in dieser Weise nur 4 Wurzeln, die übrigen muss man durch Erniedrigung der Gleichung mit vieler Vorsicht suchen. Numerische Lösung transcendenter Gleichungen ebenfalls durch Reihen. Lineare Gleichungen durch die Methode der gleichen Coefficienten. Simultane Gleichungen werden auf graphischem Wege gelöst. IV. Das letzte Fragment beschäftigt sich mit Näherungen und Reihen. Eine vollständige Analyse ist ebenso, wie bei den früheren, unmöglich. Deshalb hier die Titel der Capitel, nebst einigen Bemerkungen. 1) Mittel zur Näherung. Entwickelung in eine Reihe, successive Substitution, Substitution einer Function für eine andere, Beispiele, für gewisse Werthe von

$$\frac{b}{a}, \quad \sqrt[3]{a+\sqrt{b}} = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a^3}}.$$

2) Letzte merkliche Glieder einer Reihe. Der Verfasser giebt ein Mittel, in einer Reihe die letzten Glieder, bei denen man nach den vorhergehenden anhält, zu vereinigen oder sie durch die einer anderen brauchbareren Reihe zu ersetzen. 3) Classification der numerischen Reihen; geometrische Reihe, Reihen mit verzögerter Abnahme der Grösse der Glieder, bei denen schliesslich ungefähr $u_n = An^\alpha$ wird; Reihen mit beschleunigter Abnahme der Grösse der Glieder, wo man im Gegentheil ungefähr hat $\log u_n = Bn^k$. 4) Reihen, deren Convergenz vermehrt wird. Transformation der Reihen nach der Methode von Maclaurin und Euler. Diese Methode ist allgemein auf die Reihen der 2ten Art anwendbar. 5) Umkehrung oder Inversion der Reihen. Gewöhnliche Methode mit unbestimmten Coefficienten sorgfältig entwickelt.

Die Fragmente des Herrn Houzeau über die numerische Rechnung bilden, trotz mancher Längen, ein Ensemble von Rechnungsvorschriften, die für astronomische Rechner sehr nützlich zu sein scheint. Mn. (O.)

---

V. N. Bougaïef. Théorie des dérivées numériques. Moscou. Mamontof. 1870-1873. (Russisch.) Analyse faite par l'auteur. Darboux Bull. X. 13-32.

Das Referat erfolgt nach dem vom Verfasser gegebenen Auszuge. Die Arbeit zerfällt in vier Theile. In dem ersten setzt der Verfasser die allgemeinen Principien seiner Methode auseinander. Numerisches Integral ist ein Ausdruck von der Form

$$\Sigma_n \theta(d) = \psi(n),$$

während $\theta(n)$ die numerische Derivirte von $\psi(n)$ ist, auch geschrieben

$$\theta(n) = D\psi(n).$$

Mit Hülfe der Theorie der numerischen Derivation kann man allgemeine Formeln zur Entwicklung analytischer oder numerischer Functionen in numerische Reihen von specieller Form aufstellen. Die allgemeine Formel dieser Entwickelung ist

$$F(n) = Q(1)E\frac{n}{1} + Q(2)E\frac{n}{2} + \cdots + Q(k)E\frac{n}{k} + \cdots,$$

wo $E(x)$ die grösste ganze Zahl, die nicht grösser als $x$, bezeichnet. Eine solche Entwickelung ist bei gegebener Function nur auf eine Art möglich, wie der Verfasser zeigt. Im zweiten Theil zeigt der Verfasser dass, wenn man in der Gleichung

$\Sigma_n \vartheta(\delta)X(d) = \psi(n)$ die Functionen $\vartheta(n)$ und $\psi(n)$

kennt, man die Bestimmung der Function $X(n)$ auf eine numerische Derivation zurückführen kann, wenn die Function $\theta(n)$ der Bedingung

$$\vartheta(n')\vartheta(n'') = \vartheta(n'n'')$$

genügt. Der dritte Theil bringt Anwendungen der Theorie, während der vierte die Theorie auf die Entwickelung von Functionen in numerischen Reihen der Form

$$F(n) = S_1^n \overline{F}_2(u)\, E\sqrt{\frac{n}{u}}, \ldots \qquad F(n) = S_1^n \overline{F}_\mu(u)\, E\sqrt[\mu]{\frac{n}{u}}$$

ausdehnt. Der Schluss enthält allgemeine Betrachtungen über numerische Functionen. O.

---

K. Dembschick. Unbestimmte Gleichungen ersten und zweiten Grades. Pr. Straubing.

Eine kurze lediglich für Unterrichtszwecke bestimmte Darstellung der Lehre von den diophantischen Gleichungen. Als

Lösungen werden nur ganzzahlige, nicht auch blos rationale Werthe angesehen. Gr.

---

J. STUDNICKA. Auflösung eines Systems von linearen Congruenzen. Prag. Ber. 1875. 114-116.

Bemerkung über die Durchführung der von Gauss in den Disquisitiones gegebenen Methode. No.

---

H. J. S. SMITH. Theory of the Pellian equation. Proc. L. M. S. VII. 196.

Referat im nächsten Bande.

---

H. J. S. SMITH. On a problem of Eisenstein. Messenger (2) V. 143.

Lösung des von Eisenstein (Crelle J. XXVII. 83) aufgestellten Problems „Die Fälle zu bestimmen, in denen die Gleichung

$$Z = Y^2 - (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}X^2$$

eine Mehrzahl von Lösungen zulässt, und das Gesetz, welches die verschiedenen Lösungen verbindet, nachzuweisen, wenn es mehr als eine giebt." Glr. (O.)

---

S. GÜNTHER. Résolution de l'équation indéterminée $y^2 - ax^2 = bz$ en nombres entiers. Liouville J. (3) II. 331-340.

P. MANSION. Note. Liouville J. (3) II. 345.

Herr Günther beweist, dass, wenn $Q_i$ der $i^{te}$ Theilnenner des Kettenbruches

$$k = \cfrac{a}{2u - \cfrac{a}{2u - \ddots}}$$

ist, die Gleichung

$$Q_{2n} = Q_n^2 - aQ_{n-1}^2$$

erfüllt ist. Berechnet man also $u$ aus der Gleichung

$$Q_{2n} = bz,$$

so erfüllen

$$y = Q_n, \quad x = Q_{n-1}, \quad z = Q_{2n} : b$$

die Gleichung

$$y^2 - ax^2 = bz.$$

Ist

$$u^2 \equiv a \,(\text{mod.}\, 2c+1),$$

so liefert der Nenner des Näherungswerthes vom Index

$$(2p-1)\,(2c+1)-1 = 2$$

eine Lösung der Congruenz

$$y^2 \equiv ax^2 \,(\text{mod.}\, 2c+1).$$

Herr **Mansion** giebt einen elementaren Ausdruck für den Werth von $Q_n$. No.

---

E. Lucas. Solution d'un problème de Behâ-Eddin sur l'analyse indéterminée. Nouv. Ann. (2) XV. 359-365.

Es handelt sich um die ganzzahlige Auflösung des folgenden Gleichungssystems:

$$x^2+xy+2y^2 = u^2$$
$$x^2-xy-2y^2 = v^2.$$

Diese Aufgabe ist dem Rechenbuche des Arabers Behâ-Eddin, welches den Titel Khélasat al Hisâb führt, entnommen. Aus den Operationen des Verfassers, welche lediglich den Erfolg haben, die obigen Gleichungen wiederholt in andere zu transformiren, ist eine brauchbare Lösungsmethode nicht ersichtlich.

Schl.

---

E. Lucas. Sur la résolution du système des équations $x^2-by^2 = u^2$, $\quad x^2+by^2 = v^2$. en nombres entiers. Nouv. Ann. (2) XV. 466-470.

Verfasser zeigt in umständlicher Weise nur, wie aus einer Lösung des obigen Systems eine Reihe neuer Lösungen abgeleitet werden kann. Schl.

H. BROCARD. Sur un théorème de Diophante. N. C. M. II. 246-247.

Ist

$$X = x^2, \quad Y = (x+1)^2, \quad Z = 2X+2Y+2,$$

so sind

$X+Y+XY$, $Y+Z+YZ$, $Z+X+ZX$, $XY+Z$, $XZ+Y$, $XY+Z$ Quadrate von ganzen Functionen von $x$. Mn. (O.)

---

D. S. HART. Solution of a question (4589). Educ. Times XXV. 97-98.

Es werden drei Aufgaben gelöst: 1) $x$ soll als positive ganze Zahl bestimmt werden, wenn

$$241x^2+67x+1 = \text{Quadrat};$$

2) wenn

$$953x^2+87x+1 = \text{Quadrat};$$

3) $x$ und $y$ sollen als positive ganze Zahlen bestimmt werden, wenn sie kleinste ganzzahlige Lösungen von

$$x^2-5693y^2 = a$$

werden. O.

---

D. S. HART. Solution of an indeterminate problem. Analyst III. 81-83.

Das gelöste Problem heisst: „Man soll 3 Quadratzahlen der Art finden, dass, wenn man jede um die Summe der Wurzeln vermehrt oder vermindert, diese Summe resp. Differenz gleich einem Quadrat wird“. Glr. (O.)

---

A. MARTIN. Solution of a question (4204). Educ. Times XXV. 96-98.

Man soll die ganzzahligen Seiten eines Dreiecks bestimmen, dessen Mittellinien ebenfalls ganze Zahlen sind. O.

---

A. B. EVANS. Solution of a question (4738). Educ. Times XXV. 31.

Es werden 3 positive Zahlen bestimmt, deren Summe gleich 1 ist, und welche jede um 1 vermehrt Cuben sind. O.

---

A. Genocchi. Généralisation du théorème de Lamé sur l'impossibilité de l'équation $x^7+y^7+z^7=0$. C. R. LXXXII. 910-913.

Herr Genocchi hat (vgl. F. d. M. VI.; 112) die Unmöglichkeit der Lösung gewisser unbestimmter Gleichungen in ganzen Zahlen nachgewiesen. Zu diesen gehörte die Gleichung

$$x^4+6x^2y^2-\tfrac{1}{7}y^4=z^2.$$

Im vorliegenden Aufsatze wird bewiesen, dass aus dieser Unmöglichkeit folge, die Gleichung

$$x^7+y^7+z^7=0$$

könne nicht durch die drei Wurzeln $x$, $y$, $z$ einer Gleichung dritten Grades mit rationalen Coefficienten befriedigt werden. No.

---

Pepin. Impossibilité de l'équation $x^7+y^7+z^7=0$. C. R. LXXXII. 676-679, 743-747.

In der ersten Mittheilung beweist Herr Pepin die Unmöglichkeit ganzzahliger Lösung der Gleichung $u^2=x^4+7^3y^4$ und aus dieser diejenige der Gleichung $x^7+y^7+z^7=0$, sofern nicht eine der Unbekannten durch 7 theilbar sei. In der zweiten Mittheilung wird auch der zweite Fall durch Reducirung auf die obige Gleichung ausgeschlossen. No.

---

Meyl. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 545.

Ganzzahlige Lösung der Gleichung $(x+1)^y=x^{y+1}+1$. Die Lösungen sind:

$x=0$, $y=$ beliebig; $x=1$, $y=1$; $x=2$, $y=2$.

O.

---

Moret-Blanc. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 44-46.

Die Gleichung $x^y = y^x + 1$ hat zu positiven ganzzahligen Lösungen nur:

$y = 0$, $x$ willkürlich; $y = 1$, $x = 2$; $y = 2$, $x = 3$.

O.

---

W. Shanks. On the numbers of figures in the period of each reciprocal of a prime from 53000 to 60000. Proc. of London XXIV. 392.

Die Tafeln waren früher bis 40000 berechnet. Eine Erweiterung bis zu 53000 hatte der Verfasser der Royal Society übergeben. Jetzt folgt eine Erweiterung von 53000 bis 60000.

Cly. (O.)

---

## Capitel 2.

## Theorie der Formen.

---

## Capitel 3.

## Kettenbrüche.

H. Eggers. Calculation of radicals. Analyst III. 100-102.

Beweis der Formel, welche Näherungswerthe $n^{\text{ter}}$ Wurzeln von Zahlen giebt.

Glr. (O.)

---

A. Evans. Extraction of roots. Analyst III. 10-13.

Anwendung der Näherungsformel

$$\frac{N}{nr^{n-1}} + \frac{n-1}{n} r = R$$

zur Ausziehung von Wurzeln. Dabei ist $N$ die Zahl, welche radicirt werden soll, $r$ ein Näherungswerth, $R$ die wahre Wurzel, $n$ der Wurzelexponent.

Glr. (O.)

---

H. J. S. SMITH. Note on continued fractions. Messenger (2) VI. 1—14, Rep. Brit. Ass. 1875.

Es sei

$$\frac{p}{q} = \mu_1 + \frac{1}{\mu_2 + \frac{1}{\mu_3 + \cdots + \frac{1}{\mu_\nu}}},$$

wo $p$ und $q$ zwei relative Primzahlen ($p$ die grössere) sind. Man schreibe $P = \frac{1}{p}$ und $Q = \frac{1}{q}$ und theile eine Linie 01 von der Längeneinheit, gemessen von links nach rechts, in $p$ gleiche Theile durch die Punkte

$$1P,\ 2P,\ 3P, \ldots\ (p-1)P,$$

und auch in $q$ gleiche Theile durch die Punkte

$$1Q,\ 2Q,\ 3Q, \ldots\ (q-1)Q.$$

Man rechne 0 weder als einen Punkt $P$, noch als einen Punkt $Q$, wohl aber 1 als $P$-Punkt und $Q$-Punkt, so dass man im Ganzen $p$ Punkte $P$ und $q$ Punkte $Q$ hat, von denen keine zusammenfallen, ausgenommen die beiden letzten Punkte, die in 1 zusammenfallen.

Der Zweck der Arbeit ist, zu zeigen, dass die gegenseitige Lage der Punkte $P$ und $Q$ auf der Linie 01 oder, was dasselbe ist, die Ordnung nach der Grösse der gewöhnlichen Brüche $\frac{x}{p}$ und $\frac{y}{q}$ gefolgert werden kann aus der Entwickelung von $\frac{p}{q}$ in einen Kettenbruch, und dass umgekehrt die Entwickelung von $\frac{p}{q}$ gefolgert werden kann aus einer Betrachtung der Lage der Punkte.

Ein Zusatz enthält den Beweis des Satzes, den Lagrange im 2. Paragraphen seiner Zusätze zu Euler's Algebra gegeben hat, und ferner einige Untersuchungen über diesen Satz und die Theorie der Kettenbrüche. Den Schluss bildet eine geometrische Deutung des Lagrange'schen Satzes.

Glr. (O.)

Th. Muir. New general formula for the transformation of infinite series into continued fractions. Trans. of Edinb. XXVII. 467-471.

Es wird gezeigt, dass

$$1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots = 1+\cfrac{A_1x}{1-\cfrac{A_2x}{A_1-\cfrac{A_3x}{A_2-\cfrac{A_1A_4x}{A_3-\cfrac{A_2A_5x}{A_4-\cdots}}}}},$$

wo $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5\ldots$ bezeichnen resp.

$$a_1,\ a_2,\ \begin{vmatrix} a_1, & a_2 \\ a_2, & a_3 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_2, & a_3 \\ a_3, & a_4 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & a_3 \\ a_2, & a_3, & a_4 \\ a_3, & a_4, & a_5 \end{vmatrix},\ldots$$

Dies enthält die Gauss'sche Transformation von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ in einen Kettenbruch als speciellen Fall.

Herr Muir giebt auch die Werthe von $\gamma_1$, $\gamma_2, \ldots$ in Determinantenform, wenn $\frac{1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots}{1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots}$ transformirt wird in den Kettenbruch

$$1+\cfrac{\gamma_1x}{1-\cfrac{\gamma_2x}{\gamma_1-\cfrac{\gamma_3x}{\gamma_2-\cfrac{\gamma_1\gamma_4x}{\gamma_3-\cdots}}}}.$$

Glr. (O.)

---

S. Günther. Ueber aufsteigende Kettenbrüche. Schlömilch Z. XXI. 178-192.

Die Zähler und Nenner aufsteigender Kettenbrüche werden in Determinanten-Form dargestellt; hieraus folgt der Lagrange'-sche Satz vom Zusammenhang auf- und absteigender Kettenbrüche. Da sich die Darstellung von Reihen in aufsteigende Kettenbrüche unmittelbar ergiebt, folgt durch jene Transformation auch die Darstellung derselben in gewöhnliche Kettenbrüche.

Ihr unmittelbar ersichtlicher Zusammenhang mit Gleichungen wird nachgewiesen, und daraus werden einige Sätze über Determinanten in ihrem Zusammenhang mit Gleichungen abgeleitet. Um die Convergenzbeweise für die obige Verwandlung von Reihen in Kettenbrüche zu vermeiden, wird nachgewiesen, dass beide verschiedene Formen nicht nur gleich, sondern auch „äquivalent“ sind, d. h. dass nicht nur die Resultate, sondern auch die zu ihnen führenden einzelnen Näherungswerthe in beiden Fällen übereinstimmen. No.

---

Th. Muir. On convergents. Rep. Brit. Ass. 1876.

Lagrange hat folgende Regel aufgestellt, um den gewöhnlichen Bruch zu finden, der einem Decimalbruch mit vielen Stellen am nächsten kommt: „Verwandle den gegebenen Bruch in einen Kettenbruch mit 1 als Theilzählern und positiven ganzen Theilnennern. Die Näherungswerthe dieses Kettenbruchs werden der gesuchte Bruch sein.“ Der Verfasser zeigt an dem Beispiel der Zahl $\pi$, dass dies ein Irrthum ist. Er entwickelt $\pi$ in den Kettenbruch

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}}.$$

Dann sind die Näherungswerthe $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$.

Lagrange sagt nun, dass der Bruch $\frac{3}{1}$ dem wahren Werthe näher komme, als irgend ein anderer Bruch, dessen Nenner kleiner ist als 7, und ebenso, dass $\frac{22}{7}$ dem wahren Werthe näher komme, als irgend ein Bruch, dessen Nenner kleiner als 106 u. s. f.“ Es kommen nun aber die Brüche $3+\frac{1}{4}$, $3+\frac{1}{5}$, $3+\frac{1}{6}$ dem wahren Werthe von $\pi$ näher als $\frac{3}{1}$ und $3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{8}}$,

$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{9}}$ näher, als $3+\frac{1}{7}$ u. s. f. Csy. (O.)

# Vierter Abschnitt.

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

D. André. Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications. Ann. de l'Éc. N. (2) V. 155-198.

Reguläre Combinationen der $p^{ten}$ Ordnung von $m$ Elementen zu je $n$, nennt der Verfasser diejenigen Combinationen, welche aus $m$ Elementen zu je $n$ in der Weise gebildet sind, dass jedes Element in einer Complexion höchstens $p$-fach wiederholt vorkommt. Die regulären Combinationen der $p^{ten}$ Ordnung sind somit allgemeiner als die gewöhnlichen aus $m$ Elementen zu je $n$ gebildeten Combinationen ohne und mit Wiederholung. Nach des Verfassers Definition würden die letzteren zu den regulären Combinationen der ersten, resp. der $n^{ten}$ Ordnung gehören. Nachdem der Verfasser im ersten Capitel seiner Abhandlung diese Definitionen eingeführt und auf die Verwendbarkeit der regulären Combinationen in der Algebra und Wahrscheinlichkeitsrechnung hingewiesen hat, entwickelt er im zweiten Capitel die wichtigsten Eigenschaften der regulären Combinationen, deren Anzahl er im dritten Abschnitt auf vier verschiedene Weisen berechnet. Es ergiebt sich z. B., dass die Coefficienten in der Entwickelung des Polynoms

$$(1+x+x^2+\cdots x^p)^m$$

die Anzahlen der regulären Combinationen der $p^{ten}$ Ordnung von $m$ Elementen ausdrücken. Im vierten und fünften Capitel werden die in den vorhergegangenen Abschnitten gewonnenen Formeln und Resultate weiter ausgeführt und angewendet. Schl.

A. Vachette. Permutations rectilignes de $3q$ lettres égales 3 à 3, quand 3 lettres consécutives sont distinctes; calcul de la formule générale, applications. Nouv. Ann. 2) XV. 114-126; 145-154: 193-205.

Fortsetzung der im XIII. und XIV. Bande der Nouv. Ann. enthaltenen Untersuchungen desselben Verfassers über geradlinige Permutationen, über welche im VI. Bande dieses Jahrbuchs p. 137, und im VII. Bande p. 107 referirt worden ist. Schl.

---

J. W. L. Glaisher. On the $n^{th}$ roots of unity. Rep. Brit. Ass. 1874.

Ist $x$ eine $n^{te}$ Wurzel der Einheit, und bezeichnet man die Differenzen $1-x$, $1-x^2$, $1-x^3$,... $1-x^{n-1}$ mit den Zahlzeichen 1, 2, 3...$n-1$, so ist die Summe aller Producte aus je 4 dieser Elemente rational, sobald man die Auswahl dieser Elemente nach einem Gesetze trifft, das mit der Folge oder Nichtfolge zusammenhängt. Csy. (M.)

---

Venn. The logic of chance. An essay on the foundations and province of the theory of probability, with special reference to its logical barings and its applications in moral and mental science. London.

---

C. Tychsen. En Note til et vanskeligt Punkt i Laplace „Théorie analytique des Probabilités." Paris 1814. Overs. v. Kopenh. 1876. 12-23.

In seiner „Théorie anal. des Probabilités p. 225 hat Laplace von einem berühmten Probleme über die Dauer eines Spieles, welches schon von Montmort, Nic. Bernoulli und de Moivre untersucht worden war, eine allgemeine Lösung mittelst generirender Functionen gegeben, welche jedoch in ihren Einzelheiten sehr schwer zu verstehen ist. Später ist eine ähnliche Aufgabe von Lagrange in den Mém. de l'acad. de Berlin 1775 behandelt worden, und die Betrachtung der von ihm benutzten Methode hat Herrn Tychsen veranlasst, hier auf ähnliche Weise die Lösung

des oben erwähnten Problems zu versuchen. Es gelingt dies auch vollständig, indem er nach der Integration der Differenzengleichung des Problems mit Hülfe von verschiedenen endlichen Reihen, schliesslich die Lösung in der eben von Laplace gegebenen Form erhält. Als Nebenresultate findet er aus einer doppelten Lösung für einen speciellen Fall, dass der Werth des bestimmten Integrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{b-1}\varphi \sin b\varphi \sin\varphi}{p^2 - 2pq\cos 2\varphi + q^2}\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{b+1}} \cdot \frac{1}{p^b}$$

ist, wenn $p$ und $q$ zwei positive Zahlen bezeichnen, für welche $p+q=1$ und ausserdem $p>q$ ist. Gm.

---

E. J. Stone. Sur le principe de la moyenne arithmétique. Astr. Nachr. LXXXVIII. 61-64.

J. V. Schiaparelli. Sur le principe de la moyenne arithmétique. Astr. Nachr. LXXXVIII. 141-142.

In den Astr. Nachr. LXXXVIII. hat Herr Schiaparelli einen Beweis für den Satz vom arithmetischen Mittel publicirt (F. d. M. VII. 109), welcher sich auf folgende drei als Axiome angesehene Sätze stützt. 1) Der plausibelste Mittelwerth $F(a_1, a_2 \dots a_n)$ aus den $n$ gleich guten Messungen $a_1$ $a_2 \dots a_n$ muss stets denselben Betrag ergeben, welche Masseinheit man auch zu Grunde legt; 2) wenn man $F$ und die $a$ als Abscissen betrachtet, so muss die Lage von $F$ gegen die $a$ von der Lage des Nullpunktes unabhängig sein; 3) die Aenderung von $F$ muss stets dieselbe sein, welche der Grössen $a$ man auch um die beliebig kleine Quantität $\varepsilon$ variiren lässt. Indem Herr Stone die Priorität in Bezug auf den dritten, wesentlichsten Satz für sich reclamirt (Monthly Notices 1873), erhebt er gegen den ersten und zweiten Satz das Bedenken, dass $F$ Grössen enthalten könnte, welche zwar von den $a$ unabhängig, aber von der Masseinheit resp. dem Nullpunkte der Abscissen abhängig sein könnten, und dass desshalb die von Schiaparelli aus 1. und 2. gezogenen Folgerungen als nicht bewiesen anzu-

sehen seien. In seiner Erwiderung erkennt Herr Schiaparelli die Priorität Stone's in Bezug auf die obige Form des dritten Satzes an, macht aber darauf aufmerksam, dass er das aus diesem Satze folgende System von Gleichungen bereits 1868 benutzt habe (Sul principio della media aritmetica. Rend. Ist. Lomb 1868 s. F. d. M. I. p. 75.) B.

---

R. A. Mees. Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus einer endlichen Zahl von Beobachtungen. Schlömilch Z. XXI. 126-128.

Erwiderung auf eine Kritik von Helmert (siehe F. d. M. VII. 112-113.). B.

---

R. Helmert. Ueber die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit im Zusammenhange stehende Fragen. Schlömilch Z. XXI. 192-219.

Den Hauptinhalt der vorliegenden Arbeit bildet die Behandlung der Aufgabe, die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass die Summe der $m^{ten}$ Potenzen von $n$ Beobachtungsfehlern unter Voraussetzung eines gegebenen Fehlergesetzes zwischen zwei vorgeschriebenen, unendlich wenig von einander verschiedenen Grenzen liege. Die Lösung dieser Aufgabe führt dann sofort zur Erledigung der anderen, praktisch wichtigen Aufgabe, nämlich die Unsicherheit des aus den $m^{ten}$ Potenzen abgeleiteten wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers bei einer endlichen Anzahl von Beobachtungen anzugeben. Besonders ausführlich wird der Fall des Gauss'schen Fehlergesetzes und der einer constanten Fehlerwahrscheinlichkeit erörtert und die günstigsten Hypothesen zur Ableitung des Präcisionsmasses discutirt. Es verdient noch erwähnt zu werden, dass der Verfasser die analytischen Schwierigkeiten, welche die Aufgabe bietet, durch die Anwendung numerischer Hülfsmittel umgeht. B.

---

R. Helmert. Die Genauigkeit der Formel von Peters zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit. Astr. Nachr. LXXXVIII. 113-132.

Der Inhalt dieses interessanten Aufsatzes giebt wesentlich mehr als der Titel erwarten lässt, denn der Verfasser leitet den mittleren Fehler nicht bloss der von Peters gegebenen Formel (v. F. d. M. VII. 113) ab, sondern untersucht auch in gleich eingehender Weise die übliche auf der Methode der kleinsten Quadrate beruhende Formel, ferner den von Fechner im Jubelbande von Pogg. Ann. gegebenen Ausdruck und die Formel, welche von Jordan und von Andrae auf die Benutzung der Beobachtungsdifferenzen basirt ist. Da die Entwickelungen eine auszugsweise Wiedergabe nicht zulassen, so mögen hier nur die verschiedenen Formeln für den wahrscheinlichen Fehler von $n$ Beobachtungen angesetzt werden, in denen die $\lambda$ die Abweichungen der Beobachtungen von ihrem Mittel, die $d$ die absoluten Beträge der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Beobachtungsdifferenzen bezeichnen und das Zeichen [ ] die übliche Bedeutung hat.

Peters:

$$\varrho_1 = 0.84535\cdots\frac{[abs.B.\lambda]}{\sqrt{n(n-1)}}(1\pm\mu_1),$$

$$\mu_1^2 = \frac{1}{n}\left\{\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{n-1}-n+\sqrt{n(n-2)}\right\};$$

Gauss:

$$\varrho_2 = 0.67449\ldots\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}(1\pm\mu_2),$$

$$\mu_2^2 = 2-\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\sqrt{\frac{8}{n-1}};$$

Fechner:

$$\varrho_3 = 0.84535\cdots\frac{[abs.B.\lambda]}{\sqrt{n\left(n-\frac{4-\pi}{2}\right)}}(1\pm\mu_3),$$

$$\mu_3^2 = 2-\sqrt{\frac{8(n-1)}{\pi+2n-4}};$$

Jordan-Andrae:

$$\varrho_4 = 0.84535\cdots \frac{[d]\sqrt{2}}{n(n-1)}(1 \pm \mu_4),$$

$$\mu_4^2 = \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n+1}{3}\pi + 2(n-2)\sqrt{3} - 4n + 1\right).$$

B.

---

C. H. Kummel. New investigation of the law of errors of observation. Analyst III. 133-140, 165-171.

Es wird eine grosse Zahl von Fehlern vorausgesetzt, welche alle zwischen +1 und —1 liegen. Dies giebt das Binomialgesetz, aus dem dann das Exponentialgesetz abgeleitet wird.

Glr. (O.)

C. and F. Chambers. On the mathematical expression of observations of complex periodical phenomena. Phil. Trans. CLXV. 361-402.

---

L. Seidel. Ueber die Probabilitäten solcher Ereignisse, welche nur selten vorkommen, obgleich sie unbeschränkt oft möglich sind. Münch. Ber. 1876. 44-50.

Der Autor definirt das zu lösende Problem selbst folgendermassen: „Ein Ereigniss $A$ kann in einer unbeschränkt grossen, oder doch in einer sehr grossen und nicht näher bekannten Anzahl von Einzelfällen, die von einander unabhängig sind und alle als gleich möglich gelten, möglicherweise zur Verwirklichung kommen; es bestehen aber dafür, dass es gar nicht, oder im Ganzen gerade einmal, gerade zweimal etc. realisirt wird, endliche und nicht der Einheit ganz nahe kommende Wahrscheinlichkeiten $y_0$, $y_1$, $y_2\cdots$ Eine dieser Grössen ist gegeben, wie bestimmen sich hiernach die übrigen?" So kann man fragen, wie gross die Wahrscheinlichkeit sei, dass in jedem Jahre grade Ein mit blossem Auge sichtbarer Komet erscheine. Man hat es hier mit Fragen zu thun, welche sich dem Bernoulli'schen Gesetze der grossen Zahlen nicht eigentlich unterordnen und deshalb eine gesonderte Lösung erheischen. Ist allgemein $N$ eine Anzahl un-

abhängiger Processe, deren jeder mit der Wahrscheinlichkeit $p$ das Ereigniss $A$ herbeiführen kann, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass $A$ grade $n$ mal eintrete,

$$z_n = \frac{1}{n!} N(N-1)\dots(N-n+1)\, p^n (1-p)^{N-n}.$$

Nähern dann für unseren Fall die $z_0, z_1, z_2 \dots$ sich gewissen endlichen Grenzen $y_0, y_1, y_2$, so findet sich, unter $\lambda$ eine positive Constante verstanden, als Lösung der gestellten Aufgabe

$$y_n = \frac{1}{n!} e^{-\lambda} \lambda^n; \quad y_0 = e^{-\lambda}$$

$\lambda$ ist dabei der Mittelwerth, „wie er im grossen Durchschnitt aus vielen beobachteten Werthen von $n$ zu erwarten ist". Gr.

---

E. J. STONE. On the most probable result, which can be derived from a number of direct determinations with assigned weights. Monthl. Not. XXXVI. 290-292

Erweiterung einer früheren Arbeit (Monthl. Not. XXXIII. 570-572 1873, siehe F. d. M. V. p. 122). Das angenommene Princip geht dahin, dass ein Fehler $h$ in $x$ denselben Fehler in dem wahrscheinlichsten Werthe hervorbringen wird, wie ein Fehler $h$ in $x_2$, $x_3$ oder $x_n$, wo $x_1 \dots x_n$ die Beobachtungen sind.

Glr. (O.)

---

A. PÁNEK. Das Binominaltheorem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Casopis V. (Böhmisch.)

Betrachtungen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche auf das Binomialtheorem Bezug haben. W.

---

A. PÁNEK. Beitrag zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Casopis V. (Böhmisch).

W.

---

L. LORENZ. Om Udförelsen af Beregningerne efter de mindste Kvadraters Methode. Zeuthen Tidsskr. (3) VI. 33-37.

In einer früheren Abhandlung (Zeuthen Tidskr. 1872 p. 1 siehe F. d. M. IV. p. 94) hat der Verfasser eine neue Darstellung

der Methode der kleinsten Quadrate gegeben. Hier wird als Supplement derselben ein Schema aufgestellt, nach welchem die Rechnung demgemäss auszuführen sei. Das hier angegebene Verfahren kann in besonderen Fällen gewiss seinen Nutzen haben, insbesondere wenn es sich um die Darstellung einer Reihe von Beobachtungen mittelst einer continuirlichen Formel z. B. einer Potenzenreihe handelt. Gm.

---

C. J. J. Ninck Blok. Overzicht van de methode der kleinste kwadraten. Diss. Leiden.

Dem Titel zu Folge enthält das Werkchen nur eine kurze Uebersicht über Ursprung und Entwickelung der Theorie der kleinsten Quadrate. G.

---

Ferrero. Esposizione del metodo dei minimi quadrati. Firenze.

---

Safford. On the method of least squares. Proc. Am. Acc. X. 193-201.

---

Skinner. Principles of approximate computation. New-York.

---

D. J. Korteweg. Over de waarschynlijkheid van de verschillende mogelyke uitkomsten eener verkiezing, waarby stemmers van tweierlei kleur zich by loting in afdeelingen verdeelen. Nieuw Arch. II. 40-61.

Siehe F. d. M. VII. p. 116. G.

---

H. Westergaard. Den moralske Formul og det moralske Haab. Zeuthen Tidsskr. (3) VI. 11-15.

Daniel Bernoulli hat bekanntlich für die Nutzungswerthe (fortune morale) eines Vermögens den Ausdruck $y = kl x + c$ angenommen. Allgemeiner könnte man zu ähnlichen Resultaten,

wie die von ihm mittelst dieser Hypothese erhaltenen, gelangen, wenn nur gefordert wird, dass die Function $y$ mit wachsendem $x$ stetig wachsend ist, aber immer langsamer, so dass $\frac{dy}{dx}$ positiv, $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ wird. Unter dieser Voraussetzung wird mittelst der Methoden der Variationsrechnung gezeigt, dass für eine Gesellschaft von mehreren Personen die Summe der moralischen Vermögen ein Maximum sein wird, wenn das vorhandene Vermögen unter sämmtliche Personen gleichmässig vertheilt wird. Ebenso werden verschiedene Anwendungen auf Spiel und Versicherungswesen gemacht. Gm.

---

J. Lewin. Bericht über die zur Berechnung von Sterbetafeln an die Statistik zu stellenden Anforderungen. Budapest.

Das einzige, was aus dieser Schrift einigermassen die Mathematik berührt, ist der Vorschlag einer nach 2 Dimensionen sich ausdehnenden Geburts- und Sterbetafel, auf welcher sich die statistischen Grössen jeder Art sollen abmessen lassen, deren Ausführung jedoch aus mehreren sehr naheliegenden Gründen unmöglich ist. H.

---

H. M. Taylor. Contribution to the mathematics of the checs board. Rep. Brit Ass. 1875.

Csy.

---

H. M. Taylor. On the relative values of the pieces in checs. Phil. Mag. 1876.

Versuche, den verschiedenen Werth der einzelnen Schachfiguren mathematisch zu fixiren, sind seit Raedell und Jänisch mehrfach, jedoch nicht mit besonderem Erfolge, unternommen worden. Die verbesserten Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung gestatten es, die Sache von einer ganz anderen Seite her anzugreifen, wie dies aus Taylor's Abhandlung deutlich her-

vorgeht. Taylor unterscheidet von dem allgemein üblichen Schach das „safe check", dessen König unfähig sein soll, eine andere Figur wegzuschlagen, und stellt für jede Gattung seine Regeln besonders auf. Um das Verfahren an einem complicirteren Falle klarzustellen, wählen wir das letzte Beispiel und fragen: Wenn der König nebst zwei Thürmen in völlig willkürlicher Weise auf das Brett gesetzt wird, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er sich in Schach befinde? Thurm $A$ für sich kann $n^2$ Felder occupiren, dann bleiben für $B$ noch $(n^2-1)$, für den König $(n^2-2)$. Decken sich die Thürme gegenseitig, so sind $(3n-4)$ Schachpositionen denkbar, thun sie dies nicht, so giebt es deren $(4n-6)$. Bilden wir sonach die Anzahl der günstigen Fälle, so müssen wir noch berücksichtigen, dass $2(n-1)$ Felder die entsprechende Stellung von $A$ und $B$, $(n-1)$ hingegen die entgegengesetzte erlauben; jene Anzahl ist also

$$n^2[(3n-4)(2n-2)+(4n-6)(n-1)^2].$$

Die Anzahl der möglichen Fälle ist dem Obigen zufolge gleich $n^2(n^2-1)(n^2-2)$. Durch geeignetes Heben findet sich die Wahrscheinlichkeit

$$w=\frac{2(2n^2-2n-1)}{(n+1)(n^2-2)}.$$

Folgende Tabelle lässt für die verschiedenen Combinationen die Wahrscheinlichkeiten erkennen:

$$\text{Bauer: } \frac{8(n-2)}{n^2(n+1)}; \quad \frac{8(n-2)}{n^2(n+1)}$$

$$\text{Läufer: } \tfrac{2}{3}\cdot\frac{2n-1}{n(n+1)}; \quad \tfrac{2}{3}\cdot\frac{(n-2)(2n-3)}{n^2(n+1)}$$

$$\text{Thurm: } \frac{2}{n+1}; \quad \frac{2(n-2)}{n(n+1)}$$

$$\text{Königin: } \tfrac{2}{3}\cdot\frac{5n-1}{n(n+1)}; \quad \tfrac{2}{3}\cdot\frac{(n-2)(5n-3)}{n^2(n+1)}.$$

Die erste Zahl bedeutet stets das gewöhnliche, die letzte das „sichere" Schach von $n^2$ Feldern. Der Springer ward, wohl als zu einfach, nicht mit berücksichtigt. Gr.

J. W. L. GLAISHER. On the problem of the eight queens. Phil. Mag. 1874.

Referent hatte im 56. Bande des „Arch. d. Math. u. Phys." ein Verfahren angegeben, die möglichen Stellungen, welche $n$ Damen auf einem Schachbrett von $n^2$ Feldern einnehmen können, ohne sich zu stören, durch Ausrechnung einer gewissen Determinante aufzufinden. Der Verfasser nimmt dasselbe auf und bringt daran so wesentliche Verbesserungen an, dass dasselbe — worauf damals verzichtet worden war — auch für höhere Werthe von $n$ ohne Weiteres angewendet werden kann. Gr.

---

Weitere Lösungen von Aufgaben über Wahrscheinlichkeiten bei Spielen etc. von A. MARTIN, H. G. DAY, S. TEBAY, R. F. SCOTT, E. B. ELLIOTT, C. LEUDESDORF finden sich Educ. Times XXV. 46, 52. 78; XXVI. 25, 33, 81, 109, 111.

O.

---

A. MARTIN. Solution of a question (4719). Educ. Times XXV. 18-19.

$A$ sagt unter $a$ Malen $b$ mal die Wahrheit; dieselben Zahlen sind für drei andere Personen $B$, $C$, $D$ bekannt. $A$ sagt nun aus, $B$ habe etwas behauptet, $C$ dagegen, $D$ habe das Gegentheil behauptet. Es wird die Wahrscheinlichkeit der Behauptung untersucht. Das Resultat, welches Herr Martin findet, stimmt mit dem von Herrn Todhunter in seiner Algebra (4. Auflage) Art. 743 gefundenen nicht überein. Die Differenz zwischen den Resultaten ist noch nicht aufgeklärt. O.

---

H. G. DAY. Solution of a question (4939). Educ. Times XXV. 64-66.

In einem gegebenen gleichseitigen Dreieck werden 2 Punkte willkürlich angenommen und eine Gerade willkürlich durch das

Dreieck gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Gerade die beiden Punkte trennt, ist

$$\frac{2}{15}+\frac{\sqrt{3}}{5\pi}$$

O.

---

St. J. Stephen. Solution of a question (4975). Educ. Times XXVI. 44.

Drei gerade Linien werden willkürlich durch einen gegebenen Kreis gezogen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihre 3 Schnittpunkte innerhalb des Kreises liegen, $(\frac{1}{4})^3$.

O.

H. G. Day. Solution of a question (4942). Educ. Times XXVI. 23.

Ein Halbkreis werde durch eine Ordinate in 2 Theile getheilt und in beide Theile Kreise beschrieben. Die mittlere Entfernung ihrer Mittelpunkte ist dann

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} k \sin\theta \, d\theta.$$

O.

---

A. Martin, E. B. Seitz, R. J. Adcock, J. E. Hendricks. Probability problems. Analyst III. 124-125, 152-154.

1) Ein Sector, der kleiner als ein Halbkreis, wird von einem gegebenen Kreise mit dem Radius $r$ geschnitten und ein Kreis in ihm beschrieben. Die mittlere Fläche dieses Kreises ist $r^2(\pi - {}^8/_3)$. 2) Die mittlere Fläche von all den spitzwinkligen Dreiecken zu finden, die in eine gegebene Ellipse eingeschrieben werden können 3) Wenn 4 Ziegelsteine mit ihrer Längsaxe vertikal aufeinander gelegt werden, die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass der Pfeiler stehen kann.

Glr. (O.)

E. B. Seitz. Solution of a problem. Analyst III. 29-30.

Lösung der Frage: zu finden die mittlere Entfernung aller Punkte eines Kreises mit dem Radius $r$ von einem Punkte, dessen Entfernung vom Mittelpunkte $a$ ist. Glr. (O.)

---

E. B. Seitz and H. Heaton. Solution of a problem. Analyst III. 89-91.

Ein Kreis mit dem Radius $r$ ist willkürlich auf einen anderen gleichen Kreis gelegt. Der mittlere Inhalt der grössten Ellipse, die in den gemeinsamen Theil der beiden Kreise einbeschrieben werden kann, ist $\pi r^2(\frac{1}{2}\pi-\frac{4}{3})$. Glr. (O.)

---

Nash, C. Leudesdorf. Solution of a question (4444). Educ. Times XXV. 42.

Zwei gleiche Parabeln mit dem Parameter $4a$ haben denselben Brennpunkt. Ihre Axen bilden rechte Winkel. Eine von ihnen ist um 180° um den Brennpunkt in der Richtung gedreht, in der sich die Entfernung der Scheitel vergrössert. Dann ist der Mittelwerth der von den Curven eingeschlossenen Flächenstücke

$$\frac{320^2}{3\pi}\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\}.$$

O.

---

E. B. Seitz. Solution of a question (4849). Educ. Times XXV. 54.

Der Mittelwerth des Flächeninhalts eines sphärischen Dreiecks ist

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi r^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\pi r^2,$$

gleich dem Inhalt eines Dreiecks mit 3 rechten Winkeln.

O.

---

J. Wolstenholme. Solution of a question (4832). Educ. Times XXV. 30.

Zieht man in einem vertikalen Kreise eine gerade Linie quer durch denselben, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Fallzeit eines Theilchens durch die Sehne grösser ist, als durch den vertikalen Durchmesser, gleich $\frac{2}{\pi}$.

O.

---

Weitere Lösungen von Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeiten von S. TEBAY, H. G. DAY, A. MARTIN, L. TANNER, E. B. ELLIOTT, C. LEUDESDORF finden sich Educ. Times XXV. 69, 76, 111; XXVI. 53, 62, 74, 77.

O.

# Fünfter Abschnitt.

## Reihen.

### Capitel 1.

### Allgemeines.

A. Benthem. Convergentie van reeksen met complexe termen. Nieuw Arch. II. 186-192.

Der Verfasser bestimmt die Convergenz von Reihen mit complexen Gliedern. Alsdann stellt er die Regel auf, nach welcher auf die Convergenz solcher Reihen geschlossen werden kann. G.

---

O. Fabian. Summirung der unendlichen und zwar schwach convergenten Reihen. Krak. Denkschr. II. (Polnisch).

Die durch den Verfasser gegebene Methode kann nicht als genügend begründet anerkannt werden, da sie sich auf die geometrische Darstellungsweise der Summe der Reihen stützt. Einfache Beispiele zur Verificirung der Methode sind angegeben. Bcki.

---

G. Darboux. Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable. Liouville J. (3) II. 291-312.

Das geradlinige Integral

$$\int_a^x f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx,$$

worin die Grenzen als reell, $f(x)$ als durchaus positiv und $\varphi(x)$ als beliebige complexe Function von $x$ vorausgesetzt werden, überschreitet seinem absoluten Betrage nach die Grenze

$$g \int_a^x f(x)\, dx$$

nicht, wenn $g$ die obere Grenze des absoluten Betrages von $\varphi(x)$ bedeutet. Man kann also setzen

$$(1) \qquad \int_a^x f(x)\, \varphi(x)\, dx = \lambda \varphi(x_1) \cdot \int_a^x f(x)\, dx,$$

unter $x_1$ einen Werth zwischen $a$ und $x$, unter $\lambda$ eine Zahl, deren absoluter Betrag die Einheit nicht überschreitet, verstanden. Für reelle Functionen kann man $\lambda = 1$ setzen. Uebrigens erscheint diese Formel auch als Corollar eines allgemeinen Satzes des Herrn Weierstrass über den Quotienten

$$\int_a^x f \cdot \varphi \cdot dx : \int_a^x f \cdot dx.$$

Die Function von $t$

$$\Psi(t) = \varphi^n(t)\, f(x+ht) - h\varphi^{n-1}(t)\, f'(x+ht) + h^2 \varphi^{n-2}(t)\, f''(x+ht) - \cdots + (-1)^n h^n \varphi(t)\, f^n(x+ht),$$

hat, wenn $\varphi(t)$ eine ganze Function $n^{ten}$ Grades von $t$ bezeichnet, den Differentialquotienten

$$\Psi'(t) = (-1)^n h^{n+1} \varphi(t)\, f^{n+1}(x+ht),$$

woraus durch Integration zwischen den Grenzen 0 und 1 folgt

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\varphi^n(0)\{f(x+h) - f(x)\} \\ &= h\{\varphi^{n-1}(1) f'(x+h) - \varphi^{n-1}(0) f'(x)\} \\ &- h^2 \{\varphi^{n-2}(1) f''(x+h) - \varphi^{n-2}(0) f''(x)\} + \cdots \\ &+ (-1)^{n-1} h^n \{\varphi(1) f^n(x+h) - \varphi(0) f^n(x)\} + R_n. \end{aligned} \right.$$

$$R_n = (-1)^n h^{n+1} \int_0^1 \varphi(t) \cdot f^{n+1}(x+ht) \cdot dt.$$

Durch verschiedene Annahmen über das Polynom $\varphi(t)$ erhält man die meisten der bekannten Reihenentwickelungen und an-

dere neue, mit Ausdrücken des Restes, welche durch die Formel (1) sich auch auf den Fall complexer Veränderlicher anwenden lassen. Ausser der Annahme

$$n!\,\varphi(t) = (t-1)^n,$$

welche auf die Taylor'sche Reihe zurückführt, werden noch die folgenden betrachtet:

$$(1) \qquad \varphi(t) = t^n(1-t)^n;$$

$$(2) \qquad \varphi(t) = \frac{1}{n!}\left(t + \frac{r}{1-r}\right)^n.$$

3) Die Voraussetzung $\varphi(t) =$ der $n^{\text{ten}}$ Bernoulli'schen Function

$$\varphi_n(t) \equiv t^n - \frac{n}{2}t^{n-1} + \binom{n}{2}B_1 t^{n-2} - \binom{n}{4}B_3 t^{n-4} + \cdots,$$

führt auf die Formel Mac-Laurin's

$$\begin{aligned} hf'(x) = f(x+h) - f(x) - \frac{h}{2}\{f'(x+h) - f'(x)\} \\ + \frac{B_1 h^2}{1.2}\{f''(x+h) - f''(x)\} - \cdots \\ + (-1)^n \frac{B_{2n-3}h^{2n-2}}{(2n-2)!}\{f^{2n-2}(x+h) - f^{2n-2}(x)\} \\ + \frac{(-1)^{n+1}\lambda B_{2n-1}h^{2n+1}}{(2n)!} f^{n+1}(x+\theta h) \quad (0 \gtreqless \theta \leqq 1), \end{aligned}$$

welche im Falle einer ungraden Function $f(x)$ ($h = -2x$ gesetzt) zu Mac-Laurin'schen Reihenentwickelungen benutzt werden kann.

4) Nimmt man

$$\varphi(t) = \frac{2^{n+1}}{n+1}\left\{\varphi_{n+1}\left(\frac{t+1}{2}\right) - \varphi_{n+1}\left(\frac{t}{2}\right)\right\},$$

so ist

$$\varphi^{n-r}(0) = \varphi^{n-r}(1)$$

und man erhält eine von Boole herrührende Formel.

5) $\varphi(t)$ genügt der Functionalgleichung

$$\varphi(t+1) - r\varphi(t) = \frac{(1-r)\,x^n}{n!} \qquad (0 < r < 1).$$

Es giebt nur eine einzige solche Function $n^{\text{ten}}$ Grades, mittelst welcher sich die endliche Reihe

$$p^n + r(p-1)^{n-1} + r^2(p-2)^n + \cdots + r^{p-1}.1^n$$

summiren lässt.

6) Soll überhaupt in der Formel (2) der Grenzübergang $s = +\infty$ möglich sein, so müssen die Ableitungen der Polynome $\varphi(t)$ von demselben Grade sowohl für $t = 0$, als auch für $t = 1$ gleiche Resultate liefern. Dies ist sicher erfüllt, wenn jedes dieser Polynome die Ableitung des folgenden ist, z. B. bei der 2., 4. und 5. Annahme von $\varphi(t)$. Der Verfasser setzt ausserdem für $\varphi(t)$ ein Polynom von angegebener Beschaffenheit, welches ein specieller Fall der hypergeometrischen Reihe ist. St.

---

P. du Bois-Reymond. Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwickelung. Münch. Ber. 1876 225-237.

Es herscht allgemein die Ueberzeugung, die Stetigkeit einer Function sowie ihrer sämmtlichen Ableitungen innerhalb eines gewissen Intervalles liefere die Gewähr für deren Entwickelbarkeit nach dem Taylor'schen Lehrsatz. Da sich a priori durchaus nicht die Unrichtigkeit dieser Annahme darthun lässt, so stellt sich der Verfasser die Frage: „Giebt es mit ihren sämmtlichen Ableitungen stetige Functionen einer reellen Veränderlichen $x$, die für keinen besonderen Werth von $x$ einer besonderen Erklärung bedürfen, bei denen gleichwohl in einem Pnnkte $x = x_1$ die Taylor'sche Entwickelung .

$$f(x_1+h) = f(x_1) + hf'(x_1) + \cdots$$

für jeden Werth von $h$ versagt?" Dass es in der That solche analytische Formen gebe, dafür tritt der Verfasser den Thatbeweis an, indem er die Function

$$f(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p!} \cdot \frac{x^{2p}}{x^2 + a_p^2}, \quad \lim_{p=\infty} a_p = 0$$

discutirt. Er weist durch unmittelbare Ausrechnung nach, dass jeder Differentialquotient $f^{(n)}(x)$ ebenso wie $f(x)$ selbst durchaus continuirlich, eine Potenzreihenentwickelung dessungeachtet aber nicht möglich ist. Mehr beiläufig wird auch der sich ähnlich verhaltenden Grösse $e^{-x^{-2}}$ gedacht. Um weiterhin über den besonderen Charakter dieser „Stetigvieldeutigkeit" Aufschluss zu er-

halten, wird für $x$ die complexe Veränderliche $z = x+yi$ substituirt. Ist dies geschehen, so erkennt man, dass ein um den Punkt $z = 0$ zu construirender Convergenzkreis, von dessen Vorhandensein bekanntlich die Entwickelbarkeit abhängig ist, hier überhaupt nicht existirt. Nachdem so eine bestimmte Function fraglicher Natur bekannt ist, lassen sich durch gewisse Kunstgriffe andere Gebilde herstellen, welche die betreffende Singularität in jedem noch so kleinen Intervall aufweisen. In einem Schlussparagraphen wird die merkwürdige Eigenschaft der Function

$$\sum_{p=1}^{p=x} \mu_p \sin px, \quad \frac{1}{\mu_p} > p^m < (e^p)^m, \; (p = \infty)$$

hervorgehoben, für complexe Variable überhaupt zu verschwinden, für reelle dagegen zwar stetig, aber nicht entwickelbar zu sein.

Gr.

---

P. du Bois-Reymond. Recherches sur la convergence et la divergence des formules de représentation de Fourier. C. R. LXXXII. 756-757.

P. du Bois-Reymond. Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln. Clebsch Ann. X. 431-445.

P. du Bois-Reymond. Notiz über infinitäre Gleichheiten. Clebsch Ann. X. 576-578.

Anzeige und Zusätze zu einer Abhandlung, über welche im nächsten Bande des Jahrbuchs referirt werden soll. St.

---

P. du Bois-Reymond. Beweis, dass die Coefficienten der trigonometrischen Reihe

$$(1) \qquad f(x) = \sum (a_p \cos px + b_p \sin . px)$$

die Werthe

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, f(\alpha), \qquad a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, f(\alpha) \cos . p\alpha,$$

$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, f(\alpha) \sin . p\alpha$$

haben, jedesmal, wenn diese Integrale endlich und bestimmt sind. Münch. Abh. XII. 1. Abth. 119-166.

In seinem „Antrittsprogramme" führte der Herr Verfasser die *Unbestimmtheitsgrenzen* einer divergenten Reihe ein, einen Begriff, welcher für die Analysis von grösstem Nutzen ist, wie die vorliegende Abhandlung besonders schlagend darthut. Betrachtet man eine Veränderliche, z. B. die Summen

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = U_n \qquad (n = 1, 2 \ldots \text{in inf.}),$$

so existiren zwei Zahlen, zwischen denen $U_n$ für $\lim n = \infty$ schwankt. Die Zahlen $U_{n+m}$ ($m = 0, 1, \ldots$ in inf.) haben nämlich sowohl eine obere Grenze $B_n$, als eine untere $A_n$. Da bei wachsenden $n$ $B_n$ niemals zunimmt, so existirt $\lim B_n$ für $\lim n = +\infty$, und dieses ist die obere Grenze $B$ der Unbestimmtheit der Grössen $U_n$. In derselben Art giebt es auch eine untere Grenze $A < B$. Ist die unendliche Reihe $\Sigma u_n$ convergent, so ist $B = A$, welche Bedingung offenbar nicht bloss als nothwendig, sondern auch als hinreichend erscheint.

Der Beweis des im Titel erwähnten Satzes beruht auf dem Gedanken, die Summe der von Riemann angeführten Reihe

$$(2) \qquad F(x) = \frac{a_0 x^2}{2} - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p \cos px + b_p \sin . px}{p^2},$$

deren gleichmässige Convergenz für alle endlichen $x$ feststeht, falls nur

$$\lim a_p = \lim b_p = 0 \quad (p = \infty),$$

auszudrücken durch $f(x)$. Dann wird man, da sich die letztere Reihe gliedweise integriren lässt, zum Ausdrucke der Coefficienten $a_p$, $b_p$ durch $f(x)$ gelangen.

Nimmt man zunächst an, die Reihe (1) convergire für alle Werthe von $x$:

$$-\pi < x < +\pi$$

und ihre Summe $f(x)$ sei für dieselben stetig, so folgt nach einem Satze von Riemann sofort, dass für die Function

$$\Phi(x) = F(x) - F_1(x),$$

wo

$$F_1(x) = \int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} d\beta \, f(\beta).$$

der Grenzwerth des zweiten Differenzquotienten Null sei, so lange

$$-\pi < x < +\pi.$$

Da ausserdem wegen der Existenz des Integrales

$$\int_{-\pi}^{+\pi} fx\,dx$$

$\Phi(x)$ eine stetige Function ist für alle $x$:

$$-\pi \leqq x \leqq +\pi,$$

so kann man nach dem von Herrn Schwarz (Borchardt J. LXXII. p. 141) bewiesenen Satze schliessen, dass $\Phi(x)$ eine lineare Function von $x$ sei, für alle endlichen Werthe von $x$. Setzt man nun in den aus (2) folgenden Formeln

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F(\alpha).\cos n\alpha\,d\alpha = (-1)^n \frac{2\pi}{n^2} a_n - \frac{a_n}{n^2}\pi \text{ etc.}$$

$$F(x) = F_1(x) + c_0 + c_1 x,$$

so gelangt man durch Benutzung der partiellen Integration, welche aber genauer formulirt werden muss, als es früher üblich war (vgl. dieses Jahrbuch Bd. VII. p. 145), und eines weiteren Satzes von Riemann (Darstellbarkeit etc. Art. 10) sofort zu den Fourier'schen Ausdrücken für die Coefficienten $a_n$, $b_n$.

Das so eben auseinandergesetzte Beweisverfahren beruht ausser auf der Existenz des Integrales

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx$$

und dem Verschwinden von

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \text{ für } \lim n = \infty$$

auf dem Satze, dass $\varphi(x)$ eine lineare Function von $x$ ist. Dieser Satz gilt auch noch, wenn über $f(x)$ nichts weiter als die Endlichkeit und Integrabilität vorausgesetzt wird. Der Beweis begegnet aber grossen Schwierigkeiten. Da zur Integrirbarkeit von $f(x)$ nicht erforderlich ist, dass es für alle Werthe von $x$ im Intervalle von $-\pi$ bis $+\pi$ definirt sei, d. i. dass die Reihe (1) für alle diese Werthe convergire, so setze man

$$(3) \qquad f(x) = \frac{O(x)+U(x)}{2} + j\,\frac{O(x)-U(x)}{2} = \varphi(x) + j\psi(x),$$

wo $j$ eine willkürliche Zahl zwischen $-1$ und $+1$, $O(x)$ und $U(x)$ die Unbestimmtheitsgrenzen für die Reihe (1) bezeichnen.

Diese Formel stimmt auch für den Fall der Convergenz dieser Reihe, da nun

$$O(x) = U(x) = f(x)$$

ist. Als nothwendige und hinreichende Bedingung für die Integrirbarkeit der Function (3) findet man leicht, dass

$$(4) \qquad \lim \Sigma_n \delta_n \Delta_n \varphi(x) = 0 \qquad \lim \Sigma_n \delta_n \psi(x_n) = 0$$

für $\lim \delta_n = 0$ sein müsse, wo $\Delta_n \varphi(x)$ die grösste Schwankung von $\varphi(x)$ im Intervalle

$$a + \delta_1 + \cdots + \delta_{n-1} \leqq x \leqq a + \delta_1 + \cdots + \delta_{n-1} + \delta_n,$$

$\psi(x_n)$ die obere Grenze von $\psi(x)$ in eben demselben Intervalle bezeichnen.

Nunmehr betrachte man den zweiten Differenzquotienten von $\Phi(x)$:

$$\frac{\Delta^2 \Phi(x)}{\varepsilon^2} = \frac{\Delta^2 F(x)}{\varepsilon^2} - \frac{\Delta^2 F_1(x)}{\varepsilon^2}.$$

Zunächst beweist Herr du Bois-Reymond den Satz, „dass die lim ($\varepsilon = 0$) von

$$\frac{F(x+\varepsilon) - 2F(x) + F(x-\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

stets enthalten ist in der Form

$$\frac{O(x) + U(x)}{2} + j\left(\tfrac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)[O(x) - U(x)],$$

falls $j$ eine zwischen $-1$ und $+1$ gelegene Zahl vorstellt", d. h. die Unbestimmtheitsgrenzen von

$$\Delta^2 F(x) : \varepsilon^2 \text{ für } \lim \varepsilon = 0$$

sind höchstens die Zahlen

$$\frac{O(x) + U(x)}{2} \pm \left(\tfrac{3}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)\left[O(x) - U(x)\right].$$

Unmittelbar ergiebt sich, dass in demselben Sinne

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 F_1(x)}{\varepsilon^2} = \varphi^*(x) + j\psi^*(x),$$

wo $\varphi^*(x)$, $\psi^*(x)$ bezüglich zwischen den Unbestimmtheitsgrenzen von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ im Intervalle

$$x - \varepsilon \text{ bis } x + \varepsilon \; (\lim \varepsilon = 0)$$

schwanken. Fasst man beide Formeln zusammen, so schliesst man leicht, dass

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta^2 \Phi}{\varepsilon^2} = \Delta^* \varphi(x) + j\left(\tfrac{5}{2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)(x).$$

[Der numerische Coefficient wird wohl

$$2\left(2 + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}\right)$$

sein müssen.]

Hier bedeutet $\Delta^*\varphi(x)$ eine Zahl, die numerisch nicht grösser ist als die grösste Schwankung $\Delta\varphi(x)$ im Intervalle

$$x - \varepsilon \text{ bis } x + \varepsilon \; (\lim \varepsilon = 0);$$

$\Psi(x)$ die obere Grenze von $\psi(x)$ bezüglich desselben Intervalles. $j$ liegt wieder zwischen $-1$ und $+1$.

Aus vorstehender Formel folgt mittelst der Bedingungen (4), dass der zweite Differenzquotient von

$$G(x) = \sum_{p=0}^{p=n} \delta \Phi(x + p\delta)$$

durch aufeinanderfolgende Verkleinerung von $\delta$ und $\varepsilon$ beliebig klein gemacht werden kann. Und nun wird nach einem Verfahren, welches dem oben erwähnten des Herrn Schwarz ähnlich ist, geschlossen, dass für alle endlichen $x$ bei ganz beliebigem $a$

$$\int^{a} \Phi(x + \alpha)\, d\alpha = c_0 + c_1 x,$$

woraus endlich sich ergiebt

$$\Phi(x) = c_0 + c_1 x.$$

Dieser Satz bleibt ferner auch bestehen, wenn die Annahme der durchgängigen Endlichkeit von $f(x)$ fallen gelassen, und nur die Existenz des Integrales

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha$$

vorausgesetzt wird. Der Beweis wird geführt mit Hülfe des zweiten Satzes in Riemann a. a. O. Art. 8.

Schliesslich wird noch bemerkt, dass wenn für einen Werth $x = a$ $f(x)$ ohne unendlich viele Maxima so stark unendlich wird, dass

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha$$

divergirt, während jedoch

$$\lim (x-a) f(x) = 0 \text{ für } \lim x = a,$$

die Coefficienten $a_n$, $b_n$ der trigonometrischen Reihe durch die Hauptwerthe der Fourier'schen Integrale dargestellt werden.

St.

A. TÖPLER. Bemerkenswerthe Eigenschaft der periodischen Reihen. Wien. Anz. XIII. 205-209.

Die aus $n$ Gliedern bestehende Reihe $\Sigma a_k \sin kx$ soll durch passende Wahl der Coefficienten $a_k$ für alle Werthe des $x$ zwischen 0 und $\pi$ in möglichst nahe Uebereinstimmung mit den Werthen einer beliebigen Function $F(x)$ gebracht werden. Man findet für $a_k$ *unabhängig von n* den Coefficienten der Fourier'schen Reihe

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(x) \sin kx\, dx.$$

St.

L. SCHENDEL. Die Bernoulli'schen Functionen und das Taylor'sche Theorem nebst einem Beitrage zur analytischen Geometrie der Ebene in trilinearen Coordinaten. Jena. Costenoble.

Die erste der beiden in diesem Buche vereinigten Abhandlungen schliesst sich an des Verfassers früheren Aufsatz „Zur Theorie der Reihen" (s. F. d. M. III. p. 105) an. Es wird darin als Bernoulli'sche Function der Ausdruck

$$\varphi(x, m) = \sum_0^m i^{k+2} \binom{m-1}{k-1} a_{k-1} x^{m-k}$$

definirt, worin, wenn $B_{k-1}$, die $(k-1)^{\text{te}}$ Bernoulli'sche Zahl ist,

$$B_{k-1} = k \,.\, a_{k-1}.$$

Zusammengesetzte Bernoulli'sche Function wird der Ausdruck

$$\chi(x, m) = \varphi(x, m) - 2^m \varphi\left(\frac{x}{2}, m\right)$$

genannt. Eine wichtige Eigenschaft beider Functionen ist die,

dass eine Potenz sich in eine nach solchen Functionen fortschreitende endliche Reihe entwickeln lässt. Sie liefern ferner ausser den Bernoulli'schen noch andere merkwürdige Zahlen, welche auch in Reihenentwicklungen der Functionen

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \cot\frac{x}{2},\ \sec x \text{ und } \operatorname{cosec} x$$

vorkommen, und hiernach die Namen „Tangentencoefficient“ etc. erhalten. Es wird dann gezeigt, wie alle diese Zahlen sich auch in ganz elementarer Weise independent bestimmen lassen. Weitere Formeln und Reihenentwickelungen ergeben sich aus dem Taylor'schen Theorem, wenn man die oben erwähnte Entwickelung einer Potenz nach Bernoulli'schen Functionen auf dasselbe anwendet. Der Aufsatz schliesst mit Recapitulation einiger ebenfalls hierher gehöriger Theoreme aus der oben erwähnten früheren Abhandlung.

Die zweite Abhandlung bildet eine Ergänzung zu des Verfassers „Elementen der analytischen Geometrie der Ebene“ (siehe F. d. M. VI. p. 408), und untersucht die Eigenschaften derjenigen (den imaginären Kreispunkten entsprechenden) Punkte auf der unendlich fernen Geraden, welche Repräsentanten der unendlich fernen Punkte aller gleichseitigen Hyperbeln sind. Der Verfasser gelangt mittelst dieser Punkte zu den cyklisch-hyperbolischen Functionen und schliesslich zu dem Begriffe des hyperbolischen Parallelabstandes eines Punktes von einer Geraden. Das Ganze characterisirt sich hiernach im Wesentlichen als eine Durchführung der Analogie zwischen Eigenschaften des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel. Schg.

---

D. J. KORTEWEG. Over benaderings-formulen voor de som van reeksen, welke uit een groot aantal termen bestaan. Nieuw. Arch. II. 161-176.

Der Verfasser geht von den Formeln Euler's und Maclaurin's für die Summation einer Reihe mit Hülfe der Bernoulli'schen Coefficienten aus und giebt eine andere Methode an, wobei die Summe der Reihe mit grösster Annäherung durch einige Werthe

der Integralfunction ihres allgemeinen Gliedes, integrirt zwischen einigen verschiedenen Grenzen, ausgedrückt sind.

Die Formel, zu der er gelangt ist:

$$\sum_{p=m}^{p=n} f(x_0+ph) = \frac{1}{6h}\left[8A_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} - A_0^{+1} - A_{-1}^{0}\right]$$

$$= \frac{1}{h}A_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6h}\left[2A_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} - A_0^{+1} - A_{+1}^{0}\right];$$

worin

$$A_{-\theta}^{+1-\theta} = \int_{x_n-\theta h}^{x_n+(1-\theta)h} f(x)\,dx.$$

G.

---

G. Zolotareff. Sur la série de Lagrange. Nouv. Ann. (2) XV. 422-423.

Ist

$$z = a + x\varphi(z)$$

gegeben und man setzt

$$S_n = \int_a^z [x\varphi(u)+a-u]^n F'(u)\,du,$$

so dass

$$S_0 = F(z) - F(a),$$

dann ist

$$\frac{dS_n}{da} = nS_{n-1} - x^n\varphi^n(a)F'(a),$$

und hieraus, indem man $n = 1, 2 \dots n$ setzt, und $S_0\, S_1 \dots S_{n-1}$ eliminirt,

$$S_0 = x\varphi(a)F'(a) + \frac{x^2}{1.2}\,\frac{d[\varphi(a)F'(a)]}{da}$$

$$+\frac{x^3}{1.2.3}\,\frac{d^2[\varphi^2(a)F'(a)]}{da^2} + \cdots + R_n,$$

welches die Lagrange'sche Reihe mit dem Rest ist. Für diesen findet man

$$R_n = \frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{da^n}\left[\int_a^z [x\varphi(u)+a-u]^n F'(u)\,du\right],$$

einen Ausdruck, den man, wie der Verfasser bemerkt, Herrn Popoff verdankt.

Hr.

---

L. W. Meech. New demonstration and forms of Lagrange's theorem. The general theorem. Analyst III. 33-42.

Beweis des Lagrange'schen Satzes mit Beispielen sowie eine Verallgemeinerung desselben, die discutirt wird. Glr. (O.)

---

J. Wolstenholme. Solution of a question (4755). Educ. Times XXV. 25.

Setzt man in der Gleichung

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^n(\theta x)$$

$f(x) = (1-x)^m$, wo $m$ eine positive Zahl ist, so ist der Grenzwerth von $\theta$ für $x = 1$

$$1 - \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m.n}}.$$

Dies wird bewiesen. O.

---

## Capitel 2.

## Besondere Reihen.

B. Igel. Ueber einige elementare unendliche Reihen. Wien. Ber. 1876.

Es werden die Eigenschaften der Reihe

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\lambda}$$

und einiger verwandten, in der elementaren Algebra und in der Analysis, und zwar in der Theorie der Convergenz und Divergenz, auftretenden Reihen abgeleitet; und zwar nicht, wie gewöhnlich, aus den Summationsformeln, sondern mit Hülfe einer Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung, deren particuläre Integrale eben diese Reihen sind. Diese Differentialgleichung bietet, da sie mit der Differentialgleichung erster Ordnung ein Integral gemeinsam hat, ein Beispiel für die Reductibilität der Differential-

gleichungen. Hieraus ergiebt sich die Integration einer Reihe specieller Differentialgleichungen. Den Schluss der Note bilden einige Reductionsformeln obiger Reihen. M.

---

A. PÁNEK. Ueber die geometrische Progression. Časopis V. (Polnisch).

Der Verfasser leitet die Summenformel für die geometrische Progression $1+v+v^2+\cdots+v^{n-1}$ durch eine Betrachtung aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ab. W.

---

F. TIRELLI. Alcune proprietà dei coefficienti binomiali. Battaglini G. XIV. 318-320.

Wird das Polynom

$$a_1x^\nu+a_2x^{\nu-2}+\cdots+a_\nu x+a_{\nu+1}$$

mit $R(x)$, und der $h^{\text{te}}$ Binomialcoefficient der $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Potenz mit $(\nu+1)_h$ bezeichnet, so ist:

$$R(n+\nu+1)-(\nu+1)_1\,R(n+\nu)+(\nu+1)_2\,R(n+\nu-1)$$
$$+\cdots(-1)^h(\nu+1)_h\,R(n+\nu-h+1)=0,$$

oder noch allgemeiner

$$R(n+\nu+k)-(\nu+k)_1\,R(n+\nu+k-1)+\cdots+$$
$$+(-1)^h\,(\nu+k)_h\,R(n+\nu+k-h)=0.$$

Schl.

---

L. BOURGUET. Solution de la question proposée à pag. 210 du IX. vol. Battaglini G. XIV. 151-153.

Die Summe $S_n$ der Reihe

$$S_n=1-\frac{(n-1)n}{1.2}2^2+\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{1.2.3.4}2^4$$
$$-\frac{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.3.4.5.6}2^6+\cdots$$

hat den Werth $\pm(2n-1)$, wobei das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem $n$ ungrade oder grade ist. Werden zwei Reihen $S_n$ und $S_{n+1}$ addirt, so erhält man eine neue Reihe:

$$1-2^2\cdot\frac{n^2}{1.2}+2^4\cdot\frac{n^2(n^2-1^2)}{1.2.3.4}-2^6\cdot\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1.2.3.4.5.6}+\cdots,$$

deren Summe $=\pm1$ ist, je nachdem $n$ grade oder ungrade ist.

Schl.

---

O. Charlier. Sur les nombres polyédraux. N. C. M. II. 24-25.

Man betrachte ein Polyeder mit $S$ Ecken, $A$ Kanten, $F$ Seitenflächen, unter denen $f'$ Polygone mit $p'$ Seiten, $f''$ mit $p''$ u. s. w. sind. Einer der körperlichen Winkel hat $G$ Seitenflächen, unter ihnen $g'$ mit $p'$ Seiten, $g''$ mit $p''$ Seiten etc. Die entsprechende Polyedralzahl ist dann

$$n+\frac{n(n-1)}{1.2}(S-2)+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Sigma(f-g)(p-2).$$

Baltzer (Elem. d. Math. III. Aufl. I. p. 156) hat die Zahl falsch berechnet. Es folgen Anwendungen der allgemeinen Formel.

Mn. (O.)

---

A. Cayley, W. S. B. Woolhouse. Solutions of a question (5020). Educ. Times XXVI. 41-44.

Wenn

$$1, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots \delta_n$$

die ersten Differenzen der Coefficienten in der Entwickelung des Binoms $(1+x)^{2n}$ bis zum mittelsten oder grössten sind, und

$$\nu = \tfrac{1}{2}(n+1)n,\ \nu' = \tfrac{1}{2}n(n-1),\ \nu'' = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)\dots,$$

so ist

$$x^n - \delta_1\ x^{\nu'} + \delta_2\ x^{\nu''} - \delta_3\ x^{\nu'''} \dots$$

ohne Rest theilbar durch $(x-1)^n$.

O.

---

J. W. L. Glaisher. Miscellaneous theorems. Messenger (2) V. 164-165.

Sieben analytische Sätze mit Beweis. No. 1 z. B. ist:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\dots(n+\frac{1}{2})}-\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\dots(n-\frac{1}{2})}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\dots(n-\frac{3}{2})}$$
$$-\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\dots(n-\frac{5}{2})}+\dots+(-1)^n\cdot\frac{1}{1.2.3\dots n}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}$$
$$=(-1)^n\cdot\frac{1}{1.2.3\dots n}\cdot\frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$

und No. 3 lautet: Wenn $P(x)$ die Zahlen der Theilungen von $x$

in die Elemente 1, 2, 3, 4, ..., die Wiederholungen nicht ausgeschlossen, und $Q(x)$ die Zahl der Theilungen von $x$ in die Elemente 1, 3, 5, 7, ..., die Wiederholungen ausgeschlossen, so ist

$$Q(x) = \Sigma P\left(\frac{x-t}{4}\right),$$

wo $t$ gleich ist den dreieckigen Zahlen, kleiner als $t$, und so dass

$$x \equiv t \pmod{4}.$$

Glr. (O.)

---

J. W. L. Glaisher. On a numerical continued product. Messenger (2) VI. 71-76.

Es wird bewiesen, dass, wenn $n$ unendlich,

$$\frac{3^3.7^7.11^{11}\ldots(4n-1)^{4n-1}}{1^1.5^5.9^9\ldots(4n-3)^{4n-3}} = (4n+1)^{2n}.e^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{25}-\frac{1}{49}+\cdots\right)}$$
$$= (4n+1)^{2n}.e^{0,083121808\ldots}$$
$$= (4n+1)^{2n}\cdot 1,08667416\ldots$$

In einem Zusatz wird gezeigt, dass

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{13^2}+\cdots+\text{in inf.} = 1,074833072$$

$$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{15^2}+\cdots+\text{in inf.} = 0,158867478,$$

also

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{x}{\sin x}dx = 2\left(1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots\right) = 1,831931187.$$

(In einer späteren Arbeit, die der London Math. Soc. 1877 mitgetheilt ist, werden die Werthe dieser Constanten und Reihen auf 20 Decimalstellen gegeben.) Glr. (O.)

---

Tchébychef. Sur la généralisation d'une formule de Mr. Catalan. N. C. M. II. 303-306.

Herr Catalan hat bemerkt, dass

$$l2 = \lim\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n}\right)$$
$$= \lim\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).$$

Indem man die Zähler im ersten Gliede durch $u_1\, u_2\, u_3 \ldots$ ersetzt und $v_x = u_x - u_{2x}$ setzt, leitet man daraus ab

$$u_\infty\, l2 = \frac{u_1}{1} - \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} - \cdots - \left[\frac{v_1}{1} + \frac{v_2}{2} + \frac{v_3}{3} + \cdots\right].$$

Macht man $xu_x = E(ax)$, wo $E(x)$ die grösste in $x$ enthaltene ganze Zahl ist, so ergiebt sich daraus eine sehr merkwürdige Reihe für $(4al2 - \frac{1}{6}\pi^2)$ Mn. (O.)

---

J. Hammond. Solution of a question (4980). Educ. Times XXVI. 31-32.

$$\left(\frac{n}{1} - \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot 2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\, 2\right)$$
$$-\left(\frac{n(n-1)\ldots(n-4)}{1.2.3.4.5}\, 2^2 - \frac{n\ldots(n-5)}{1.2\ldots 6}\, 2^3 + \frac{n\ldots(n-6)}{1.2\ldots 7}\, 2^3\right)$$
$$+\left(\frac{n\ldots(n-8)}{1.2\ldots 9}\, 2^4 - \cdots\right) + \cdots = 0,$$

wenn $n$ grade, $= \pm 1$, wenn $n = 4m \pm 1$. O.

---

L. Tanner. Solution of a question (5007). Educ. Times XXVI. 111.

Es ist

$$\frac{4}{3} + \frac{9}{8} + \frac{25}{24} \cdots \frac{n^2}{n^2 - 1} \cdots \text{ bis in inf.}$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \text{ in inf.}$$

O.

---

J. Hammond. Solution of a question (4913). Educ. Times XXV. 45.

Beweis, dass

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{m+n}+\frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$$
$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}+\cdots$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m+1}-\frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)}+\frac{1}{3}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)}-\cdots$$

O.

---

J. Hammond. Solution of a question (4954). Educ. Times XXV. 103-104.

Die Reihe

$$\frac{1}{n+1}+\frac{2n}{2(n+1)^2}+\frac{3n^2-1}{3(n+1)^3}+\frac{4n^3-4n}{4(n+1)^4}+\cdots,$$

deren allgemeines Glied

$$\frac{1}{r(n+1)^r}\left\{\frac{r}{1}n^{r-1}-\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}n^{r-3}+\frac{r(r-1)\ldots(r-4)}{1.2\ldots4}n^{r-5}-\cdots\right\}$$

ist, hat den Werth $\frac{\pi}{4}$.

O.

---

J. Hammond, L. W. Jones. Solutions of a question (4906). Educ. Times XXV. 75-76.

Die Summe der unendlichen Reihe

$$x-\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{7}x^7-\tfrac{1}{10}x^{10}+\cdots+$$

ist

$$\tfrac{1}{3}\log(1+x)-\tfrac{1}{6}\log(1-x+x^2)+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{tang}^{-1}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}.$$

O.

---

L. Barbarin. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 135-138, 181.

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{(a+1)(b+1)}+\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)}+\cdots$$

ist gleich Eins, wenn die Reihe überhaupt convergirt. O.

---

R. W. Genese. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 189.

$$1-\frac{2^2n^2}{2}+\frac{2^4n^2(n^2-1)}{1.2.3.4}-\frac{2^6n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1.2.3.4.5.6}+\cdots$$

ist gleich $+1$ oder $-1$, je nachdem $n$ eine grade oder ungrade Zahl ist.
O.

---

D. Trowbridge. Solution of two problems in summation of series. Analyst III. 154-155.

Transformation der Reihen

$$1+\frac{1}{1+r}+\frac{1}{1+2r}+\cdots+\frac{1}{1+(n-1)r}$$

und

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}.$$

Glr. (O.)

---

A. Martin. Extraction of roots by logarithms. Analyst III. 172

Der Verfasser leitet her:

$$\sqrt{2}=1+\frac{\log 2}{100}+\frac{(\log 2)^2}{1.2.100^2}+\frac{(\log 2)^3}{1.2.3.100^3}+\cdots,$$

sowie die allgemeine Formel, von der diese ein specieller Fall ist.
Glr. (O.)

---

L. P. Shidy. On the sum of the cubes of any number of terms of any arithmetical series. Analyst III. 51-52.

1) Die Summen der Cuben einer Anzahl von aufeinanderfolgenden Gliedern einer arithmetischen Reihe ist durch die Summe der Reihe theilbar. 2) Wenn das erste Glied in der arithmetischen Reihe gleich der gemeinsamen Differenz ist, so ist die Summe der Cuben einer Anzahl von Gliedern gleich dem Product aus der gemeinsamen Differenz in das Quadrat der Summe der Reihe.
Glr. (O.)

E. LUCAS. Théorie nouvelle des nombres de Bernoulli et d'Euler. C. R. LXXXIII. 539-541.

E. LUCAS. Sur les rapports qui existent entre le triangle arithmétique de Pascal et les nombres de Bernoulli. Nouv. Ann. (2) XV. 497-499.

Setzt man

$$f(x+1)-f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n$$
$$S_n = 1^n+2^n+\cdots+(x-1)^n,$$

so erhält man, indem man für $x$ der Reihe nach $1, 2 \ldots x-1$ substituirt und addirt, die symbolische Formel

$$f(x)-f(1) = f(S+1)-f(S),$$

worin rechts nach der Entwickelung $S^n$ durch $S_n$ und $S_0$ durch $x-1$ zu ersetzen ist. Es gilt ferner die symbolische Formel

$$nS_{n-1} = (x+B)^n - B^n,$$

wo die $B$ bis auf eine leichte Modification des Index die Bernoulli'schen Zahlen bezeichnen. Indem man in derselben $x+1$ für $x$ setzt und abzieht, ergiebt sich

$$nx^{n-1} = (x+B+1)^n-(x+B)^n$$

und hieraus

$$f'(x) = f(x+B+1)-f(x+B) = \Delta_x f(x+B, y)$$

und durch Ausdehnung auf mehrere Argumente

$$\frac{d^2f(xy)}{dx\,dy} = \Delta^2_{xy} f(x+B, y+B'),$$

$$\frac{d^3f(xyz)}{dx\,dy\,dz} = \Delta^3_{x,y,z} f(x+B,\ y+B',\ z+B'')\ \text{u. s. f.}$$

Hierdurch sind Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen selbst, ferner zwischen den Producten derselben zu je zweien, dreien u. s. f. gegeben.

Die Euler'schen Zahlen geben zu ähnlichen Entwickelungen Anlass. Ist

$$P_n = 2(2^n-1)B_n$$

und

$$\sigma_n = 1^n-2^n+3^n-\cdots+(2x-1)^n,$$

dann erhält man die symbolische Formel

$$2n\sigma_{n-1} = P^n-(2x+P)^n\ \ (P_0=0).$$

Für eine Primzahl $p$ gilt die Congruenz

$$nP_{n+p+1} \equiv (n-1)\, P_n (\mathrm{mod}.\, p).$$

In der zweiten Note wird gezeigt, wie auf Grundlage obiger Formeln die $B$ in Gestalt von Determinanten gegeben werden können, deren Elemente aus den figurirten Zahlen gebildet sind.

Hr.

---

M. Falk. Sommation de quelques séries. Darboux Bull. X 204-208.

Es werden auf elementarem Wege folgende Summirungsformeln abgeleitet:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{i(i+1)\dots(i+k-1)}{(i+k)(i+k+1)\dots(i+2k+1)} = \frac{1}{(k+1)^2}\, \frac{n(n+1)\dots(n+k)}{(n+k+1)(n+k+2)\dots(n+2k+1)},$$

$$\sum \frac{i(i+1)\dots(i+k-2)}{(i+k-1)\dots(i+2k)} = \frac{1}{k^2(k+1)^2}\, \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)\,[n-1+(k+1)^2]}{(n+k)(n+k-1)\dots(n+2k)}.$$

Indem in ihnen $n=\infty$ gesetzt wird, erhält man Summirungen von unendlichen Reihen, welche in der allgemeineren Formel

$$\frac{1}{\Gamma(1)}\,\frac{\Gamma(k)^2}{\Gamma(2k+r+1)} + \frac{1}{\Gamma(2)}\,\frac{\Gamma(k+1)^2}{\Gamma(2k+r+2)} + \dots = \frac{\Gamma(r+1)\,\Gamma(k)^2}{\Gamma(k+r+1)^2}$$

enthalten sind. Hr.

---

J. Hammond. On the relation between Bernoulli's numbers and the binomial coefficients. Proc. L. M. S. VII. 7-14.

Der Verfasser hat in den Proc. L. M. S. VI. p. 69 (vergl. Fortschr. Bd. VII. p. 183) eine Entwickelung des Quotienten $\psi(x)$, $\varphi(x)$ nach ganzen positiven Potenzen von $x$ gegeben, in denen die Coefficienten in Form von Determinanten erscheinen. Hiervon wird Anwendung auf solche Ausdrücke gemacht, in deren Entwickelung die Coefficienten Bernoulli'sche Zahlen mit Zahlencoefficienten sind,

und man erhält auf diese Weise verschiedene Darstellungen der Bernoulli'schen Zahlen in Form von Determinanten, deren Elemente Binomialcoefficienten sind. (Auf eine ähnliche Darstellung ist Herr Lucas (siehe pag. 143) auf anderem Wege gelangt. Um ein Beispiel hervorzuheben, so gilt bekanntlich die Entwickelung

$$\frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3.2!}+\text{etc.}}$$

$$= 1-\frac{x}{2}+B_1\frac{x^2}{2!}-B_2\frac{x^4}{4!}+\text{etc.},$$

und indem man in der citirten Formel des Verfassers

$$\psi = 1 \quad \psi' = 0 \quad \psi'' = 0\dots$$
$$\varphi = 1 \quad \varphi' = \tfrac{1}{2} \quad \varphi'' = \tfrac{1}{3}\dots$$

setzt, ergiebt sich

$$B_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)!}\begin{vmatrix} 1.\ 2, & 0, & 0\dots \\ 1, & 3, & 3, & 0\dots \\ 1, & 4, & 6, & 4\dots \\ 1, & 5, & 10, & 5\dots \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{vmatrix} \quad ((2n)^2 \text{ Elemente}).$$

Hr.

---

J. Hammond. On the sum of the products of $r$ different terms of a series. Proc. L. M. S. VII. 119-133.

Bedeutet

$$C_r(a_0, a_1 \dots a_{n-1})$$

die Summe der Produkte von $r$ verschiedenen Gliedern aus den $n$ ersten Gliedern der Reihe $a_0\ a_1\ a_2\dots$, dann ist

$$C_r(a_0\ a_1 \dots a_{n-1}) = (\Sigma a_n)^r + c_1(\Sigma a_n)^{r-1} + c_2(\Sigma a_n)^{r-2} + \dots + c_r,$$

wo

$$(\Sigma a_n)^r \doteq \Sigma a_n\ \Sigma a_n \dots$$

die $r$-malige Operation $\Sigma a_n$ bedeutet, bei der der Operand mit $a_n$ zu multipliciren und nach $n$ zu summiren ist.

Die Bestimmung der Constanten $c$ geschieht durch die Bedingungen

$$C_1(a_0\,a_1\ldots a_{n-1}) = 0, \text{ wenn } n = 0,$$
$$C_2(a_0\,a_1\ldots a_{n-1}) = 0, \text{ wenn } n = 0 \text{ oder } 1,$$
$$C_r(a_0\,a_1\ldots a_{n-1}) = 0, \text{ wenn } n = 0, 1, 2\ldots r-1.$$

Man kann so $C_r$ auf $r$ verschiedenen Wegen ermitteln. Durch eine Reihe verschiedener Substitutionen für $a_n$ wird eine grosse Anzahl von Summenformeln hergeleitet, für die wir auf die Originalabhandlung verweisen müssen. Hr.

---

WORONTZOFF. Sur les nombres de Bernoulli. Nouv. Ann. (2) XV. 12-19.

I. Herleitung der Formel

$$(-1)^n n f(x+1) + \sum_{k=0}^{k=n-1} C_k^n B_k[\Delta^{n-k} f(x+k) - (-1)^{n-k} f(x+k)] = 0,$$

wo $C_k^n = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots n}$, $B_k$ der Coefficient von $\dfrac{x^k}{1.2\ldots k}$ in der Entwickelung von $\dfrac{x}{e^x-1}$ nach steigenden Potenzen von $x$ und $\Delta x = 1$, und Anwendung der Formel, die noch verschiedene Transformationen erfährt, auf besondere Functionen.

II. Setzt man $\dfrac{B_n}{n} = \mathfrak{B}_n$, so gilt die symbolische Formel

$$\Delta^{-m} f(x) = \sum_{k=0} (-1)^{m-1} \frac{h^{k-m}\,k(k-1)\ldots(k-m+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(m)}$$
$$\times \mathfrak{B}^{k-m+1}(\mathfrak{B}+1)\ldots(\mathfrak{B}+m-1)\,D^{k-m} f(x),$$

wo in der Entwickelung des zweiten Gliedes die Exponenten von $\mathfrak{B}$ durch gleich hohe Indices zu ersetzen sind. Sie dient zur successiven Integration. Hr.

---

STERN. Ueber eine Eigenschaft der Bernoulli'schen Zahlen. Borchardt J. LXXXI. 290-295.

Bezeichnet $B_m$ die $m^{te}$ Bernoulli'sche Zahl, sind ferner $a_1$, $a_2$ ..., $a_\kappa$ die Factoren von $m$ (die Einheit eingeschlossen), für welche $2a_1+1$, $2a_2+1$, ... $2a_\kappa+1$ Primzahlen sind, und

setzt man

$$\mathfrak{J}_m = \frac{1}{2a_1+1} + \frac{1}{2a_2+1} + \cdots + \frac{1}{2a_u+1},$$

so gilt, wie Staudt bewiesen, der Satz, dass

$$B_m + (-1)^{m+1}(\tfrac{1}{2} + \mathfrak{J}_m) = g$$

eine ganze grade oder ungrade Zahl ist, je nachdem $u$ ungrade oder grade ist. Herr Stern beweist nun weiter folgenden Satz über die Beschaffenheit von $g$. Ist $m$ ungrade, so ist

$$u + g \equiv 3 \pmod{4},$$

ist $m$ grade, so ist

$$u + g \equiv 3 \text{ oder } \equiv 1 \pmod{4},$$

je nachdem das Product

$$(2a_1+1)(2a_2+1)\ldots(2a_u+1)$$

von der Form $4n+1$ oder $4n+3$ ist. Hr.

---

C. Le Paige. Sur les nombres de Bernoulli et sur quelques fonctions qui s'y rattachent. Ann. Soc. scient. Brux I. B. 43-50.

C. Le Paige. Relation nouvelle entre les nombres de Bernoulli. Bull. de Belg. (2) XLI. 1017.

E. Catalan. Note sur la communication précédente. Bull. de Belg. (2) XLI. 1018-1019.

1) Wenn man mit $f(m,p)$ die Summe der Producte zu je $p$ der $m$ ersten natürlichen Zahlen bezeichnet, findet man leicht, dass

$$f(m,p) = (m+1)\,m(m-1)\ldots(m-p+1)\,\varphi(m,p),$$

wo $\varphi(m,p)$ eine neue Function von $m$ und $p$ bezeichnet, die der Differenzengleichung

$$(1) \qquad (m+1)\,\varphi(m,p) = (m-p)\,\varphi(m-1,p) + m\varphi(m-1,p-1)$$

genügt. Die Betrachtung des Productes

$$(2) \qquad (x+1)(x+2)\ldots(x+m) = x^m + f(m,1)\,x^{m-1} + f(m,2)\,x^{m-2} + \cdots + f(m,m)$$

führt unmittelbar zu der Relation

$$(3) \quad pf(m,p) = \pm[S_p - S_{p-1}f(m,1) + S_{p-2}f(m,2)\ldots \pm S_1 f(m,p-1)],$$

wo

$$S_p = \sum_{q=1}^{q=m} q^p.$$

Daraus ergiebt sich:

$$\varphi(o,p) = \pm \frac{B_{p-1}}{1.2.3\ldots p},$$

und ferner

$$(4) \qquad \varphi(0,2p-1) = 0, \quad \varphi(0,2p) = \frac{B_{2p-1}}{1.2.3\ldots 2p}.$$

Wenn man in (2) $x+1=z$ setzt, dann $z$ durch $z+1$ ersetzt, und die Entwickelung ausführt, so findet man:

$$(5) \qquad p\varphi(m,p) = \sum_0^{p-1} \frac{m-q+1}{1.2.3\ldots p-q+1}\,\varphi(m,q),$$

wie es sich findet N. C. M. II. 302.

2) Andere Relationen findet man, indem man von der Laurent'schen Entwickelung von $\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^m$ ausgeht, einer Entwickelung, welche geschrieben werden kann:

$$(6) \qquad \left(\frac{x}{e^x-1}\right)^m = m[\varphi(m-1,0) - x\varphi(m-1,1) + x^2\varphi(m-1,2)\ldots].$$

Daraus ergiebt sich leicht die allgemeine Relation:

$$(7) \qquad \frac{m+n+\cdots+k}{mn\ldots k}\,\varphi(m+n+\cdots+k-1,p)$$
$$= \Sigma\,\varphi(m-1,q)\,\varphi(n-1,r)\ldots\varphi(k-1,s).$$

Das Summationszeichen erstreckt sich auf alle ganzen und positiven, gleichen oder ungleichen, Lösungen der Gleichung

$$q+r+\cdots+s = p.$$

3) Verbindet man die Laurent'sche Entwickelung von $\left(\frac{x}{e^x-1}\right)^m$ mit der von Abel, so gelangt man zu den folgenden Gleichheiten, wo die $A$ dieselbe Bedeutung haben, wie bei Abel (Oeuvres II. p. 46):

$$m\varphi(m-1,q) = 1.2.3\ldots(m-q+1)\,A_{m-q-1,m} \quad (q<m),$$

$$\pm m\varphi(m-1,m+p)$$
$$= (-1)^{m-1}\left[A_{0,m}\frac{B_p}{1.2.3\ldots p+1} + (p+1)\,A_{1,m}\frac{B_{p+1}}{1.2\ldots p+2} + \cdots\right.$$
$$\left. + (p+1)(p+2)\ldots(p+m-1)\,A_{m-1,m}\frac{1.2.3\ldots p+m}{B_{p+m-1}}\right].$$

4) Macht man in Gleichung (5)

$$m = 0, \quad p = 2p',$$

so findet man mit Fortlassung der Accente

$$B_{2p-1} + \frac{(2p-3)(2p-1)}{1.2.3} B_{2p-3} + \cdots + \frac{B_1}{1.2} = \frac{1}{2p.(2p+1)}.$$

Diese Relation lässt sich direct beweisen dadurch, dass man die Bernoulli'schen Zahlen durch ihre Ausdrücke als bestimmte Integrale ersetzt (C. R. LXXXI. 966, siehe F. d. M. VII. 132).

5) Setzt man in (7) voraus, dass

$$m = n = \cdots = k = 1,$$

so findet man Relationen zwischen den Summen der Producte von 2 und 2, 3 und 3 etc. Bernoulli'schen Zahlen. In dem speciellen Fall der Summe von Producten zu 2 und 2 erhält man

$$(2q+1) B_{2q-1} + \frac{2q.2q-1}{1.2} B_{q-3}.B_1 + \cdots$$
$$+ \frac{2q.2q-1}{1.2} B_1 B_{2q-3} = 0.$$

6) Der Verfasser hat diese neue Relation direct bewiesen, indem er der Derivirten der Entwickelung von $\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{2}$ das Quadrat dieser Entwickelung hinzufügt. Herr Catalan findet eine analoge Formel, indem er das Product der Entwickelungen von $x \coth x$ und $x \operatorname{tgh} x$ bildet. Mn. (O.)

---

Dobiciecki. Product einer unendlichen Factorenreihe. Grunert Arch. LIX. 98-200.

Beweis der Formel

$$\operatorname{tg} x . \sqrt{\operatorname{tg} 2x} . \sqrt[4]{\operatorname{tg} 4x} \cdot \sqrt[8]{\operatorname{tg} 8x} \cdots = (2 \sin x)^2.$$

Hr.

---

G. S. Carr. Solution of a question (4431). Educ. Times XXV. 71-72.

Das $n^{te}$ Glied in der Entwickelung von

$$\frac{Mx+L}{x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2)}$$

ist gleich

$$\sin(n\theta-\varphi)\left\{\frac{(M\alpha+L)^2+(M\beta)^2}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)^n}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

wo

$$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right),\quad \varphi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{M\beta}{M\alpha+L}\right).$$

O.

---

P. Mansion. Sur une formule analogue à celle de Leibniz. N. C. M. II. 103-105.

P. Mansion. Sur le développement de arc tg $x$. N. C. M. II. 308-309.

Diese Formel rührt her von Herrn Drussel. Es sei

$$u=(x+a),\quad v=(x+b).$$

Man hat

$$D^n\frac{1}{uv}=(1-)^n\frac{1.2.3\ldots n}{(uv)^{n+1}}\,\frac{u^{n+1}-v^{n+1}}{u-v}.$$

Daraus kann man leicht den Werth der Derivirten von arc tg $x$ herleiten und dann, nach Entwickelung dieser Function in eine Reihe, selbst für $x=1$. Man kann auch, in diesem letzten Fall, die Entwickelung von dem Fall herleiten, wo $x<1$, aber man muss dann beweisen, dass die Differenz der beiden Reihen gleichzeitig mit $x=1$, gegen Null convergirt. Dies ist leicht, wird aber meist in den französischen Lehrbüchern vernachlässigt.

Mn. (O.)

---

Ed. Lucas. Note sur le triangle arithmétique de Pascal et sur la série de Lamé. N. C. M. II. 70-75.

Ed. Lucas. Sur l'emploi du calcul symbolique dans la théorie des séries recurrentes. N. C. M. II. 201-206, 214.

Ed. Lucas et E. Catalan. Sur le calcul symbolique des nombres de Bernoulli. N. C. M. II. 328-338.

Diese verschiedenen Noten beziehen sich auf eine grosse Arbeit, welche bruchstückweise in den C. R. und den Ann. von

Brioschi erschienen ist. Die erste enthält neue Formeln über Combinationen und verschiedene sehr bemerkenswerthe Eigenschaften der Lamé'schen Reihe; die zweite beschäftigt sich hauptsächlich mit dieser letzten Reihe, die sich übrigens schon bei Leonardo von Pisa findet. In der dritten setzt der Verfasser:

$$\Delta fx = f(x+1)-f(x) = Ax^m + Bx^{m-1}+\cdots+Lx^0.$$

Indem er nun der Reihe nach

$$x = 1, 2, 3, \ldots (x-1)$$

setzt und symbolisch $S^m$ für

$$S_m = 1^m + 2^m + \cdots + (x-1)^m$$

schreibt, findet er

$$f(x)-f(1) = \Delta f(S) = AS_m + BS_{m-1}+\cdots+LS_0.$$

Der Verfasser leitet aus dieser symbolischen Formel eine Fülle von bekannten und neuen Relationen zwischen den Bernoulli'schen Zahlen her; unter anderen auch

$$\frac{B+n+2}{n+1}\cdot\frac{B+n+3}{n+2}\cdots\frac{B+2n}{2n-1} = 2\left[1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\cdots-\frac{1}{2n}\right],$$

wo man, merkwürdigerweise, $n=\infty$ setzen kann. Diese Bemerkung ist von Herrn Catalan: Mn. (O.)

---

G. Ascoli. Sulla serie $\sum\limits_0^n u_n z^n$. Acc. R. d. L. (2) III. 156-159.

---

# Sechster Abschnitt.

## Differential- und Integralrechnung.

### Capitel 1.

### Allgemeines (Lehrbücher etc.).

J. M. C. DUHAMEL. Éléments de calcul infinitésimal. 3e édition, revue et annotée par M. J. Bertrand. 2 vol. 8°. Paris, Gauthier-Villars. 1874-1875.

In dieser neuen Auflage des bekannten Duhamel'schen Werkes, das zuerst unter dem Titel Cours d'Analyse de l'École Polytechnique erschienen war, begnügt sich Herr Bertrand, mehrere Noten hinzuzufügen, die seinem grossen Traité entnommen sind. Diese Noten betreffen die Theorie der Functionen imaginärer Variablen, die zwischen imaginären Grenzen genommenen bestimmten Integrale und die Elemente der Theorie der elliptischen Functionen. In einer Besprechung des Werkes (Darboux Bull. XI. 241—244), hebt Herr Darboux hervor, dass es grade die strenge Anwendung des Unendlichkleinen, das durch Lagrange bei den französischen Mathematikern in Misscredit gekommen war, gewesen ist, die der Darstellung Duhamel's den grossen Vorzug gab; die von ihm befolgten Methoden der Entwickelung der Theorie des Unendlichkleinen werden noch heute angewendet. M.

R. Rubini. Elementi di calcolo infinitesimale. 2[da] ed. Napoli 1874-1875. 2 vol. gr. 8.

Das Werk zerfällt in 5 Bücher. Das erste Buch, die Differentialrechnung, enthält abweichend vom gewöhnlichen Gang, die Elimination der Constanten und der willkürlichen Functionen, unmittelbar folgend auf die Theorie der Vertauschung der Variabeln; daran schliesst sich die Theorie der imaginären (complexen) Functionen und der Functionaldeterminanten. Das zweite Buch enthält Anwendungen der Differentialrechnung auf Reihenentwickelungen, Maxima und Minima, und auf die Geometrie der Curven und Flächen. Damit schliesst der erste Band. Buch III. enthält die Integralrechnung mit Anwendungen. Buch IV. die Integration der Differentialgleichungen. Das letzte Buch behandelt die Variationsrechnung und die directe und inverse Berechnung der endlichen Differenzen. — Diese Uebersicht ist einem ausführlicheren Referate in Darboux Bull. XI. 145—147 entnommen. M.

---

P. Mansion. Leçons d'analyse infinitésimale. I. Objet de l'analyse infinitésimale. II. Propriété fondamentale d'une seule variable ou théorème de Rolle. Gand. Hoste. Mons. Manceaux. 8°.

Nur zwei Vorlesungen über Analysis, von denen die zweite die folgenden neuen oder wenig bekannten Bemerkungen enthält. Der Satz von Rolle kann in geometrischer Sprache so ausgedrückt werden: „Wenn eine zwischen den Punkten $A$ und $B$ continuirliche Curve $AJB$, deren Tangente sich zwischen diesen Punkten in continuirlicher Weise biegt, durch die Secante $AB$ geschnitten wird, so giebt es einen dazwischenliegenden Punkt $J$, wo die Tangente $AB$ parallel ist. Der Satz besteht auch noch, wenn die Tangente zwischen $A$ und $B$ in gewissen Punkten senkrecht zu $AB$ ist.“ Je nachdem $AB$ zur $x$-Axe genommen ist oder nicht, und je nachdem man die Coordinaten der Curve als Function einer andern Variabeln ausdrückt oder nicht, gelangt man zu 3 analytischen Ausdrücken für den Satz von Rolle, die man im

Allgemeinen, aber ohne Grund als verschieden ansieht. Die verschiedenen Beweise des Taylor'schen Satzes, welche auf diesen scheinbar verschiedenen Formen des Satzes von Rolle beruhen, sind im Grunde identisch mit dem Satze von Herrn Cox.

Mn. (O.)

---

S. W. Salmon. First principles of the differential calculus. Analyst. III. 13-15, 140.

Die Anfangsgründe der Differentialrechnung werden mit Hülfe der Bewegung von Punkten auseinandergesetzt. $dx$ ist ein Theil der Bewegung eines Punktes, $dy$ der eines anderen.

Glr. (O.)

---

## Capitel 2.

## Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima).

J. B. Mott. Differentiation. Analyst III. 79-81.

Eine Methode zur Bestimmung der Differentialcoefficienten von $x^n$, welche nur wenig von der gewöhnlich gegebenen abweicht.

Glr. (O.)

---

G. Steinbrink. Theoria derivatarum altiorum ordinum. Berlin. Calvary u. Co.

Die Abhandlung steht in engster Beziehung zu den zwei Schriften: R. Hoppe, Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten, Leipzig 1845, und O. Schlömilch, Zur Theorie der höheren Differentialquotienten, Leipz. Ber. 1857; Schlömilch Z. III. 1858). Sie verwerthet die in ersterer vorgefundenen Principien und Methoden, und die in letzterer ent-

haltenen erweiternden Gedanken in vielseitigster Weise, und gelangt zu einer wesentlichen Fortbildung der Theorie. Thatsächlich zu berichtigen ist die im Anfang stehende Behauptung, Hoppe habe vergeblich versucht, die Aufgabe der independenten Darstellung des Coefficienten des entwickelten Products

$$(x+1)\,(x+2)\ldots(x+n)$$

zu lösen. Der Verfasser ist durch eine missverstandene Stelle am Schluss der Untersuchung verleitet worden, die 3 gegebenen Lösungen (p. 92, 99 und 140), so wie die der allgemeineren Aufgabe bezüglich auf das Product

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)$$

unbeachtet zu lassen. Seine eigne Lösung beruht auf denselben Grundsätzen und Bedingungen, geht aber aus anderem allgemeinen Princip hervor.

Ebenso wie in den citirten Schriften handelt es sich auch hier um Bestimmung der Coefficienten $u$ in der Relation

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \sum_{k=1}^{k=n} u_k \frac{\partial^k z}{\partial y^k},$$

wo die $u$ nur von der Beziehung zwischen $x$ und $y$ abhängig sind. Ihr stellt der Verfasser (nach Schlömilch's Vorgang) die inverse Entwickelung

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = \sum_{k=1}^{k=n} v_k \frac{\partial^k z}{\partial x^k}$$

an die Seite. Er macht darüber die augenfällige Bemerkung, dass die Bestimmung der $v$ nicht, wie Schlömilch sie darstellt, eine neue Aufgabe, sondern in ihrer Allgemeinheit genau dieselbe sei wie die der $u$. Dagegen erweist sich die Beziehung zwischen den $u$ und $v$, nämlich

$$(26) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \overset{n}{u}_k \overset{k}{v}_m = \begin{cases} 0 & (m < n) \\ 1 & (m = n) \end{cases}$$

äusserst ergiebig. Der Weg, auf welchem der Verfasser dazu gelangt, die $u$ auf die $v$ zurückzuführen, so dass also z. B. zur Lösung der Aufgabe für $z = f(\log x)$ nur die gleiche für $z = f(e^x)$ erforderlich ist, hat ohne Zweifel ein genügendes Interesse, um ihn hier zu reproduciren. Dies möchte wohl um

so mehr geboten erscheinen, als der Leser der Urschrift Mühe haben würde, den Faden der Deduction dieses besondern, aber wichtigsten Resultats zwischen den sich viel weiter ausdehnenden Transformationen herauszufinden. Der Kürze wegen verweisen wir direct auf die ältere Schrift, wo eine hier angewandte, auf verschiedenem Wege gewonnene Formel, schon in derselben enthalten ist.

Aus der Leibniz'schen Formel für den $n^{ten}$ Differentialquotienten eines Products zweier Factoren geht leicht die allgemeine Gleichung hervor:

$$(55) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} (n-1)_{k-1} \frac{\partial^{n-k} \psi^{-n}}{\partial \eta^{n-k}} \frac{\partial^{k-m} \psi^m}{\partial \eta^{k-m}} = \begin{cases} 0 & (m < n) \\ 1 & (m = n) \end{cases}.$$

Der in Hoppe's Theorie der independenten Darstellung der höheren Differentialquotienten Seite 39 Gleich. (6) gegebene Ausdruck von $u_k^n$ lässt sich auf die $v$ angewandt schreiben:

$$(34) \qquad v_k^n = \frac{1}{k!} \left( \frac{\partial^n X^k}{\partial \eta^n} \right)_{\eta=0},$$

wo

$$x = \psi(y); \quad X = \psi(y+\eta) - \psi(y)$$

gesetzt ist. Sei nun $X = \eta \psi$; dann findet man:

$$(36) \qquad \left( \frac{\partial^n X^k}{\partial \eta^n} \right)_{\eta=0} = (n)_k k! \left( \frac{\partial^{n-k} \psi^k}{\partial \eta^{n-k}} \right)_{\eta=0},$$

und die vorige Gleichung wird nach Wechsel der Buchstaben:

$$(38) \qquad v_m^k = (k)_m \left( \frac{\partial^{k-m} \psi^m}{\partial \eta^{k-m}} \right)_{\eta=0}.$$

Lässt man also in Gleichung (55) $\eta$ verschwinden, so geht sie über in

$$\sum_{k=1}^{k=n} (n-1)_{k-1} \left( \frac{\partial^{n-k} \psi^{-n}}{\partial \eta^{n-k}} \right)_0 v_m^k = \begin{cases} 0 & (m < n) \\ 1 & (m = n) \end{cases}.$$

Dies verglichen mit der obigen Gleichung (26) beweist, dass

$$(69) \qquad u_k^n = (n-1)_{k-1} \left( \frac{\partial^{n-k} \psi^{-n}}{\partial \eta^{n-k}} \right)_{\eta=0}$$

ist, da beide Grössen durch dasselbe System linearer Gleichungen bestimmt sind. Ferner ist nach „Hoppe's Theorie“ Seite 162 für $\mu = \nu = 0$

$$\frac{\partial^n . z^{-m}}{\partial x^n} = m(m+n)_m \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k (n)_k}{(k+m) z^{k+m}} \frac{\partial^n . z^k}{\partial x^n}.$$

Wendet man dies auf $z = \Psi$ an, lässt $\eta$ stetig verschwinden, so dass $\Psi$ in $\psi'(y) = \frac{\partial x}{\partial y}$ übergeht, so erhält man nach Einsetzung in die obige Gleichung (69):

$$u_k^n = \sum_{h=0}^{h=n-k} (-1)^h \frac{n(n-1)_{k-1}(2n-k)_n(n-k)_h}{n+h} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n+h} \left(\frac{\partial^{n-k}.\Psi^h}{\partial \eta^{n-h}}\right)_0 .$$

Geht man jetzt gemäss Gleichung (36) von $\Psi$ zurück auf $X$, so findet man nach gehöriger Zusammenordnung der ganzzahligen Factoren:

$$u_k^n = k(2n-k) \sum_{h=0}^{h=n-k} (-1)^h \frac{(2n-2k)_{n-k+h}}{(n+h)\, h!} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n+h} \left(\frac{\partial^{n-k+h} X^h}{\partial \eta^{n-k+h}}\right)_0 .$$

Dies ist die beabsichtigte Formel, welche die höheren Differentialquotienten einer zusammengesetzten Function $f(\varphi x)$ auf die der ganzen positiven Potenzen der inversen Function von $\varphi x$ zurückführt. Für $y = \log x$, z. B. wo

$$X = e^y(e_\eta - 1)$$

wird, giebt dieselbe:

$$\frac{\partial^n f(\log x)}{\partial x^n} = \frac{x^n}{1} \sum_{k=1}^{k=n} f^{(k)}(\log x),\ k(2n-k)_k$$
$$\times \sum_{h=0}^{h=n-k} \frac{(2n-2k)_{n-k+h}}{(n+h)\, h!} \sum_{p=1}^{p=h} (-1)^p\, (h)_p\, p^{n-k+h}.$$

Besonders zu erwähnen ist, dass der Verfasser den Ausdruck

$$u_k^n = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(e^{-ty}\ \frac{\partial^n e^{ty}}{\partial x^n}\right)\right]_{t=0},$$

eigentlich nur specielles Resultat aus allgemeinem Princip, als Grundformel aufstellt, aus welcher die folgenden Formeln hervorgehen, und die zu bemerkenswerthen Transformationen Anlass giebt. Den höheren Differentialquotienten der Potenzen der Functionen wird, wie auch in der citirten Schrift geschehen, in § 10, 11 und 23 eine besondere Betrachtung gewidmet; als Resultate sind bemerkenswerth die auf Seite 21 unten und auf Seite 22 unten gewonnenen Sätze, in § 23 die Formel (140). Im Ganzen ist die Arbeit, soviel sie auch Vorgefundenes in sich aufgenommen hat, eine durchaus selbstständige, mit viel Geschick und Erfolg durchgeführte zu nennen. H.

J. N. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. Méthode de transformation fondée sur la conservation d'une relation invariable entre les dérivées de même ordre. Liouville J. (3) II. 241-256, C. R. LXXXII. 552-554.

Die Aufgabe, welche hier bezüglich auf erste, dann zweite, dann beliebige Ordnung gelöst wird, lautet für 1[te] Ordnung: Sei $y$ eine beliebig bleibende Function von $x$, und $Y$ eine entsprechende Function von $X$, beide bestimmt für $x$, $y$ gesetzt zu werden. Es sollen $x$ und $y$ zu solchen Functionen der 2 Variabeln $X$, $Y$ gemacht werden, dass, unabhängig von der Beziehung zwischen $x$ und $y$, $\frac{\partial y}{\partial x}$ bloss Function von $\frac{\partial Y}{\partial X}$ wird. Als nothwendige und ausreichende Bedingung erweist sich, dass

$$(2)\qquad \begin{cases} x = MX + NY + P \\ y = mX + nY + p \end{cases}$$

für constante $M$, $N$, $P$, $m$, $n$, $p$ sei. Als Anwendung hiervon dienen 4 Aufgaben, welche verlangen zu einer gegebenen ebenen Curve $s$ mit dem Tangentenwinkel $\omega$ eine zweite $S$ mit dem Tangentenwinkel $\Omega$ zu finden, so dass die Krümmungsradien

$$r = \frac{\partial s}{\partial \omega}, \quad R = \frac{\partial S}{\partial \Omega}$$

in gegebener Relation stehen. Diese Relation ist in allen vier Fällen von der Form

$$r = \frac{m + nR}{M + NR}$$

und die Lösungen geben unmittelbar die Gleichungen (2). Aehnliche Anwendung wird auf die Subnormalen gemacht, wo für $x$, $y$ nur die Polarcoordinaten zu setzen sind; dann auf die Cinematik, wo die Derivirte die Geschwindigkeit darstellt.

Die allgemeine Aufgabe verlangt, dass $\frac{\partial^k y}{\partial x^k}$ bloss Function von $\frac{\partial^k Y}{\partial X^k}$ sei. Es ergiebt sich, dass für $k > 1$ die Relation beider Grössen nur linear sein kann, und die allgemeine Lösung ist

$$x = MX + P$$
$$y = nY + m_0 + m_1 X + m_2 X^2 + \cdots m_k X^k.$$

Hierin ist z. B. unmittelbar die Lösung der Aufgabe enthalten, zu einer beliebigen ebenen Curve eine zweite zu finden, welche mit ihr dieselbe Evolute $k^{ter}$ Ordnung hat.

Der Artikel im C. R. bespricht den Anlass zur Untersuchung und giebt die Resultate. H.

---

J. W. L. Glaisher. Note in regard to multiple differentiation. Phil. Mag. 1876.

Schreibt man der Bequemlichkeit halber bei complicirteren Exponenten exp. $(a)$ für $e^a$, so heisst der in der Arbeit bewiesene Satz: Wenn

$$v = \frac{1}{\sqrt{a_1\, a_2 \ldots a_n}} \exp.\left(\sqrt{a_n}\, \sqrt[4]{a_{n-1}}\, \sqrt[8]{a_{n-2}} \ldots \sqrt[2n]{a_1}\, \sqrt[2n]{p}\right),$$

so ist

$$\left(\frac{d}{dp}\right)\left(\frac{d}{da_1}\right)\left(\frac{d}{da_2}\right)^2\left(\frac{d}{da_3}\right)^4 \cdots \left(\frac{d}{da_n}\right)^{2^{n-1}}(v) = \frac{v}{2^{2(2^n-1)}}.$$

Csy. (O.)

---

J. W. L. Glaisher. Further note in regard to a multiple differentiation of a certain expression. Phil. Mag. 1876.

Fortsetzung der obigen Arbeit. Csy. (O.)

---

Ch. Hermite. Sur une formule de M. Delaunay. N. C. M. II. 54-55.

Die Formel

$$PD^mQ = D^mPQ - \frac{m}{1} D^{m-1}P'Q + \frac{m(m-1)}{1.2} D^{m-2} P''Q - \cdots$$

lässt sich leicht beweisen, wenn man setzt

$$P = e^{px}, \quad Q = e^{qx}.$$

Mn. (O.)

---

J. W. L. GLAISHER. Relation connecting the derivatives of $e^{\sqrt{x}}$. Messenger (2) VI. 85-87.

Die Formel ist

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^n}\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^n - \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{x}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \frac{(n+1)\,n(n-1)\,(n-2)}{2\,.\,4}\frac{1}{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2} + \cdots\right\} e^{\sqrt{x}}.$$

Glr. (O.)

---

W. W. JOHNSON. On the expression $0^0$. Analyst III. 118-121.

Bericht über den Streit, der im Jahre 1830 in Crelle's Journal über den Werth von $0^0$ zwischen Libri und Möbius stattfand.

Glr. (O.)

---

A. MATERN. Probleme aus der Theorie der Maxima und Minima mit Nebenbedingungen. Pr. Hamburg.

Längs einer beliebigen ebenen Curve laufen 2 Punkte, deren Abscissen auf 7 verschiedene Arten in Abhängigkeit gesetzt werden: es soll 1) die Sehne, 2) der Bogen, 3) der Winkel zwischen beiden Tangenten, 4) der Winkel zwischen Sehne und Tangente, 5) das Flächenstück zwischen Sehne und Bogen, 6) das zwischen den Tangenten und dem Bogen oder 7) das Dreieck zwischen Sehne und Tangenten constant sein. Diese 7 Grössen werden erst in Coordinaten ausgedrückt, dann die Differentiale null gesetzt und der Differentialquotient der Abscissen daraus berechnet. Die gleichen Resultate werden auf geometrischem Wege hergeleitet. Die Bedingungen für constante Werthe sind aber zugleich die Bedingungen für singuläre Werthe, d. h. für Maxima, Minima und Inflexionswerthe unter einer Bezeichnung zusammenbegriffen. Man kann jetzt die 7 Fälle auf 21 Arten combiniren, indem man je eine der 7 Grössen constant setzt und eine zweite zum singulären Werth bestimmt. Es ergeben sich dann 21 Probleme, jedes mit doppelter Fragestellung, aber gemeinsamer Lö-

sung, die unmittelbar in impliciter Form aus den erhaltenen Gleichungen zusammengesetzt werden kann. Die Unterscheidung der Maxima und Minima von einander ist von der Natur der Curve abhängig; dagegen gilt relativ bei doppelter Fragestellung das Gesetz, dass die Maxima der einen der combinirten Grössen den Minimis der andern entsprechen, oder beide gleichzeitig Maxima und Minima werden, je nachdem das Verhältniss der partiellen Differentialquotienten beider Grössen nach einer Abscisse positiv oder negativ ist. Hr.

---

H. Westergaard. En opgave fra Operationsregningen. Zeuthen Tidsskr. 3 VI. 37-41.

F. Buchwaldt. Tilföjelse III. til „ny (8) Methode for Differentiation med hvilkesomhelst Indices.“ Zeuthen Tidsskr. (3) VI. 41-56.

Gegen die von Herrn Buchwaldt in einer früheren Arbeit (siehe F. d. M. VII. p. 141) entwickelte Differentiationstheorie richtet Herr Westergaard einige Einwürfe, welche besonders die Bestimmung der beizufügenden complementaren Function betreffen. Herr Westergaard betrachtet die Operation $\left(\frac{d}{dx}\right)^r$ als von wesentlich verschiedener Art, jenachdem der Index positiv oder negativ ist. Die erste will er als directe, die andere als umgekehrte bezeichnet haben, und nur bei der letzteren ein Complement beifügen. Herr Buchwaldt bespricht in seinem Artikel diese Einwendungen und hebt namentlich hervor, dass man, um das allgemeinste Resultat zu erhalten, in allen Fällen ein Complement beifügen muss, das zwar gewissen Bedingungen genügen soll und in besondern Fällen auch gänzlich verschwinden kann. Ausserdem giebt er noch einige Beifügungen und Correctionen zu der ursprünglichen Abhandlung, und wendet schliesslich seine Methoden auf die Integration einiger linearer Differentialgleichungen an.

Gm.

---

CH. HERMITE. Lettre à M. P. Gordan. Clebsch Ann. X. 287-288.

Durch Vergleichung der durch Reihenentwickelung gewonnenen Form:

$$D_x^n (x^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = P_{(n-1)} + \frac{\varepsilon}{x^{n+1}} + \frac{\varepsilon'}{x^{n+3}} + \cdots$$

mit der aus den successiven Ableitungen gewonnenen:

$$D_x^n (x^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\Pi_{(n)}}{\sqrt{x^2-1}}$$

erhält der Verfasser einen Beweis der von Jacobi gefundenen Relation:

$$D_x^{n-1} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = (-1)^{n-1} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n} \sin[n . \operatorname{arc}\cos x].$$

M.

---

H. W. HARRIS. Solution of a question (4826). Educ. Times XXV. 28-29.

Es sei

$$\varphi(x) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

und $\psi(x)$ eine rationale ganze Function des Grades $m$ von $x$. Es wird bewiesen, dass dann

$$\Sigma \frac{d^{p-1}}{d\alpha_1{}^{p-1}} \cdot \left\{ \frac{\psi(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)^p} \right\} = 0,$$

wo

$$m \overline{\gtrless} np-2$$

und $\varphi'(x)$ die erste Derivirte von $\varphi(x)$ nach $x$ bezeichnet.

O.

---

J. WOLSTENHOLME. Solution of a question (4892). Educ. Times XXVI. 104-105.

Bedingung für die Abhängigkeit der drei Functionalgleichungen

$$\varphi_1(xyz) = 0, \quad \varphi_2(xyz) = 0, \quad \varphi_3(xyz) = 0$$

von einander ist, dass

$$\begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx}, & \frac{d\varphi_1}{dy}, & \frac{d\varphi_1}{dz} \\ \frac{d\varphi_2}{dx}, & \frac{d\varphi_2}{dy}, & \frac{d\varphi_2}{dz} \\ \frac{d\varphi_3}{dx}, & \frac{d\varphi_3}{dy}, & \frac{d\varphi_3}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

O.

---

# Capitel 3.
## Integralrechnung.

Y. ALEXÉIEF. Integralrechnung. Th. I. 2te Aufl. Moscau (Russisch). 1874.

Der vorliegende Band behandelt die Integration der expliciten Differentiale. Näheres über den Inhalt sehe man Darboux Bull. X. 168-169. O.

---

A. GENOCCHI. Studi intorno ai casi d'integrazione sotta forma finita. Mem. di Torino XXVIII. 1-18.

---

A. MARTIN. Integration of some differentials. Messenger (2) V. 145-147.

J. W. L. GLAISHER. Note on the foregoing paper. Messenger (2) VI. 147-150.

A. CAYLEY. Note and Further note on Mr. Martin's paper. Messenger (2) V. 163, VI. 82-83.

Herr Martin integrirt die Ausdrücke:

$$\frac{dx}{a+\sqrt{b^2 \pm x^2}}, \quad \text{arc sin} \frac{b}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Herr Glaisher vergleicht die Resultate für das erste Integral mit denen, die man aus den Formeln in Meyer Hirsch's Tafeln er-

hält. Die Formen sind sehr verschieden und die Vergleichung führt zu algebraischen Identitäten, die verificirt werden. Herrn Cayley's Noten beziehen sich auf Zweideutigkeiten, welche betreffs der Zeichen in Herrn Martin's Resultaten vorkommen.

Glr. (O.)

---

G. SCHMIDT. Theorie des Amsler'schen Planimeters. Prag. Ber. 1875. 188-191.

Die Herleitung des Satzes, welcher dem genannten Instrument zum Grunde liegt, ist analytisch durchgeführt und bietet nichts Besonderes.

B.

---

## Capitel 4.

## Bestimmte Integrale.

J. THOMAE. Zur Definition des bestimmten Integrals durch den Grenzwerth einer Summe. Schlömilch Z. XXI. 224-227.

Gegen den Existenzbeweis des einfachen Integrals, welchen der Verfasser in seiner Schrift „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale", Halle, bei Nebert (vergl. F. d. M. VII. 153) gegeben hat, ist von Herrn P. du Bois-Reymond der Einwand erhoben worden, es fehle der Nachweis, dass man nicht bloss dann, wenn man bei der Zerlegung eines Intervalls die Theile einer vorhandenen Theilung weiter theilt, sondern auch dann, wenn man die Theile in beliebiger Weise kleiner werden lässt, z. B. indem man das Intervall in gleiche Theile theilt und für die Theilungszahl grössere und grössere Primzahlen nimmt, einen und denselben Grenzwerth der Summe erhalte. Für das einfache Integral ist ein von diesem Mangel freier Beweis durch Herrn P. du Bois-Reymond bereits vorhanden. Zweck der vorliegenden Note ist nun, den vom Ver-

fasser in der citirten Arbeit gegebenen Existenzbeweis des Doppelintegrals nach der nämlichen Richtung zu ergänzen.

Hr.

---

F. MERTENS. Ueber die Kriterien der Maxima und Minima bestimmter Integrale. Schlömilch Z. XXI. 142-144.

L. ZMURKO. Theorie der relativen Maxima und Minima bestimmter Integrale. Wien. Denkschr. XXXVI. 235-256.

Siehe Abschn. VI. Cap. 7.

---

L. COHEN STUART. Sur un cas de discontinuité. Arch. Néerl. XI. 476-480.

Siehe F. d. M. VII. p. 156.

G.

---

W. LIGOWSKI. Ein Beitrag zur mechanischen Quadratur. Grunert Arch. LX. 329-333.

Eine Fortsetzung der Untersuchungen, über welche F. d. M. VII. 158 berichtet worden ist. Bezeichnen

$$y_0, y_2, y_4, \cdots y_{2n}$$

der Reihe nach die Functionswerthe

$$f\left(\frac{h}{2}-\lambda h\right),\quad f\left(\frac{h}{2}+\lambda h\right),\ldots$$

$$f\left((2n-1)\frac{h}{2}-\lambda h\right),\quad f\left((2n-1)\frac{h}{2}+\lambda h\right),$$

und $f(x)$ eine nach Potenzen von $x$ entwickelbare Function, so ergiebt sich, um so genauer, je kleiner $h$ ist:

$$\int_0^{nh} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(y_0+y_2+y_4+\cdots+y_{2n})$$

$$+\frac{1-12\lambda^2}{12}\Big(f'(nh)-f'(0)\Big)\frac{h^2}{2!}\cdot$$

Um halbconvergente Reihen für dieses Integral zu erhalten, kann man setzen:

$$\int_0^{nh} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(y_0+y_2+y_4+\cdots+y_{2n}) - \Sigma\frac{A_r}{(r+1)!}U_r h^{r+1},$$

wo

$$U_r = \left(\frac{d^r f(x)}{dx^r}\right)_{x=nh} - \left(\frac{d^r f(x)}{dx^r}\right)_{x=0}.$$

Zur Bestimmung der Coefficienten $A_r$ setzt der Verfasser für $f(x)$ die Function $e^x$; es ist $A_{2r-1}$ die $(2r)^{\text{te}}$ Ableitung der Function

$$V = \frac{h}{2}\,\frac{\text{Cos}.\,\lambda h}{\text{Sin}.\,\frac{h}{2}} \text{ für } h=0.$$

Diese Function $V$ lässt sich auch direct nach Potenzen von $h$ entwickeln. Am Schluss wird nachgewiesen, dass die Coefficienten $A$ Bernoulli'sche Functionen sind. M.

---

B. FÉAUX. Recherches d'analyse. Pr. Arnsberg.

I. Die unendliche Reihe $\sum\limits_{\alpha=1\ldots x}\frac{1}{(a+\alpha)^n}$, deren numerischen Werth Euler (Calcul intégral, Chap. VII.) für ein positives $n$, das $>1$ ist, als zwischen den beiden Grenzen $\frac{1}{(n-1)a^n}$ und $\frac{1}{(n-1)(a+1)^n}$ liegend nachgewiesen hat, wird vom Verfasser verallgemeinert zu folgender Reihe:

$$A\Sigma\frac{1}{(a+\alpha)^2} - B\Sigma\frac{1}{(a+\alpha)^3} + C\Sigma\frac{1}{(a+\alpha)^4} - D\Sigma\frac{1}{(a+\alpha)^5} + \cdots,$$

die den Charakter einer convergenten Reihe hat, sobald die Zahlencoefficienten $A, B, C, D$ etc. von einem bestimmten Gliede an abnehmen. Dies ist z. B. der Fall, wenn diese Coefficienten von der Form

$$\frac{1}{2.3},\ \frac{2}{3.4},\ \frac{3}{4.5},\ \frac{4}{5.6} \text{ etc.}$$

sind. Diese specielle Function wird nun benutzt zur Auswerthung des Legendre'schen Integrals

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx,$$

und es ergiebt sich die Formel:

$$\log \Gamma a = (a-\tfrac{1}{2})\log a + \tfrac{1}{2}\log 2\pi - a$$
$$+ \sum_{\alpha=0\ldots\infty} \left\{(a+\tfrac{1}{2}+\alpha)\log\left(1+\frac{1}{a+\alpha}\right)-1\right\}.$$

II. Aus der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1}\, dx = \frac{1}{a}\Gamma(n),$$

welche für positive Zahlen $a$ und $n$ gilt, lassen sich durch die Substitution $a-b$ resp. $a+b$ für $a$ und durch Addition resp. Subtraction der erhaltenen Gleichungen, die Integrale

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{Cos}(bx)\,.\,x^{n-1}\,dx, \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{Sin}(bx)\,x^{n-1}\,dx$$

bilden, deren Analogie mit denjenigen, in denen anstatt der hyperbolischen Functionen Sin, Cos, die trigonometrischen sin, cos auftreten, nachgewiesen wird. Aus ihnen erhält man leicht einige andere hyperbolische Integrale, die den entsprechenden Kreis-Integralen ganz analog sind.

III. Das Integral von Lagrange:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\,.\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

und das analoge für die hyperbolische Function $\mathrm{Cos}\,bx$ liefern die Auswerthung einer Reihe bestimmter Integrale, z. B.

$$\int_0^\infty e^{-4ax^2}\frac{\mathrm{Sin}(2n+1)x}{\mathrm{Sin}\,x}\,dx, \qquad \int_0^\infty e^{-4ax^2}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2}\cos bx\cdot\cos cx\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{Cos}\,bx\,.\,\mathrm{Cos}\,cx\,.\,dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\,.\,\mathrm{Cos}\,cx\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\sin bx\,\mathrm{Sin}\,cx\,dx \quad \text{u. a.,}$$

IV. Aus dem Integral

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

lässt sich die Relation

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Cos}\,2px}{(\mathrm{Cos}\,x)^{2q}}\,dx = 4^{q-1}B(q+p,\,q-p). \qquad (q>p)$$

herleiten, welche bemerkenswerthe Gleichungen für specielle bestimmte Integrale und für die Summation der Factoriellen liefert.

V. Die Eigenschaft der Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen für die durch die Gleichungen

$$u = x + yi, \quad U = X + Yi = f(u)$$

dargestellten Figuren wird untersucht für die hyperbolischen Functionen $U = \text{Sin}\, u$ und $U = \text{Tg}\, u$. M.

---

F. E. Prym. Zur Theorie der Gammafunction. Borchardt J. LXXXII. 165-172.

Siehe Abschn. VII. Cap. 2.

---

F. Hočevar. Ueber die unvollständige Gammafunction. Schlömilch Z. XXI. 449-450.

Der Verfasser giebt für die unvollständige Gammafunction

$$\Gamma(\mu, \xi) = \int_0^\xi x^{\mu-1} e^{-x}\, dx$$

die Entwickelung

$$\Gamma(\mu, \xi) = \frac{\xi^\mu e^{-\xi}}{\mu}\left(1 + \frac{\xi}{\mu+1} + \frac{\xi^2}{(\mu+1)(\mu+2)} + \cdots\right),$$

welche für grosse $\mu$ und kleine $\xi$ brauchbar ist, während die Legendre'sche für kleine $\xi$ und die Schlömilch'sche (Compendium II., V.) für grosse $\xi$ dienlich ist. M.

---

F. Hočevar. Ueber die Ermittelung des Werthes einiger bestimmter Integrale. Wien. Ber. LXXIV. 1-16.

Es werden mehrere Integralformeln abgeleitet, welche unter dem Integralzeichen eine im Allgemeinen willkürliche Function eines gegebenen Argumentes enthalten, und sich entweder auf ähnliche Integrale mit einfacheren Argumenten zurückführen oder vollständig berechnen lassen. Die vom Verfasser benutzte Methode der Reihenentwickelung beruht auf folgenden Sätzen: „Aus

der Gleichung

$$(1)\qquad \int_p^q u^n \cdot dx = \int_r^s v^n \cdot dx,$$

welche für beliebige ganze $n$ gelten soll, folgt

$$(2)\qquad \int_p^q \varphi(u)\, dx = \int_r^s \varphi(v)\, dx,$$

wenn nur die Moduln von $u$ und $v$ innerhalb des diesen Grössen zugehörigen Integrationsweges die Kreise nicht überschreiten, auf deren Peripherien die singulären Punkte der Function $\varphi$ gelegen sind", und „Nimmt man an, dass die Gleichung

$$(3)\qquad \int_p^q u^n . u_1\, dx = \int_r^s v^n . v_1\, dx,$$

in welcher auch $u_1$ und $v_1$ Functionen von $x$ bedeuten, für alle ganzzahligen $n$ bestehe, so gilt die Gleichung

$$(4)\qquad \int_p^q \varphi(u) . u_1\, dx = \int_r^s \varphi(v) . v_1\, dx,$$

welche derselben Bedingung in Bezug auf die Function $\varphi$ unterworfen ist." Enthalten die Gleichungen (1) und (3) nur reelle Grössen, so genügt es für die Gültigkeit der beiden anderen, dass die Function $\varphi$ in eine innerhalb des Integrationsraumes convergente Potenzreihe entwickelbar ist.

Von dieser Methode werden nun mehrere Anwendungen gemacht. Als Ausgangspunkt dient zuerst das von Poisson (J. d. l'Éc. pol. X.) betrachtete Integral

$$y = \int_0^\pi \frac{\sin px}{(1-2a\cos x + a^2)^n}\, dx,$$

zweitens das Integral

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (q + pe^{xi})^a\, dx = 2\pi q^a,$$

(siehe Bierens de Haan, Nouv. tables des intégr. déf. T. 29). Durch Specialisirung jener willkürlichen Function unter dem Integralzeichen können beliebig viele neue Integralformeln gefunden werden. M.

J. Wolstenholme. Investigation of the value of

$$\int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x^m}\, dx,$$

when $p$, $m$ are whole numbers, and $p > m$. Educ. Times XXV. 70-72.

Unter Benutzung der beiden bekannten Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\, dx = \log \frac{b}{a}$$

($a$, $b$ positiv),

aus deren letzterem folgt, dass für $A+B+C+\cdots = 0$,

$$\int_0^\infty \frac{A\cos ax + B\cos bx + \cdots}{x}\, dx = -A\log a - B\log b - \cdots$$

ist, und unter Anwendung der Relation

$$\int_0^\infty \frac{\sin^p ax}{x^m}\, dx = a^{m-1}\int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x^m}\, dx \quad (a \text{ positiv}),$$

findet der Verfasser den Werth des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x^m}\, dx,$$

wenn $m$ und $p$ ganze Zahlen sind. Es werden dabei folgende 4 Fälle unterschieden: 1) $p$ und $m$ beide grade, 2) $p$ und $m$ beide ungrade, 3) $p$ ungrade, $m$ grade, 4) $p$ grade, $m$ ungrade.

M.

---

E. Liebrecht. Ueber einige bestimmte Integrale. Grunert Arch. LIX. 218-224.

Zuerst wird unter Benutzung des Laplace'schen Integrales

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\, dx}{b^2+x^2} = \frac{\pi}{2b} e^{-ab} \qquad (a>0,\ b>0)$$

hergeleitet das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty \sin ax \frac{e^{nx}+e^{-nx}}{e^{nx}-e^{-nx}}\, dx = \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{e^{\frac{a\pi}{n}}+1}{e^{\frac{a\pi}{n}}-1},$$

und einige ähnliche. Im 2ten Abschnitt wird die Formel

$$\lim \int_0^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} \cdot \frac{dx}{b^2+x^2} = \frac{\pi}{2b} \cdot \frac{e^{2b}+1}{e^{2b}-1}$$

bewiesen; im 3ten werden 2 directe Herleitungen des bei Abel und Liouville sich findenden Integrals

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{a-1}\varphi . \sin a\varphi}{\sin\varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

gegeben; und am Schluss wird die von Raabe (Crelle J. XXVIII. p. 112) angeführte und von Stern (Zur Theorie der Euler'schen Integrale) bewiesene Relation

$$\int_0^1 \log \Gamma(x+k)\, dx = k\log k - k + \tfrac{1}{2}\log(2\pi)$$

auf anderem Wege, durch Bestimmung von

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{n}\log\Gamma(na) - a\log n\right),$$

verificirt. M.

---

J. W. L. Glaisher. On a formula of Cauchy's for the evaluation of a class of definite integrals. Proc. of Cambr. III. 5-11.

Die Cauchy'sche Formel (Exercises t. I. 54-56, 1826) lehrt: Wenn $f(x)$ eine grade Function von $x$ ist, und wenn

$$A_{2n} = \int_0^{\infty} x^{2n} f(x)\, dx, \qquad B_{2n} = \int_0^{\infty} x^{2n} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx$$

ist, so ist

$$B_{2n} = A_0 + \frac{(n+1)n}{1.2} A_2 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4} A_4 + \cdots$$
$$+ \frac{2n-1}{1} A_{2n-2} + A_{2n}.$$

In der Arbeit wird eine entsprechende Formel bewiesen. Ist nämlich $\varphi(x)$ eine ungrade Function von $x$, und ist

$$P_{2n-1} = \int_0^{\infty} x^{2n-1}\varphi(x)\, dx, \qquad Q_{2n-1} = \int_0^{\infty} x^{2n-1}\varphi\left(x - \frac{1}{x}\right) dx,$$

so ist

$$Q_{2n-1} = nP_1 + \frac{(n+1)\,n(n-1)}{1.2.3}P_3$$
$$+\frac{(n+2)(n+1)\,n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5}P_5 + \cdots + \frac{2n-2}{1}P_{2n-3} + P_{2n-1}.$$

Ueber den Beweis dieser beiden Sätze werden Bemerkungen hinzugefügt und einige Beispiele für den letzteren gegeben. Zum Schluss wird ein einfacher Beweis (von Prof. Cayley) gegeben, dass

$$\int_0^\infty f\left(x-\frac{1}{x}\right)dx = \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Glr. (O.)

---

K. Zahradnik. Eine Quadratur. Grunert Arch. LIX. 448.

Als geometrischer Ort für den Mittelpunkt des in den Halbmond des Hippokrates eingeschriebenen Kreises, sobald der Scheitel des gegebenen rechtwinkligen Dreiecks auf der Peripherie des umschriebenen Kreises sich bewegt, ergiebt sich

$$r = \frac{a}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi + 1),$$

und die Fläche der Curve ist

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\,d\varphi = \frac{a^2}{2}(\pi+5).$$

M.

---

Moret-Blanc, J. Graindorge. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 67-68, 168-170.

Gegeben ist das elliptische Paraboloid

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z;$$

die Grösse des auf die $xy$-Ebene im Innern der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

projicirten Theils seiner Oberfläche ist

$$\pi ab \int_0^1 du \sqrt{1+u} = \tfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\sqrt{ab}.$$

O.

---

S. Spitzer. Transformation der Function $x^n e^{\lambda x^2}$.
Grunert Arch. LVIII. 431-432.

Es ist

$$x^n e^{\lambda x^2} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{2\lambda})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ux\sqrt{2\lambda}} \frac{d^n e^{-\frac{u^2}{2}}}{du^n} du.$$

Hr.

---

W. H. L. Russell. On certain integrals. Proc. of London XXV. 172, 507-509.

Werthe von 39 bestimmten Integralen mit dahin gehörigen Untersuchungen. Dieselben haben die Form von Kreis- und Exponentialfunctionen. Cly. (O.)

---

E. B. Elliott. Note on a class of definite integrals.
Messenger (2) VI. 66-68.

Wenn $\varphi x$ eine Function ist, deren Grenzwerthe $\varphi(\infty)$ und $\varphi(0)$ bestimmt sind, und die für positive Werthe von $x$ nicht unendlich wird, so ist

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(\alpha x)-\varphi(\beta x)}{x}dx = \{\varphi(\infty)-\varphi(0)\}\log\frac{\alpha}{\beta};$$

nebst anderen allgemeinen Sätzen derselben Art. Glr. (O.)

---

J. W. L. Glaisher. On the integral $\int_0^\infty \frac{\cos x}{a^2+x^2}dx$.
Messenger (2) V. 168-171.

Der Werth des Integrals $\int_0^\infty \frac{\cos x}{a^2+x^2}dx$ ist bekanntlich

$\frac{\pi}{2a}e^{-a}$ oder $-\frac{\pi}{2a}e^{a}$, je nachdem a positiv oder negativ ist. Gegenstand der Arbeit ist die Untersuchung des Werths des Integrals, durch welches die algebraische Entstehung dieses Formwechsels gezeigt werden kann. Das Integral wird ausgewerthet mit Hülfe der Gleichung

$$\frac{1}{a^2+x^2}-\frac{1}{a^2+(x-\pi)^2}-\frac{1}{a^2+(x+\pi)^2}+\cdots$$
$$=\frac{2}{a}\left\{e^{-a}\cos x+e^{-3a}\cos 3x+\cdots\right\}.$$

Es wird gezeigt, dass der Formwechsel von derselben Art ist wie in der Gleichung

$$\frac{x}{1+x^2}=x-x^3+x^5\ldots,\text{ wenn } x<1.$$
$$=x^{-1}-x^{-3}+x^{-5}\ldots,\text{ wenn } x>1.$$

Glr. (O.)

---

J. W. L. Glaisher. Expression for $\theta(x)$ as a definite integral. Messenger (2) V. 173.

Sind $a$ und $b$ positiv und nicht gleich Null, so ist

$$e^{-a^2}+e^{-(a-b)^2}+e^{-(a-2b)^2}+\cdots$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{3a^2}\int_0^\infty e^{-t^2}\frac{\cos 4at-e^{-2ab}\cos(4a+2b)t}{1-2e^{-2ab}\cos 2bt+e^{-4ab}}dt,$$

$$e^{-a^2}+e^{-(a+b)^2}+e^{-(a+2b)^2}+\cdots$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{3a^2}\int_0^\infty e^{-t^2}\frac{\cot 4at-e^{-6ab}\cos(4a+2b)t}{1-2e^{-6ab}\cos 2bt+e^{-12ab}}dt,$$

oder nach der Bezeichnung der Fundamenta Nova

$$\theta(x+K)=\frac{K}{\pi}e^{\frac{3}{4}\frac{\pi x^2}{KK'}}\int_0^\infty e^{-\frac{KK'}{4\pi}t^2}\Big\{-\cos xt$$
$$+\frac{\cos xt-e^{-\frac{\pi x}{K'}}\cos(x+K)t}{1-2e^{-\frac{\pi x}{K'}}\cos Kt+e^{-\frac{2\pi x}{K'}}}+\frac{\cos xt-e^{-\frac{3\pi x}{K'}}\cos(x+K)t}{1-2e^{-\frac{3\pi x}{K'}}\cos Kt+e^{-\frac{6\pi x}{K'}}}\Big\}dt.$$

Der Ausdruck für $\theta(x)$ in der Arbeit enthält einen Fehler. In

den Exponenten unter dem Integral muss $x$ durch $x-K$ ersetzt werden. Glr. (O.)

---

J. W. L. Glaisher. Note on Fourier's theorem. Messenger (2) VI. 30-31.

Der Satz heisst

$$e^{k\frac{d^2}{dx^2}}\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} da\, dv\, e^{-kv^2}\cos v(a-x)\,\varphi(a).$$

Fourier's Satz ist der Fall: $k=0$. Glr. (O.)

---

T. Parmentier. Simplification de la méthode de l'interpolation de Thomas Simpson. Nouv. Ann. (2) XV. 241-250. Ann. d. P. et Ch. XI. 631-632.

Der Verfasser vollzieht einige unwesentliche Modificationen an der Simpson'schen und Poncelet'schen Quadraturformel und verbindet beide. Der Fehler wird nur an einer Reihe von Beispielen berechnet. Es scheint dabei übersehen worden zu sein, dass es zur Verminderung der Anzahl der Terme keiner Abänderung der Formel bedarf. H.

---

J. Thomson. On an integrating machine having a new kinematic principle. Proc. of London XXIV. 262-265.

Der Gedanke ist, $ydx$ zu integriren vermittelst eines Instrumentes, das dem bekannten Dynamometer von Morin und dem Planimeter von Sang ähnlich ist, bei welchem aber statt der combinirten rollenden und schleifenden Bewegung eine rollende Bewegung angewandt wird. Dies wird erreicht mit Hülfe einer schweren Kugel, welche zwischen einer kreisförmigen Scheibe (die gegen den Horizont geneigt ist und um ihre Axe, die auch gegen den Horizont geneigt ist, rotirt) und einem horizontalen Cylinder bleibt, der der Scheibe nahe ist, sie aber nicht berührt, und um seine Axe rotirt. Die Scheibe treibt die Kugel, welche ihrerseits den Cylinder treibt. Das Geschwindigkeitsverhältniss hängt von der

Lage der Kugel ab, welche eine longitudinale Bewegung in der Richtung der Cylinderaxe hat (oder was dasselbe ist, in der Richtung des horizontalen Durchmessers der Scheibe). Ist dann die eigene longitudinale Bewegung der Kugel gegeben, so wird, wenn man $dx$ als dargestellt betrachtet, durch eine unendlich kleine Drehung der Scheibe, die entsprechende unendlich kleine Drehung des Cylinders $ydx$ darstellen. Cly. (O.)

---

W. Thomson. On an instrument for calculating

$$\int \varphi(x)\,\psi(x)\,dx,$$

the integral of the product of two given functions. Proc. of London XXIV. 266-268.

Beschreibt eine Verbesserung des oben beschriebenen, von dem Bruder des Verfassers herrührenden mechanischen Integrators. Diese besteht aus einem Apparat, mit dessen Hülfe sich einfach und praktisch diejenigen Fourier'schen Reihen darstellen lassen, die bei Beobachtungen von Ebbe und Fluth, in der Meteorologie und Astronomie auftreten. Es ist das der Fall, wo

$$\varphi x = \frac{\sin}{\cos}(na)$$

und die Integration ausgedehnt wird über eine Reihe

$$= \frac{2i\pi}{n} \quad (i \text{ ist ein Integral}),$$

welche diese Anwendung giebt. Cly. (O.)

---

## Capitel 5.

## Gewöhnliche Differentialgleichungen.

J. Bertrand. Note sur l'intégration des équations différentielles totales. C. R. LXXXIII. 1191-1195.

Für die Integration der totalen Differentialgleichung

$$(1) \qquad Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

deren Coefficienten die bekannte Integrabilitätsbedingung

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0$$

erfüllen, giebt der Verfasser folgende neue Methode.

Man integrire das System

$$(2)\qquad \frac{dx}{\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}}=\frac{dy}{\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}}=\frac{dz}{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}},$$

dessen Integrale $\alpha=\varphi_1(xyz)$, $\beta=\varphi_2(xyz)$ seien. Dann geht (1) in $Md\alpha+Nd\beta=0$ über, wo $M$ und $N$ Functionen von $\alpha$ und $\beta$ sind; also in eine Gleichung mit nur 2 Variablen. Dies Verfahren wird an 4 Beispielen, die aus den classischen Werken über Integralrechnung entnommen sind, ausgeführt. Der Vortheil der Einfachheit dieser Methode bewährt sich namentlich an solchen integrablen Gleichungen, welche, wie die gewählten, zum Zwecke des Unterrichts aus einer mit einem Factor $\lambda$ multiplicirten Function $\varphi(xyz)$ durch Differentiation und nachherige Reduction hergestellt worden sind. Die Integrale des Systems (2) sind dann $\alpha=\lambda$, $\beta=\varphi$. Hr.

---

R. Lipschitz. Sur la possibilité d'intégrer complétement un système donné d'équations différentielles. Darboux Bull. X. 149-159.

Die Frage nach der Existenz der Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen und ihrer Darstellung innerhalb eines gewissen Gebietes der unabhängigen Variabeln ist in dem Falle endgültig erledigt worden, wo die Functionen, welche im System auftreten, für beliebige complexe Werthe ihrer Argumente definirt sind (Weierstrass, Sur la théorie des facultés analytiques Crelle J. XLI. p. 43, Briot et Bouquet, Théorie des fonctions doublement périodiques p. 49). Man kann dann voraussetzen, dass die unbekannten Lösungen mit Ausnahme gewisser Punkte in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen einer linearen Function der unabhängigen Variablen sich entwickeln lassen, und die Aufgabe besteht darin, die Convergenz der dem Systeme

formal genügenden Reihen zu erweisen. Sind hingegen die im System vorkommenden Functionen nur für reelle Werthe ihrer Argumente gegeben, dann ist die Voraussetzung einer Entwickelbarkeit der Lösungen in Reihen der erwähnten Beschaffenheit im Allgemeinen nicht mehr zulässig und es bleibt noch die Aufgabe, die Bedingungen für die Möglichkeit einer vollständigen Integration eines solchen Systems aufzustellen. Vorliegende Arbeit bezweckt die Ausfüllung dieser Lücke. Das System habe die Form:

$$\frac{dy^\alpha}{dx} = f^\alpha(x, y^1, y^2, \ldots y^n) \quad (\alpha = 1, 2 \ldots n).$$

Die Functionen $f^\alpha$ sind für ein continuirliches Gebiet $G$ von reellen Werthen der Variablen $xy^1 \ldots y^n$ gegeben und sollen innerhalb $G$ eindeutig, continuirlich und numerisch kleiner als eine gegebene Grösse sein. Eine zweite wesentliche Bedingung ist die Ungleichheit

(1) $[f^\alpha(h, k^1 \ldots k^n) - f^\alpha(h, l^1 \ldots l^n)] < c^{\alpha 1}[k^1 - l^1] + \cdots + c^{\alpha n}[k^n - l^n]$,

wo $[w]$ den absoluten Betrag von $w$ und $c^{\alpha\beta}$ positive Constanten bedeuten. Die zu $x = x_0$ gegebenen Anfangswerthe seien $y^\alpha = y^\alpha_0$. Das Werthsystem $(x_0\, y^1_0 \ldots y^n_0)$ muss sich im Innern von $G$ in einer endlichen Entfernung von den Grenzen befinden, so dass man positive Grössen $a_0$, $b^\alpha_0$ von der Beschaffenheit bestimmen kann, dass die Werthsysteme $(x, y^1, \ldots y^n)$, die den Ungleichheiten

$$[x - x_0] \leqq a_0 \quad [y^\alpha - y^\alpha_0] \leqq b^\alpha_0.$$

genügen, noch innerhalb G liegen. Bedeutet nun $A_0$ eine positive Grösse beliebig kleiner als $a_0$, und wird das durch die Ungleichheiten

$$[x - x_0] < A_0, \quad [y^\alpha - y^\alpha_0] \lesseqgtr b^\alpha_0$$

definirte Gebiet $H_0$ genannt, so handelt es sich darum, zu beweisen, dass es unter den erwähnten Bedingungen stets ein einziges System von $n$ Functionen $y^1 \ldots y^n$ giebt, welches dem vorgelegten System der Differentialgleichung genügt, für $x = x_0$ in das Werthsystem $y^1_0 \ldots y^n_0$ übergeht, und, während $x$ den Weg von $x_0 - A_0$ zu $x_0 + A_0$ zurücklegt, sich innerhalb des Gebietes $H_0$ stetig ändert. Zu dem Ende wird das Intervall zwischen $x_0$ und $x_0 + A_0$ (für das Intervall zwischen $x_0$ zu $x_0 - A_0$ gilt genau

das gleiche Verfahren) in $p$ kleinere Intervalle getheilt, so dass

$$x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_p = x_0 + A_0.$$

Dann werden $n$ Grössen $\eta_1^\alpha$ durch die $n$ Gleichungen

$$\eta_1^\alpha - y_0^\alpha = f^\alpha(x_0\, y_0^1 \ldots y_0^n)\,(x_1 - x_0) \quad \alpha = 1, 2 \ldots n$$

und so fortfahrend $n$ Grössen $\eta_{a+1}^\alpha$ durch die $n$ Gleichungen

$$\eta_{a+1}^\alpha - \eta_a^\alpha = f^\alpha(x_a, \eta_a^1 \ldots \eta_a^n)\,(x_{a+1} - x_a) \quad \alpha = 1, 2 \ldots n$$

bestimmt, worin successive $a = 1, 2 \ldots p-1$ zu nehmen ist. Mit Hülfe der Ungleichheit (1) wird gezeigt, dass alle diese Systeme noch im Gebiet $H_0$ liegen. Es erfolgt nunmehr eine weitere Theilung des Intervalls zwischen $x_a$ und $x_{a+1}$, in $p_a$ kleinere Intervalle und der Nachweis, dass das System $\eta_{a+1}^\alpha$ ($\alpha = 1, 2 \ldots n$), welches man alsdann nach dem obigen Verfahren erhält, sich einer festen endlichen Grenze nähert, wenn man die Zahl $p_a$ unbestimmt wachsen und die Intervalle zwischen $x_a$ und $x_{a+1}$, unbestimmt abnehmen lässt, und zwar ist diese Grenze unabhängig von dem Gesetz, nach welchem die Zunahme von $p_a$ und die Abnahme der entsprechenden secundären Intervalle geschieht, während die primären Intervalle zwischen $x_0\, x_1 \ldots x_p$ fest bleiben.

Hr.

---

E. J. Nanson. On the number of arbitrary constants in the complete solution of ordinary simultaneous differential equations. Messenger (2) VI. 77-81.

Die Arbeit hat den Zweck zu zeigen, wie man die Zahl der willkürlichen Constanten in der vollständigen Lösung eines Systems von gewöhnlichen simultanen Differentialgleichungen bestimmen kann.

Glr. (O.)

---

V. Imschenetzky. Ueber die Integration eines Systems von Gleichungen. Mosc. Math. Samml. VIII. (Russisch).

Das System, um welches es sich handelt, ist

$$\frac{dx}{Q} = \frac{dy}{P} = \frac{dq}{X} = \frac{dp}{Y},$$

worin

$$X+Y\sqrt{-1} = f(x+y\sqrt{-1}) \text{ und } P+Q\sqrt{-1} = \varphi(p+q\sqrt{-1})$$

Functionen einer complexen Veränderlichen (nach Riemann) bedeuten. Die Integration wird auf zwei verschiedene Arten durchgeführt, indem man erstens den Jacobi'schen Multiplicator des Systems bestimmt und zweitens das vorgelegte System auf die canonische Form bringt. In beiden Fällen zeigen die bekannten Bedingungen, denen $X$, $Y$, $P$, $Q$ vermöge ihrer Definition genügen, dass die Integration des Systems auf Quadraturen zurückgeführt werden kann. P.

---

E. J. Nanson. On the theory of the solution of a system of simultaneous non-linear differential equations of the first order. Proc. of London XXIV. 337-344.

Die betrachtete Frage ist folgende. Gegeben ist ein System von $n$ nicht linearen partiellen Differentialgleichungen, mit den $n+r$ unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \dots x_{n+r}$, den $n+r$ derivirten Functionen $p_1, p_2, \dots p_{n+r}$ und entweder der abhängigen Variabeln $z$ oder nicht: zu finden die Bedingungen, damit eine vollständige primitive Lösung existire, welche $r+1$ Constante enthält, und zu untersuchen, welche Art Lösung, falls es überhaupt eine giebt, es ist, wenn die Bedingungen nicht erfüllt werden. Die Untersuchungen basiren auf einer Verallgemeinerung der Boole'schen. Denn es hängt davon ab, $p_1, p_2, \dots p_{n+r}$ so zu bestimmen, dass sie der aufgestellten Gleichung genügen und noch der Bedingung, dass

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_{n+r} dx_{p+r}$$

ein vollständiges Differential ist. Die Untersuchungen sind mit Hülfe des Jacobi'schen Symbols $[f_i, f_j]$ geführt, und die Resultate scheinen denen äquivalent zu sein, die Bour bei seinen Untersuchungen über denselben Gegenstand erhalten hat.

Cly. (O.)

F. Casorati. Alcune formole fondamentali per lo studio delle equazioni algebrico-differenziali di primo ordine e secondo grado tra due variabili ad integrale generale abgebrica. Brioschi Ann. (2) VII. 197-201.

F. Casorati. Sulla teoria delle soluzioni singolari delle equazioni differenziali. Rend. Ist. Lomb. 1875.

F. Casorati. Nuova teoria delle soluzioni singolari delle equazioni differenziali di primo ordine e secondo grado tra due variabili. Roma, Salviucci 1876. Estratto Acc. R. L. (2) III. 160-167.

Die erste Note ist ein Abdruck der zuerst in den Rend. d. Ist. Lomb. 1874 (vgl. Fortschr. d. M. VI. 200) erschienenen Notiz, in welcher folgende Sätze bewiesen werden.

Es sei

$$A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0$$

die durch Elimination der willkürlichen Constanten $w$ aus der Gleichung

$$aw^2 + 2bw + c = 0$$

und ihrem Differential hervorgegangene Differentialgleichung, ($a$, $b$, $c$, $A$, $B$, $C$ Functionen der Variablen $u$, $v$), so bestehen die Relationen

$$(1) \qquad AC - B^2 = 4gk^2,$$

wo

$$g = ac - b^2,$$

$$k = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial u} \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix}$$

und

$$(2) \qquad A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = (dg)^2 - 4g(da\,dc - db^2).$$

In dem besonderen Falle, dass $a, b, c$ ganze rationale Functionen von $u$, $v$ sind, können $A$, $B$, $C$ den gemeinschaftlichen Factor $\vartheta$ enthalten, so dass

$$A = \vartheta\alpha, \quad B = \vartheta\beta, \quad C = \vartheta\gamma,$$

und (1) geht über in

$$(3) \qquad \vartheta^2(\alpha\gamma-\beta^2) = 4(ac-b^2)k^2.$$

Daran schliesst sich eine Reihe von Sätzen über den Grad der Vielfachheit der in den einzelnen Termen der vorstehenden Gleichung enthaltenen Factoren.

Der zweite Aufsatz enthält eine allgemeine Exposition der Principien in der Theorie der singulären Lösungen einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung und $m^{\text{ten}}$ Grades von der Form

$$(4) \qquad \varphi_0\, du^m + \varphi_1\, du^{m-1}\, dv + \cdots + \varphi_m\, dv^m = 0,$$

wo $\varphi_0$, $\varphi_1 \ldots$ ganze rationale Functionen von $u$, $v$ bezeichnen, unter der Voraussetzung, dass sie ein allgemeines algebraisches Integral zulässt, welches alsdann die Gestalt haben muss:

$$f_0\omega^m + f_1\omega^{m-1} + \cdots + f_m = 0$$

($\omega$ willkürliche Constante, $f_0 f_1 \ldots$ ganze rationale Function von $u$, $v$). Durch Elimination von $\omega$ aus dieser Gleichung und ihrem Differential erhält man

$$(5) \qquad F_0\, du^m + F_1\, du^{m-1}\, dv + \cdots F_m\, dv^m = 0,$$

und es ist $F_k = \vartheta\varphi_k$, wo $\vartheta$ eine ganze rationale Function von $u$, $v$ ist, wenn, was vorausgesetzt wird, die $\varphi$ keinen gemeinsamen Factor haben. Die Factoren von $\vartheta$ gleich Null gesetzt, heissen uneigentliche Lösungen von (5), sie geben keine Lösungen von (4). Was nun die singulären Lösungen der letzteren betrifft, so ist es nach dem Verfasser für eine genaue und vollständige Theorie derselben unerlässlich, die Primfactoren der Discriminanten sowohl von (4) als von (5) — bei deren Bildung, respective $du$, $dv$ und $\omega$ als die zu eliminirenden Grössen gelten — auf den Grad ihrer Vielfachheit zu untersuchen. Hierbei wird bemerkt, dass die beiden Formeln (2) und (3) eine Verallgemeinerung für die betrachtete Differentialgleichung $m^{\text{ten}}$ Grades zulassen, was jedoch nicht näher ausgeführt wird. In der dritten Arbeit wird nun auf Grundlage der in der ersten Note gegebenen Formeln (2) und (3) die Theorie der singulären Lösungen einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades unter der Voraussetzung, dass sie ein algebraisches Integral zulässt, ausgeführt. Nach dem Grade der Vielfachheit,

welche die Primfactoren in $ac - b^2 = g$ und $\alpha\gamma - \beta^2 = s$ besitzen, werden 7 Fälle unterschieden und gezeigt, dass alle diejenigen Primfactoren, welche in $g$ und $s$ gleichzeitig einfach enthalten sind, und nur diese gleich Null gesetzt, singuläre Lösungen geben. Ist das allgemeine Integral und also $g$ nicht bekannt, so hat man um alle singulären Lösungen zu finden, unter den in $s$ vorhandenen einfachen Primfactoren diejenigen zu ermitteln, welche gleich Null gesetzt, die Differentialgleichung befriedigen. Im zweiten Abschnitt wird jeder der oben erwähnten Fälle geometrisch interpretirt und dabei auch der Punkt näher erörtert, über welchen eine Bemerkung des Herrn Darboux eine Discussion zwischen diesem Mathematiker und Herrn Catalan hervorgerufen hat (C. R. 1870, Fortschr. d. M. II. 558). Hr.

---

W. Veltmann. Kriterien der singulären Integrale der Differentialgleichungen erster Ordnung. Grunert Arch. LVIII. 337-341.

Die Frage wird von einem, wie uns scheint, ganz neuen Gesichtspunkt behandelt. Als singuläre Auflösung der Differentialgleichung $f(xyy') = 0$ wird die Lösung $y = \varphi(x)$ bezeichnet wenn keine ihr benachbarte Lösungen existiren, d. h. solche, welche entstehen, wenn man die Function $\varphi(x)$ unendlich variiren lässt. Es darf also für die singuläre Lösung nicht gleichzeitig

$$f(xyy') = 0, \quad \delta f(xyy') = \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\delta y^2}{1.2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\delta y\, \delta y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\frac{\delta y'^2}{2} + \text{etc.} = 0$$

für ein von Null verschiedenes $\delta y$ stattfinden. Aus der zweiten Gleichung erhält man, wenn die Glieder der $n^{\text{ten}}$ Dimension in Beziehung auf $\delta y$ die niedrigsten sind, welche nicht sämmtlich verschwinden, für das Verhältniss

$$\frac{\delta y'}{\delta y} = \frac{d \log \delta y}{dx} = u$$

die Gleichung

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^n} + n\frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}\partial y'}u + \cdots \frac{\partial^n f}{\delta y^n y'^n}u^n = 0.$$

Je nachdem dieselbe nun für $u$ endliche Werthe liefert oder nicht, ist das gegebene Integral ein particuläres oder singuläres.

Hr.

---

E. Prix. Ueber singuläre Lösungen der Differentialgleichungen erster Ordnung. Pr. Annaberg.

Ist $y' = \varphi(x, y)$ die gegebene Differentialgleichung, so ist nach Cauchy die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $y = \psi(x)$ eine singuläre Lösung derselben sei, dass für jedes $x$

$$(1)\qquad \lim \int_{\psi(x)-\alpha}^{\psi(x)+\alpha} \frac{dy}{\varphi(x, y) - \varphi(x, \psi(x))} = 0 \text{ für } \alpha = 0.$$

Hiervon giebt der Verfasser einen strengen Beweis unter der Voraussetzung, dass $\varphi(xy)$, als Function von $y$ betrachtet, für $y = \psi(x)$ sich stetig ändere. Es erfolgt dann eine Anwendung dieses Kriteriums auf die beiden Fälle, dass $\varphi(xy)$, 1) eine rationale Function, 2) ein Aggregat von Wurzeln rationaler Functionen von $x$ und $y$ ist. Für diesen Zweck wird obige Bedingung noch in die folgende

$$(2)\qquad \lim \frac{y - \psi(x)}{\varphi(xy) - \varphi(x, \psi(x))} = 0 \text{ für } y = \psi(x)$$

transformirt, aus der unmittelbar das bekannte Laplace'sche Kriterium

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \infty \text{ für } y = \psi(x)$$

sich ergiebt (die Ableitung desselben aus dem Cauchy'schen Kriterium hat bereits Herr Zajaczkowski Grunert Arch. LVI., vgl. Fortschr. VI. p. 196 gegeben).

Es ist nun zu bemerken, dass die Umformung von (1) in (2) nicht wie der Verfasser anzunehmen scheint, in allen Fällen gültig ist. Sie setzt voraus, dass

$$\lim \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(x)\, dx \text{ für } \alpha = 0$$

verschwindet, wenn

$$\lim x\, f(x) = 0 \text{ für } x = 0,$$

was zwar in den Fällen, wo $f(x)$ eine algebraische Function ist, stets zutrifft, nicht aber z. B., wenn

$$f(x) = \frac{1}{x \log x}$$

ist, (vgl. Riemann über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe (Math. Werke p. 225), ein Fall, welcher in dem p. 15 behandelten Beispiel eintritt. Die Ungültigkeit des Laplace'schen Kriteriums in gewissen Fällen beruht demnach nicht, wie der Verfasser angiebt, auf der, übrigens ganz uncontrollirbaren, Beschaffenheit der bei der Transformation von (2) eingeführten Grössen $\alpha$, $\gamma$, sondern darauf, dass die Bedingungsgleichung (2), welche mit der Laplace'schen äquivalent ist, in denselben Fällen, wie die letztere unzulänglich wird, indem ihre Erfüllung zwar nothwendig, aber nicht hinreichend für das Stattfinden von (1) ist. Zum Schluss werden noch einige geometrische Beispiele behandelt. Citirte Literatur: Timmermann's Mém. sur les solutions singulières des éq. diff. (Mém. de Belg. T. 15). Houtain, des solutions singulières des éq. diff. (Ann. d. Un. Belg. 1851 und 1852, Darboux, C. R. 70, Mansion, Note sur les solutions sing. des éq. diff. (Bull. de Belg. 1872).

Hr.

---

A. Cayley. On the theory of the singular solutions of differential equations of the first order. Messenger (2) VI. 23-27.

Fortsetzung einer früheren Arbeit mit demselben Titel (Messenger (2) II. 6—12, siehe F. d. M. IV. p. 148). Der Verfasser discutirt verschiedene specielle Fälle, namentlich die Fälle, in denen die Differentialgleichung von der Form

$$(L, M, N \widehat{)(} p, 1)^2 = 0$$

ist, wo $L$, $M$, $N$ rationale ganze Functionen von $(x, y)$ sind, und erörtert die Frage, ob es eine Gleichung

$$(P, Q, R \widehat{)(} c, 1)^2 = 0$$

giebt, in der $P$, $Q$, $R$ ganze rationale Functionen von $x$ und $y$ sind.

Die Integrale und singulären Lösungen der Gleichungen

$$dy^2-(1-y^2)\,dx^2=0,\quad (1-x^2)\,dy^2-(1-y^2)\,dx^2=0$$
$$(1-y^2)\,dy^2-dx^2=0,\quad (1-y^2\,dy^2-(1-x^2)\,dx^2=0$$

werden insbesondere untersucht. Glr. (O.)

---

P. Mansion. On Clairaut's equations. Messenger (2) VI. 90-93.

Die Arbeit enthält 1) den Beweis, dass Clairaut's Gleichung die einzige Gleichung zweiter Ordnung ist, deren Integral man dadurch erhält, dass man $\frac{dy}{dx}$ durch eine willkürliche Constante ersetzt, 2) einen zweiten Beweis, welcher dies anwendet auf die verallgemeinerte Clairaut'sche Gleichung mit einer beliebigen Zahl von Variabeln, 3) wird bewiesen, dass jede Differentialgleichung erster Ordnung, von der das Integral $u=C$ bekannt ist, auf die Clairaut'sche Form reducirt werden kann, indem man $X=v$ setzt, wo $v$ eine bestimmte Function von $x$ und $y$, $Y=uv+f(v)$, wo $f$ willkürlich. Man kann beispielsweise unmittelbar auf die Clairaut'sche Form jede Gleichung reduciren, deren Integral von der Form

$$F(x,y)=C\varphi(x,y)+f(C)$$

ist, dadurch dass man $X=\varphi$, $Y=F$ setzt.

Die Gleichungen

$$Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+(x^2-Ay^2+B)\frac{dy}{dx}-xy=0$$

und

$$\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}+\frac{dy}{\sqrt{1-k^2\sin^2 y}}=0$$

werden zu Beispielen benutzt. Glr. (O.)

---

A. Cayley. Note on the demonstration of Clairaut's theorem. Messenger (2) V. 166-167.

Es wird der leitende Gedanke des Beweises angegeben, so dass analytische Rechnungen völlig ausgeschlossen werden.

Glr. (O.)

---

A. Cunningham. On Clairautian functions and equations. Proc. of London. XXV. 43.

Der Name „Clairautian function" wird folgenden Ausdrücken, welche ähnliche Eigenschaften haben, wie der, durch den die Lösung der Clairaut'schen Gleichung gefunden wird, gegeben:

$$y^{(n)};\ ky^{(n-1)} - xy^{(n)};\ \frac{k.k+1}{1.2}y^{(n-2)} + \frac{k}{1}\cdot\frac{-x}{1}y^{(n-1)} + \frac{x^2}{1.2}y^{(n)};\ \ldots$$

Eine Differentialgleichung, welche solche Functionen enthält, heisst „Clairautian equation". Cly. (O.)

---

A. Cunningham. Geometric meaning of differential equations. Quart. J. XIV. 226-229.

Cly.

---

J. Cockle. On tests of singularity. Quart. J. XIV. 146-167.

Fortsetzung zu des Verfassers Arbeit: „On particular integral" (Quart. J. XIII. 239-255, s. F. d. M. VI. p. 295). Die Arbeit ist in 11 Theile getheilt. 1) Einleitung, 2) Taylor's Satz, 3) Ueber die Schlüsse, durch welche Euler's Satz festgestellt werden kann, 4) Ueber Lagrange's Methode und eine ihrer Anwendungen, 5) Dr. Morgan's Aufstellungen und die dagegen erhobenen Bedenken, 6) Ueber Euler's Kriterium und Laplace's Regel, 7) Geometrische Interpretation, 8) Vielfache singuläre Lösungen, 9) Poisson's Verfahren, 10) Boole's Verfahren und Cauchy's Satz, 11) Ternäre Quantoide. Cly. (O.)

L. Fuchs. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Liouville J. (3) II. 158-160.

Der Verfasser giebt eine kurze Analyse seiner in Borchardt's J. LXXXI. (vgl. Fortschr. VII. p. 172) erschienenen Arbeit, worin das Problem gelöst ist, die Beschaffenheit einer Differentialgleichung zweiter Ordnung anzugeben, damit sie algebraische Integrale besitze, oder wenn die Differentialgleichung vorgelegt

ist, zu erkennen, ob sie durch algebraische Integrale befriedigt werde. Hr.

---

PEPIN. Sur les équations linéaires du second ordre.
C. R. LXXXII. 1323-1326.

L. FUCHS. Sur les équations linéaires du second ordre.
C. R. LXXXII. 1434-1437; LXXXIII. 46-47.

Anlässlich der citirten Arbeit des Herren Fuchs bringt Herr Pepin eine von ihm über denselben Gegenstand im Jahre 1863 in den Annalen von Tortolini Bd. V. erschienene Arbeit in Erinnerung, in welcher er das in Rede stehende Problem bereits in grösserer Vollständigkeit gelöst zu haben glaubt. Als das Hauptergebniss seiner diesbezüglichen Entwickelungen bezeichnet er folgendes Theorem: „Wenn das allgemeine Integral der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = Py$ algebraisch ist, so giebt es immer ein particuläres Integral $y$ von der Beschaffenheit, dass $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$ eine rationale Function von $x$ oder eine Wurzel einer Gleichung zweiten oder vierten Grades ist."

Der Verfasser giebt ferner an, spätere darüber angestellte Untersuchungen hätten ihn zu dem Resultat geführt, dass die Primformen des Herrn Fuchs sich stets auf den ersten oder zweiten Grad zurückführen lassen. Herr Fuchs weist die Unrichtigkeit beider Behauptungen an der Gleichung

$$x(x-1)y'' + \frac{6x-3}{5}y' + \frac{100}{3}y = 0$$

nach, von der bereits Herr Schwarz (Borchardt J. LXXV. p. 323) bewiesen, dass sie lauter algebraische Integrale besitzt. Hierbei zeigt es sich, dass der niedrigste Grad, den in diesem Falle die Primformen annehmen können, der zwölfte ist.

Hr.

C. Jordan. Sur les équations linéaires du second ordre, dont les intégrales sont algébriques. C. R. LXXXII. 605-607; LXXXIII. 1033-1037.

F. Klein. Ueber lineare Differentialgleichungen. Erl. Ber. 1876.

Auch hier handelt es sich um lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die durchaus algebraische Integrale besitzen. Beiden Noten dient als Ausgangspunkt die Bemerkung, dass, da bei beliebigen Umläufen der unabhängigen Variablen $x$, zwei linear unabhängige Integrale $y_1 y_2$ sich in $ay_1+by_2$; $cy_1+dy_2$ ($abcd$ constante Coefficienten) transformiren, im vorliegenden Falle, wo $y_1$ und $y_2$ algebraisch sein sollen, die durch die Differentialgleichung bestimmte Gruppe der Substitutionen eine endliche Anzahl derselben enthalten müsse. Es ist also die Aufgabe, alle Gruppen mit einer endlichen Anzahl linearer Substiutionen aufzufinden, diese fällt mit der Frage zusammen, die Gruppen der ganzen Rotationen zu finden, welche die regulären Körper mit sich zur Deckung bringen (vgl. Klein, Clebsch Ann. IX. p. 183—208). Herr Jordan stellt nun für die Form der Gleichungen, denen die algebraischen Integrale genügen müssen, drei Typen auf. Dieselben sind nicht erschöpfend. Herr Jordan hat sie inzwischen (C. R. LXXXIII. p. 1035) durch einen neuen Typus ergänzt. Eine Methode, aus der Differentialgleichung die Existenz eines allgemeinen algebraischen Integrals zu erkennen, ist von Herrn Jordan nicht angegeben.

Herr Klein führt den Quotienten $\eta = y_1:y_2$ ein, und giebt mit Bezugnahme auf seine oben citirte Arbeit 5 Gleichungsformen an, unter denen eine von $\eta$ befriedigt werden muss, wenn die Differentialgleichung lauter algebraische Integrale haben soll. Bei dieser Gelegenheit wird bemerkt, dass die von Herrn Fuchs (Borchardt J. LXXXI. p. 126) aufgestellte Tabelle der Primformen niedrigsten Grades noch überflüssige Formen enthält. Es werden ferner die Differentialgleichungen für $\eta$ aufgestellt, welche zu jeder der 5 Integralgleichungen gehören. Das Problem, aus der vorgelegten Differentialgleichung zweiter Ordnung zu erkennen, ob sie nur algebraische Integrale besitzt, findet sich hierdurch auf

die andere allerdings noch ungelöste Aufgabe zurückgeführt, zu entscheiden, ob gewisse nicht lineare Differentialgleichungen dritter Ordnung mit rationalen Coefficienten rationale Lösungen haben. Hr.

M. A. Baraniecki. Beweis eines Satzes aus der Theorie der hypergeometrischen Functionen. Par. Denkschr. VIII. (Polnisch).

Eine Untersuchung der Eigenschaften der Jacobi'schen Integrale der hypergeometrischen Gleichung führt den Verfasser zu einem neuen Beweis des Thomé'schen Satzes, welcher sich auf die Endlichkeit, Stetigkeit und Einwerthigkeit der hypergeometrischen Functionen bezieht. Dn.

M. Tichomandritzky. Ueber hypergeometrische Reihen. Diss. St. Pet. 1876 (Russisch).

Eine Darstellung der Eigenschaften der hypergeometrischen Reihen, mit Rücksicht auf die Arbeiten von Riemann, Fuchs, Thomé, Pochhammer und Anderen. P.

Streit zwischen Winckler und Spitzer. Wiener Presse XXIX. Nr. 20, 24, 26, 29.

A. Winckler. Ueber die Integration linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mittelst einfacher Quadraturen. Wien, 1876. Hölder.

Herr Winckler hatte im 67. und 71. Bande der Wien. Ber. 2 Abhandlungen über lineare Differentialgleichungen veröffentlicht, in denen auf die Arbeiten des Herrn Spitzer über denselben Gegenstand (gesammelt in den Schriften: Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen 1860, 1861, 1862 und „Neue Studien etc. 1874) nirgends Bezug genommen wird. Dies veranlasste Herrn Spitzer, sich mit einer Beschwerdeschrift an die Wiener Akademie zu wenden, welche darin ersucht wurde, seine „geistigen Arbeiten zu schützen und nicht zuzugeben, dass dieselben unter fremdem Namen in ihren Schriften abgedruckt erscheinen.“ Als diesem Ansuchen keine Folge gegeben wurde,

übergab Herr Spitzer das Schreiben der Wiener „Presse“, und eröffnete damit in einer politischen Zeitung eine Polemik rein mathematischen Inhalts, die sich durch mehrere Nummern der „Presse“ fortsetzte. Wir heben aus derselben nur hervor, dass Herr Winckler die Beschuldigung der Aneignung der Resultate des Herrn Spitzer nachdrücklich zurückweist, und vorbehaltlich eines einlässlichen Nachweises Herrn Spitzer zur Entscheidung darüber, dass die von Herrn Winckler gefundenen Resultate nicht in den Spitzer'schen Studien enthalten sind, öffentlich auffordert, von der speciellen Differentialgleichung

$$12xy'' + (7 - 12x)y' + 800y = 0$$

eine vollständige Lösung, jedoch ausschliesslich in Form von Quadraturen, wie sie nach der Winckler'schen Methode berechnet werden kann, lediglich nach den in den „Studien“ befindlichen Formeln zu liefern. Die darauf erfolgte Antwort des Herrn Spitzer, dass dieselbe im § 14 des ersten Abschnittes der „Studien“ enthalten sei, lässt Herr Winckler als der gestellten Forderung entsprechend nicht gelten, da im § 14 gar keine Formel vorkomme, die eine Quadratur ist.

In der citirten selbstständigen Schrift, welche den ausführlichen Nachweis der Grundlosigkeit der Anklagen des Herrn Spitzer zum Zweck hat, präcisirt der Verfasser die Aufgabe, die er sich in den Eingangs erwähnten Arbeiten gestellt hatte, dahin, die beiden Gleichungen

$$(h_0x + h)y'' + 2(k_0x + k)y' + (l_0x + l)y = 0,$$
$$(h_0x + h)^2y'' + 2(k_0x + k)y' + l_0y = 0,$$

sowie auch die Riccati'sche Differentialgleichung in voller Allgemeinheit für alle reellen und complexen Werthe der constanten Coefficienten und der Variablen ausschliesslich durch einfache bestimmte Integrale zu integriren. Von Interesse ist die kurze Angabe des Grundgedankens, welcher den Verfasser zur Lösung dieser Aufgabe geführt hat. Giebt man dem Integral nach dem Vorgang von Euler die Form

$$R\int_{u_0}^{u_1} e^{\gamma x^n . u} . u^{\alpha-1}(c-u)^{\beta-1}\,du,$$

wo $\alpha$ und $\beta$ gewisse durch die Coefficienten der Differentialgleichung gegebene Grössen, $R$ eine Function von $x$, und $\gamma$ und $c$ 2 noch zu bestimmende Constanten sind, dann erhält man für die letzteren nur eine einzige Gleichung $\gamma c = x$, wo $x$ eine gegebene Grösse ist. Von diesem Umstand kann man den Gebrauch machen zu bewirken, dass sich stets zwei reelle Grenzen $u_0$ und $u_1$ angeben lassen, zwischen welchen genommen das Integral einen endlichen Werth erhält, und zugleich der betreffenden Differentialgleichung genügt (vgl. Fortschr. V. p. 186).

In einem zweiten Abschnitte macht der Verfasser 10 Fälle namhaft, in welchen Herrn Spitzer der Irrthum begegnet ist, als vollständige Lösungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung Ausdrücke aufzustellen, in denen die beiden auftretenden particulären Integrale, statt von einander unabhängig zu sein, sich nur um einen constanten Factor unterscheiden. Es dürfte von Wichtigkeit sein, die betreffenden Formeln hier zu bezeichnen, sie sind in den „Studien" enthalten und haben die Nummern:

76, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 88.

Herr Winckler führt in jedem einzelnen Falle durch ein directes Verfahren die betreffenden particulären Integrale aufeinander zurück. In dem letzten Falle hat bereits Herr Igel (Wien Ber. Juli 1876) die Unrichtigkeit der Spitzer'schen Formel auf anderem Wege erschlossen.

Hr.

---

S. Spitzer. Note über lineare Differentialgleichungen. Grunert Arch. LX. 334-335.

Nach Petzval hat die Differentialgleichung, deren allgemeines Integral

$$y = C_1 e^{\int \varphi_1 dx} + C_2 e^{\int \varphi_2 dx}$$

ist, die Gestalt

$$(\varphi_2 - \varphi_1) y'' - (\varphi_2^2 - \varphi_1^2 + \varphi_2^1 - \varphi_1^1) y'$$
$$+ \varphi_2^2 \varphi_1 - \varphi_1^2 \varphi_2 + \varphi_1 \varphi_2^6 - \varphi_1 \varphi_2') y = 0$$

unter $\varphi_1$, $\varphi_2$ beliebige Functionen von $x$ verstanden. Herr Spitzer leitet hieraus specielle Ergebnisse ab, indem er

$$(1) \quad \int \varphi_1 \, dx = m\varphi(x), \qquad \int \varphi_2 \, dx = n\varphi(x),$$

$$(2) \quad \int \varphi_1 \, dx = m \log \varphi(x), \qquad \int \varphi_2 \, dx = n \log \varphi(x)$$

setzt. Hr.

---

S. Spitzer. Note über Differentialgleichungen der Form $(a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y=0$. Grunert Arch. LVIII. 361-369.

Es wird der Fall besprochen, wo die vorstehende Gleichung die Gestalt hat

$$ny''+(m+x-n\alpha)y'+(A-\alpha(m+x))y=0$$

und $A$ negativ gebrochen ist. Durch die Substitutionen

$$y=e^{\alpha x}.z, \quad m+x-n\alpha=\xi\sqrt{-n}$$

wird dieselbe in die Gleichung

$$\frac{d^2z}{d\xi^2}=\xi\frac{dz}{dx}+Az$$

transformirt, und diese in der Weise weiter behandelt, dass sie $\mu$-mal nach $\xi$ differentiirt wird. Wenn nun $\mu$ so gewählt wird, dass $\mu+A$ positiv ist, so gelangt man für $\frac{d^\mu z}{d\xi^\mu}$ zu einer Differentialgleichung, die aus der obigen durch die Substitution $A+\mu$ für $A$ hervorgeht, und auf welche sich die Laplace'sche Integrationsmethode anwenden lässt. Hr.

---

C. Le Paige. Note sur l'équation $xy''+ky'-y=0$. Bull. de Belg. (2) XLI. 1011-1016.

E. Catalan. Rapport sur la note de Mr. Le Paige. Bull. de Belg. (2) LXI. 935-939.

H. Brocard et E. Catalan. Question 116. N. C. M. II. 282-283.

C. Le Paige. Sur une équation aux différences finies. N. C. M. II. 301-302.

C. Le Paige. Note sur certaines équations différentielles. Ann. Soc. scient. Brux. I B. 51-58.

C. Le Paige. Remarque sur la note de M. Glaisher. N. C. M. II. 279-280.

Die Reihe von Legendre (Géométrie, note IV.)

$$y = 1 + \frac{x}{k} + \frac{x^2}{1.2.k(k+1)} + \frac{x^3}{1.2.3.k(k+1)(k+2)} + \cdots$$

genügt, wie Herr Catalan bemerkt hat, der Gleichung

$$xy'' + ky' - y = 0.$$

Für $k = \frac{1}{2}$ findet man $y = ch2\sqrt{x}$ als Summe der Reihe. Man kann daraus das allgemeine Integral der Differentialgleichung in diesem Falle vermuthen, nämlich

$$y = Ae^{2\sqrt{x}} + Be^{-2\sqrt{x}}.$$

Indem man $xy'' + ky' - y = 0$ ableitet und $y' = u$ setzt, erhält man $xu'' + (k+1)u' - u$. Man schliesst daraus, dass sie sich in endlicher Form integriren lässt in dem Falle, wo $k = \frac{1}{2} \pm n$ ist, $n$ eine ganze Zahl. Sie ist in endlicher Form nur in diesem Fall integrirbar, denn durch die Substitution $x = t^q$, $zy - y'x^k = 0$ kann man sie zurückführen auf eine Riccati'sche Gleichung, die nur in diesem Fall integrabel ist.

Bei Untersuchung der Differentialgleichung stösst man auf die Gleichung mit endlichen Differenzen

$$\varphi(p, q) = (p - q + 2)\,\varphi(p, q - 1) + \varphi(p - 1, q),$$

die, wenn

$$\varphi(p, 1) = 1, \varphi(0, 1) = 0,$$

zum Integral hat

$$\varphi(p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{2^{q-1}\,\Gamma q\,\Gamma(p - q + 2)}.$$

Die Gleichung

$$x^{m-1} D^m y + a_1 x^{m-2} D^{m-1} y + \cdots + a_{m-1} Dy - y = 0$$

hat in gewissen Fällen particuläre Lösungen von der Form $e^{max^{\frac{1}{m}}}$. Wie Herr Brocard bemerkt hat, nimmt für $m = 2$, die Gleichung in den Fällen der Integrabilität die Form $D_t^m y - y = 0$ an, indem man $mx^{\frac{1}{m}} = t$ setzt. In dem Fall $m = 2$ ergiebt sich aus den Untersuchungen von Duhamel und Moutard, dass der von Herrn Hargreave (Phil. Trans. 1848) gefundene Fall der Integrabilität eingeschlossen ist in denen, die hier (N. C. M. II. p. 279) bezeichnet sind. Die Methode von Brisson lässt

noch zahlreiche Fälle von Integrabilität finden, wenn $m = 3$, $n = 4$. Die folgende Reihe:

$$z = 1 + \frac{cx}{1.b} + \frac{c^2x^2}{1.2.b(b+a)} + \frac{c^3x^3}{1.2.3.b(b+a)(b+2a+2c)} + \frac{c^4x^4}{1.2.3.4.b(b+a)(b+2a+2c)(b+3a+6c)} + \cdots$$

genügt einer linearen Gleichung dritter Ordnung der hier untersuchten Art und einer gewissen Differenzengleichung. Man kann daher in den oben bezeichneten Fällen der Integrabilität diese Reihe analog der von Legendre summiren, und andere allgemeinere. Mn. (O.)

---

F. Brioschi. Sopra talune equazioni differenziali ad integrale algebrico. Rend. Ist. Lomb. (2) IX. 786-794.

---

R. Rawson. On Boole's solution of a differential equation. Messenger (2) V. 138-139.

Betrifft die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{Py}{y+Q} = 0,$$

wo $P$ und $Q$ Functionen von $x$ sind. Glr. (O.)

---

P. G. Tait. On the linear differential equation of the second order. Proc. of Edinb. IX. 93-98.

Dieser Auszug aus einer grösseren Arbeit enthält eine Vergleichung zwischen den Resultaten verschiedener Methoden zur Reduction der allgemeinen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung auf nicht lineare Gleichungen erster Ordnung.

Glr. (O.)

---

G. G. Stokes. Note on certain formulae in the calculus of operations. Proc. of Edinb. IX. 101-102.

Die Formeln, welche in Prof. Tait's oben erwähnter Arbeit vorkommen, sind:

$$\left(\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}\right)^n = \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n \left(\frac{d}{dx}\right)^n,$$

$$\left(x\frac{d}{dx}x\right)^n = x^n\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^n.$$

Glr. (O.)

---

J. Thomae. Ein Fall, in welchem die Differentialgleichung
$x(1-x)(1-kx)y'''+(u+vx+wkx^2)y''+(\tau+w'kx)y'+w''ky=0$
integrirt werden kann. Schlömilch Z. XXI. 100-115.

Vorstehende Differentialgleichung ist in 2 Fällen integrirt worden,

1) in dem Falle, wo die zu $x=\infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung, nach der Fuchs'schen Bezeichnung, die Wurzeln $\beta, \beta', \beta'+1$ hat, worin $\beta$ und $\beta'$ willkürlich sind. Dieser Fall ist von den Herren Pochhammer und Hossenfelder (vergl. F. d. M. II. 265; III. 161) behandelt worden,

2) in dem Falle, in welchem $k=1$ und $u+v+w=0$ oder $k=\infty$, $v=qk$, $\tau=qk'$ ist. Beide Fälle lassen sich etwas verallgemeinern. In dieser Arbeit fügt nun der Verfasser noch einen Fall der Integrabilität hinzu, nämlich den, in welchem obige Gleichung mit der Differentialgleichung zweiter Ordnung, der die Gauss'sche Reihe genügt, sämmtliche Integrale gemein hat. Da alsdann zwei linear-unabhängige partikuläre Integrale der vorgelegten Gleichung gegeben sind, so lässt sich nach einem bekannten Satze auch das dritte Integral durch blosse Quadratur ermitteln. Bezeichnet man die Wurzeln der zu $x=0$, $x=1$, $x=1:k$, $x=\infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der Reihe nach mit

$$0,\ 1,\ \alpha;\ \ 0,\ 1,\ \gamma;\ \ 0,\ 1,\ \delta;\ \ \beta,\ \beta',\ \beta'',$$

so tritt der genannte Fall ein, wenn die beiden Bedingungen

$$\alpha+\beta''=2 \text{ und } \tau=(\alpha-2)\{(\gamma+\beta+\beta')k+1-\gamma\}$$

erfüllt werden. Es werden nun für jeden der drei in den Punkten

0, 1, $1:k$, $\infty$ befindlichen Zweige die Ausdrücke in Form von bestimmten Integralen gegeben, und zwar erscheinen überall je zwei schon der Gauss'schen Gleichung genügende Lösungen als einfache Integrale und die dritte als Doppelintegral.

Hr.

---

P. C. V. HANSEN. Om Muligheden af at integrere visse lineäre Differentialligninger af anden Orden ved algebraiske Funktioner. Zeuthen Tidsskr. (3) VI. 144-168.

Diese Abhandlung enthält eine Reihe von Untersuchungen über die Bedingungen, die erfüllt werden müssen, damit eine Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dz^2} = P(u)$, wo $P$ algebraisch ist, von einer algebraischen Function von $z$ befriedigt werden könne. Der Verfasser benutzt dabei insbesondere die von Liouville und Briot und Bouquet angegebenen Methoden, um die Eigenschaften des Integrales in der Nähe von singulären Punkten von $P$ zu ermitteln. Die Resultate sind zum Theil schon bekannt, einige wohl auch neu, z. B. vielleicht der folgende Satz. Ist $P$ für $z = a$ unendlich gross der ersten Ordnung, dann wird die Gleichung $\frac{dt}{dx} + t^2 = P$ durch eine Function befriedigt, welche für $z = a$ und benachbarte Werthe monodrom ist, und für $z = a$ ebenfalls unendlich gross der ersten Ordnung; ferner wird $t(z-a) = 1$ für $z = a$.

Gm.

---

J. COCKLE. Exercises in the integral calculus. Messenger (2) V. 150-152; VI. 116-119.

Fortsetzung der früheren Arbeit IV. 150-152, siehe F. d. M. VII. p. 196.

Glr. (O.)

---

J. COCKLE. Solution of a question (5037). Educ. Times XXVI. 59-61.

Aufsuchung von Relationen zwischen den Gleichungen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}\frac{dy}{dx} - \xi\eta y = 0, \qquad \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dx}\frac{du}{dx} - \eta u = 0.$$

O.

---

J. Cockle. On linear differential equations of the third order. Quart. J. XIV. 340-353.

Fortsetzung der ebenso betitelten Arbeiten aus dem 7ten und 8ten Bande (1866 und 1867). Sie hängt auch mit einer Arbeit von A. Steen Bd. VIII. (1867) zusammen und mit des Verfassers Arbeit: On reversible symbolical factors Bd. IX. (1868.) Die Theile der Arbeit sind: 1) Eindeutige particuläre Integrale. 2) Zwei Systeme von Criticoiden. 3) Combination der Systeme und 4) Schluss. Cly. (O.)

---

S. Levänen. Integration af några differentialeqvationer af andra ordningen. 4°. Helsingfors.

Die Differentialgleichungen, von denen hier die Rede ist, sind alle in der Form

$$P\frac{d^2y}{dx^2} + Q\frac{dy}{dx} + R\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = S$$

enthalten, wobei die Fälle $S = 0$ und $R = 0$ berücksichtigt werden. Um diese Gleichung zu integriren, werden verschiedene Methoden versucht. Einmal wird für $\frac{dy}{dx}$ eine Form angenommen, worin eine oder zwei nachher zu bestimmende unbekannte Functionen enthalten sind; zweitens sucht der Verfasser das erste Glied der Gleichung durch Einführung eines Factors in ein vollständiges Differential zu verwandeln, u. s. w. Zur Bestimmung der neuen Unbekannten erhält der Verfasser dann eine oder mehrere partielle Differentialgleichungen. Weil aber diese in der Regel complicirter sind als die gegebene Gleichung selbst, so ist ihre Lösung nur unter sehr speciellen Voraussetzungen über die Natur der Coefficienten ausführbar. Die in der Ab-

handlung wirklich integrirten Gleichungen der angegebenen Form sind deshalb überhaupt so einfach, dass ihre Integration, auch ohne die vom Verfasser benutzten Hülfsmittel, sich entweder unmittelbar oder durch eine unbedeutende Umformung der Gleichung ergiebt. Lf.

---

MORET-BLANC, J. GRAINDORGE. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 76-77, 167-168.

Integration der Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} + xf'(t) - y\varphi'(t) = 0, \quad \frac{dy}{dt} + x\varphi'(t) + yf'(t) = 0,$$

sowie geometrische Deutung der Lösungen. O.

---

P. G. TAIT. On a mechanism for integrating the general linear differential equation of the second order. Proc. of Edinb. IX. 118-120.

Beschreibung einer kinematischen Vorrichtung (die aus zwei gleichen Modificationen des Amsler'schen Planimeters besteht) zur Lösung der allgemeinen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Glr. (O.)

---

W. THOMSON. Mechanical integration of the linear differential equation of the second order with variable coefficients. Proc. of London XXIV. 269-271.

Es wird angenommen, dass die Differentialgleichung auf die Form

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{P}\frac{du}{dx}\right) = u$$

reducirt ist, und dann $u$ gegeben ist durch successive Näherungen

$$u = u_1, \quad u_2 = \int_0^x P\left(C - \int_0^x u_1\, dx\right) dx,$$

$$u_3 = \int_0^x P\left(C - \int_0^x u_2\, dx\right) dx \text{ etc.,}$$

wo $u_1$ irgend eine Function von $x$ ist, mit der man, zum Beispiel mit $u_1 = x$, beginnt. Dann werden $u_2$, $u_3$... successive Näherungen sein, die gegen eine der Lösungen der Differentialgleichung, welche mit für $x = 0$ verschwindet, convergirt. Der erste Gedanke war, diese successiven Werthe zu bestimmen mit Hülfe einer Kette von mechanischen Integrationen, von denen jede die folgende bewirkt. Der Verfasser fand aber zu seiner Ueberraschung, dass sich das Ziel durch Combination von nur zwei Integratoren (siehe p. 175) erreichen liess, durch Herstellung einer Verbindung, welche die Bewegung des Kugelcentrums des ersten Integrators zu einer ebensolchen macht, wie die der Cylinderoberfläche des zweiten Integrators, und wurde zu dem Schluss geführt, dass die allgemeine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variabeln Coefficienten streng, continuirlich und in einfacher Weise gelöst werden könne durch eine Maschine. Cly. (O.)

---

W. Thomson. Mechanical integration of the general linear differential equation of any order with variable coefficients. Proc. of London XXIV. 271-275.

Erweiterung der vorhergehenden Theorie auf Differentialgleichungen von beliebiger Ordnung. Cly. (O.)

---

G. Halphen. Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et sur les questions analogues dans l'espace. Liouville J. (3) II. 257-291, 371-411.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2 B.

---

R. Tucker. Solution of a question (4891). Educ. Times XXVI. 24.

Integration der Gleichungen:

$$u_x - v_x = u_{x-1} + v_{x-1},\quad u_x + v_x = 9u_{x-1} + 11v_{x-1} - 4(-1)^x.$$

O.

---

# Capitel 6.

## Partielle Differentialgleichungen.

A. PUJET. Sur les conditions d'intégrabilité immédiate d'une expression aux différentielles ordinaires.
C. R. LXXXII. 740-743.

Damit identisch:

$$F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = \frac{d\varphi(x, y, y', \dots y^{(n-1)})}{dx}$$

sei, ist zunächst nothwendig, dass $F$ die Form habe:

$$(1) \qquad F = P + Q \cdot y^{(n)},$$

wo $P$ und $Q$ frei sind von dem $n^{\text{ten}}$ Differentialquotienten $y^{(n)}$, und weiter muss identisch:

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} y' + \cdots \dfrac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} - P = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-1)}} - Q = 0 \end{cases}$$

sein. Indem man daher die Bedingungen aufstellt, unter denen die beiden linearen partiellen Differentialgleichungen (2) eine gemeinsame Lösung $\varphi$ besitzen, erhält man zugleich die Integrabilitätsbedingungen für den Ausdruck (1). Auf diese Weise greift Imchenetsky in § 26 seiner Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Grunert Arch. L. p. 417) das Problem der Ableitung der Integrabilitätsbedingungen an, und kommt dabei auf die bekannte Euler'sche Bedingung, nach welcher identisch

$$F'y - \frac{dF'y'}{dx} + \frac{d^2F'y''}{dx^2} - \cdots \pm \frac{d^nF'y^{(n)}}{dx^n} = 0$$

sein muss. Dagegen gelingt es ihm nicht zu zeigen, dass umgekehrt in dieser einen Forderung alle übrigen Integrabilitäts bedingungen enthalten sind. Diese Lücke auszufüllen, ist der Zweck der vorliegenden Note. Mr.

J. BERTRAND. Sur la première methode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. C. R. LXXXII. 641-647.

Ausgehend von dem Jacobi'schen Satze, welcher die Integration der $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

auf die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$(2) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + H = 0, \quad \left(p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)$$

zurückführt, leitet der Verfasser eine allgemeine Methode ab, die umgekehrt die Auffindung einer vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung (2) zurückführt auf die vollständige Integration der Differentialgleichungen (1), und die in gewisser Hinsicht die Mayer'sche und die Darboux'sche Regel (s. F. d. M. III. p. 171 und VII. p. 206) als specielle Fälle enthält. Herr Bertrand giebt hier ohne Weiteres zu, dass die Regel, die Jacobi zu demselben Zwecke aufgestellt hat, nicht in allen Fällen stichhaltig ist. Erinnert er sich wohl noch daran, dass er früher (Darboux Bull. V, p. 154) ganz unmotivirt gerade das Gegentheil behauptet hatte? Mr.

---

J. COLLET. Conditions d'intégrabilité des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre et renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes. Ann. de l'Éc. N. (2) V. 49-82.

Die vorliegende Abhandlung, deren Resultate bereits 1873 vom Verfasser in den C. R. angezeigt wurden (vergl. F. d. M. V. p. 210), beschäftigt sich mit der Aufgabe:

Gegeben sind $m$ von einander unabhängige Functionen $f_1, f_2, \dots f_m$ der $2n$ Variabeln $q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n$. Man soll alle Relationen finden, die, unabhängig von der besonderen Form der gegebenen Functionen, zwischen diesen und denjenigen Functionen bestehen, die aus ihnen durch fortgesetzte Anwen-

dung der Operation:

$$(f_i f_k) = \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \frac{\partial f_k}{\partial p_k} - \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial f_k}{\partial q_k} \right)$$

entspringen.

Diese Aufgabe bietet sich dar bei der Frage: Wann besitzen die $m$ partiellen Differentialgleichungen

$$f_1 = 0, \dots \ f_m = 0, \quad \left(p_k = \frac{\partial V}{\partial q_k}\right)$$

gemeinsame Lösungen? Damit nämlich solche gemeinsame Lösungen existiren, ist es nothwendig (wenn auch im Allgemeinen nicht, wie der Verfasser meint, zugleich hinreichend), dass die Gesammtzahl der unabhängigen Gleichungen

$$f_1 = 0, \dots \ f_m = 0, \ f_{m+1} = 0, \dots$$

die sich auf die angegebene Art aus den gegebenen Gleichungen bilden lassen, $\leqq n$ sei. Mr.

---

A. Mayer. Sur les systèmes absolument intégrables d'équations linéaires aux différentielles totales et sur l'intégration simultanée des équations linéaires aux différentielles partielles. Darboux Bull. XI. 87-96, 125-144.

Uebersetzung der in den Math. Ann. V. p. 448-470 erschienenen Abhandlung des Verfassers, über welche in den F. d. M. IV. p. 162 berichtet ist. Hr.

---

M. Hamburger. Zur Theorie der Integration eines Systems von $n$ linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit 2 unabhängigen und $n$ abhängigen Veränderlichen. Borchardt J. LXXXI. 243-280.

Es wird zunächst folgendes System von $n$ linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit $x$ und $y$ als unabhängigen und $z_1 \dots z_n$ als abhängigen Variablen behandelt:

$$(1) \qquad a_1^i p_1 + \cdots + a_n^i p_n + \alpha_1^i q_1 + \cdots + \alpha_n^i q_n = e_i$$
$$(i = 1, 2, \dots n),$$

wo

$$p_k = \frac{\partial z_k}{\partial x}, \quad q_k = \frac{\partial z_k}{\partial y}$$

und die Coefficienten $a$, $\alpha$, $e$ Functionen von $x\ y\ z_1 \dots z_n$ bedeuten. Die Integration dieses Systems wird im Allgemeinen auf die von $n$ Systemen je zweier totaler linearer Differentialgleichungen zurückgeführt. Sind dieselben integrabel, wozu die Erfüllung gewisser Bedingungsgleichungen erforderlich ist, und lauten die Integrale des $k^{ten}$ Systems

$$u_k = \text{const.}, \ v_k = \text{const.},$$

dann stellen

$$\varphi_1(u_1, v_1) = 0 \quad \varphi_2(u_2, v_2) = 0 \dots \varphi_n(u_n, v_n) = 0,$$

wo $\varphi_1 \dots \varphi_n$ willkürliche Functionen bezeichnen, die allgemeinen Lösungen des Systems (1) dar. Indem alsdann von der Form dieser Lösungen ausgegangen, und die partielle Differentialgleichung hergeleitet wird, der ein Integral $\varphi(uv) = 0$ Genüge leistet, ergiebt sich ein Weg für die Integration des folgenden nicht linearen Systems von $n$ partiellen Differentialgleichungen, von denen die $i^{te}$ die Form hat:

$$(2) \quad a_1^i p_1 + \dots + a_n^i p_n + \alpha_1^i q_1 + \dots + \alpha_n^i q_n + \sum_{r,s} \beta_{r,s}^i (p_r q_s - q_r p_s) = 0$$
$$(r, s = 1, 2 \dots n).$$

Die Integration wird auch hier auf die von Systemen totaler Differentialgleichungen zurückgeführt, in der Voraussetzung, dass dieselben die Integrabilitätsbedingungen erfüllen. Ausserdem müssen die Coefficienten noch gewisse andere Relationen befriedigen, deren Zahl $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ist, und welche fortfallen, wenn die sämmtlichen $\beta$ gleich Null werden, wodurch (1) in (2) übergeht.

Schliesslich folgt eine Anwendung dieses Integrationsverfahrens auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung, deren Form als eine Verallgemeinerung der Ampère'schen Gleichung von Herrn Natani herrührt, und für deren Integration er zugleich einen Weg angedeutet hat. Sie lautet:

$$A_1 q_1 + \dots + A_{n+1} q_{n+1} + \sum B_{r,s}(q_r q_{s+1} - q_s q_{r+1}) = A$$
$$(r, s = 1, 2 \dots n),$$

wo

$$q_1 = \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \quad q_2 = \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}, \dots \quad q_{n+1} = \frac{\partial^n z}{\partial y^n}$$

und $A_1 \dots A_{n+1}$, $AB_{r,s}$ Functionen von $xyz$ und allen Derivirten niederer als $n^{\text{ter}}$ Ordnung von $z$ nach $x$ und $y$ bezeichnen.

Hr.

---

V. Imchenetsky. Application des expressions complexes imaginaires à la formation de certains systèmes complètement intégrables d'équations canoniques et d'équations aux dérivées partielles. Darboux Bull. XI. 162-183.

Wenn die gegebene reelle Function $\varphi(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}')$ durch die complexen Substitutionen

$$\mathfrak{z} = x + iy, \quad \mathfrak{z}' = x' + iy'$$

die Form

$$\varphi(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}') = H + iG$$

erhält, so finden zwischen den Functionen $H$ und $G$ die folgenden vier Relationen statt:

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x} = \dfrac{\partial G}{\partial y}, & \dfrac{\partial H}{\partial y} = -\dfrac{\partial G}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial H}{\partial x'} = \dfrac{\partial G}{\partial y'}, & \dfrac{\partial H}{\partial y'} = -\dfrac{\partial G}{\partial x'}, \end{cases}$$

aus denen sich ergiebt:

$$(2) \quad (HG) \equiv \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial y} = 0.$$

In Folge dieser identischen Relation kann man vermöge einer Quadratur die linearen partiellen Differentialgleichungen

$$(H\psi) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + (H\psi) = 0$$

vollständig integriren und ebenso auch die gemeinsame Lösung der beiden partiellen Differentialgleichungen finden, die aus den Gleichungen

$$H = a, \quad G = b$$

z. B. durch die Substitutionen

$$y' = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad x' = \frac{\partial V}{\partial y}$$

hervorgehen. Aus den Relationen (1) folgt ferner, dass die beiden Gleichungen:

$$dx' = Hdx - Gdy,$$
$$dy' = Gdx + Hdy$$

ein unbeschränkt integrables System bilden, das man vollständig integriren kann, wenn man die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d\mathfrak{z}'}{d\mathfrak{z}} = \varphi(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}')$$

integrirt hat. U. s. w. Mr.

---

M. Falk. Bearbetning af några teorier angående differential eqvationer. 8°. Helsingfors.

Der Hauptgegenstand dieser Abhandlung ist eine Entwickelung der von Boole in den Phil. Transactions 1862 gegebenen Methode, ein System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zu integriren. Nachdem der Verfasser einige vorbereitende Sätze über Functional-Determinanten aufgestellt hat, behandelt er zuerst den Fall, wo nur eine Differentialgleichung gegeben ist, und entwickelt die bekannte hierauf bezügliche Theorie von Lagrange. Darnach stellt er sich die erweiterte Aufgabe, die allgemeinste Function zu finden, welche gleichzeitig einer beliebigen Anzahl linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung genügt, welche Anzahl jedoch geringer als die der Veränderlichen sein muss. Wenn man mit

$$\delta(z) = 0, \quad \text{und} \quad \delta_1(z) = 0,$$

wo $z$ die gesuchte Function ist, irgend zwei dieser Gleichungen bezeichnet, und durch Verbindung derselben eine neue Gleichung

$$(\delta\delta_1 - \delta_1\delta)(z) = 0$$

bildet, so wird bewiesen, dass auch diese nicht nur linear und von erster Ordnung wird, sondern dass sie von jeder Function $z$ befriedigt wird, welche den zwei ersten Gleichungen genügt. Wenn diese so gebildete neue Gleichung nicht identisch, d. h. für jede Form von $z$ erfüllt wird, kann man dieselbe zu dem gegebenen Systeme hinzufügen und dabei aus diesem die Ableitung von $z$ in Bezug auf eine der unabhängigen Veränder-

lichen eliminiren. Man erhält somit ein neues System von derselben Form wie das erste, aber mit einer Gleichung mehr und einer Ableitung weniger in jeder Gleichung. Mit diesem System verfährt man auf dieselbe Weise u. s. w., bis man zu einem System von Gleichungen gelangt, welches so beschaffen ist, dass alle durch das gesammte Verfahren daraus abgeleitete Gleichungen lauter Identitäten sind. Wenn man soweit gekommen ist, sucht man eine beliebige Gleichung des letzten Systems durch die Methode von Lagrange allgemein zu integriren. Wenn dies gelingt, und man die im Integrale enthaltenen Functionen als neue unabhängige Veränderliche, statt der ursprünglichen, einführt, wird das gegebene System in ein neues transformirt, worin die Zahl der Veränderlichen und die der Gleichungen jede um Eins vermindert sind. Mittelst einer zweiten Integration und darauf folgenden Vertauschung der Veränderlichen kann man mehrmals sowohl die Zahl der Gleichungen als die der Veränderlichen um Eins vermindern u. s. w., bis das ganze System zu einer einzigen Gleichung reducirt wird, welche dann einfach nach der Methode von Lagrange zu integriren ist. Das so erhaltene allgemeine Integral ist zu gleicher Zeit die allgemeinste Lösung des ursprünglichen Systems.

Wegen der einfachen Beziehung, welche zwischen den linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und den gewöhnlichen Differentialgleichungen stattfindet, ist die oben besprochene Methode auch anwendbar, wenn es sich um ein System von Gleichungen der letztgenannten Art handelt. Dies wird im letzten Theil der Abhandlung dargelegt, worin der Verfasser sich mit linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung beschäftigt, und zwar mit sogenannten indeterminirten Systemen, d. h. mit solchen, worin die Zahl der Veränderlichen wenigstens um zwei Einheiten grösser ist als die der Gleichungen. Insbesondere wird die Methode auf die Gleichung mit drei Veränderlichen

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 = 0,$$

und dann auf die mit vier

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0$$

angewendet und durch Ausführung einiger specieller Beispiele näher erläutert. Lf.

---

A. Cayley. A memoir on differential equations. Quart. J. XIV. 292-339.

Die Abhandlung bezieht sich auf folgende Gegenstände:

A. Eintheilige Reihe $(x, y, z, \dots)$. Das Differentialsystem

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \cdots$$

und damit verbunden die lineare partielle Differentialgleichung

$$X\frac{d\theta}{dx} + Y\frac{d\theta}{dy} + Z\frac{d\theta}{dz} + \cdots = 0,$$

ferner das Differential

$$Xdx + Ydy + Zdz + \cdots$$

B. Zweitheilige Reihe $(x, y, z, \dots; p, q, r, \dots)$. Das Hamilton'sche System

$$\frac{dx}{\frac{dH}{dp}} = \frac{dy}{\frac{dH}{dq}} = \frac{dz}{\frac{dH}{dr}} \cdots = \frac{dp}{-\frac{dH}{dx}} = \frac{dq}{-\frac{dH}{dy}} = \frac{dr}{-\frac{dH}{dz}} = \cdots$$

und damit verbunden die lineare partielle Differentialgleichung

$$\frac{dH}{dp}\frac{d\theta}{dx} - \frac{dH}{dx}\frac{d\theta}{dy} + \frac{dH}{dq}\frac{d\theta}{dy} - \frac{dH}{dy}\frac{d\theta}{dq} + \cdots = 0,$$

oder anders geschrieben $(H, \theta) = 0$, wo $H$ eine gegebene Function der Variablen bezeichnet. Ferner das Hamilton'sche System vermehrt durch eine Gleichheit $= dt$ und vermehrt durch diese und eine andere Gleichheit

$$= dN + \left(p\frac{dH}{dp} + q\frac{dH}{dq} + r\frac{dH}{dr} + \cdots\right).$$

C. Zweitheilige Reihe $(x, y, z, \dots; p, q, r \dots)$. Die partielle Differentialgleichung $H = \text{const.}$, wo $H$ eine gegebene Function der Variabeln, aber $p, q, r, \dots$ die Differentialcoefficienten einer Function $V$ der Variabeln $x, y, z \dots$ nach diesen sind.

Der grössere Theil der Theorie ist nicht neu, aber der Verfasser glaubt sie in einer vollständigeren und klareren Form als anderswo geschehen dargestellt zu haben, und hat einige neue

Resultate hinzugefügt. Von diesen mag die Ableitung des Hamilton'schen Systems aus dem allgemeinen Differentialsystem erwähnt werden. Indem man nämlich eine zweitheilige Reihe

$$(x, y, z, \ldots; \; p, q, r, \ldots)$$

betrachtet, und das allgemeine System von Differentialgleichungen in der Form

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{dp}{-X} = \frac{dq}{-Y} = \frac{dr}{-Z}$$

schreibt, wird das Differential

$$Xdx + Ydy + Zdz + Pdp + Qdq + Rdr$$

durch das Pfaff'sche Theorem ausdrückbar in der Form

$$\xi d\varrho + \eta d\sigma + \zeta d\tau.$$

Die Coefficienten $X, Y, Z, P, Q, R$ sind dann gegeben als Ausdruck von $\xi, \eta, \zeta$ und den Differentialcoefficienten von $\varrho, \sigma, \tau$, d. h.

$$X = \xi \frac{d\varrho}{dx} + \eta \frac{d\sigma}{dx} + \zeta \frac{d\tau}{dx} \cdots.$$

Schreibt man in dem speciellen Fall $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $H$ statt $\xi$, so wird das System das Hamilton'sche System. Der Verfasser beweist auch den Poisson-Jacobi'schen Satz (wonach 2 gegebene Integrale, ohne Integration, ein drittes Integral geben) der ein specieller Fall des Hamilton'schen Systems ist. Cly. (O.)

---

Laguerre. Sur la méthode de Monge pour l'intégrations des équations linéaires aux différences partielles du second ordre. Nouv. Ann. (2) XV. 49-58.

Ausgehend von der Bemerkung, dass man den Ausdruck:

$$W = Hr + 2Ks + Lt - M + N(rt - s^2)$$

immer auf die Form:

$$W = \begin{vmatrix} c - ar - bs, & d - as - bt \\ \gamma - \alpha r - \beta s, & \delta - \alpha s - \beta t \end{vmatrix}$$

bringen kann, stellt der Verfasser die beiden Systeme linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, von denen das eine oder andere durch jedes allgemeine intermediäre Integral der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung $W = 0$ er-

füllt werden muss, in einer Form auf, die für alle Werthe der Coefficienten $H$, $K$, $L$, $M$, $N$ anwendbar bleibt, und leitet daraus die Integration dieser Gleichung unter der Voraussetzung ab, dass zwei verschiedene allgemeine intermediäre Integrale existiren.

Mr.

---

H. W. Lloyd Tanner. On the solution of certain partial differential equations of the second order having more than two independent variables. Proc. of London VII. 43-60.

Der Verfasser stellt sich die Frage, wann eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} V_{ik} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} + V_0 = 0,$$

deren Coefficienten Functionen von $x_1, \dots x_n$, $z$ und den ersten partiellen Differentialquotienten von $z$ sind, eine Lösung zulässt, in die eine willkürliche Function von $n-1$ Argumenten $u_1, \dots u_{n-1}$ eingeht, die unabhängige Functionen von $x_1, \dots x_n$, $z$ sind. Unter der Voraussetzung, dass eine solche Lösung existire, zeigt er zunächst, aus welchen Gleichungen die Argumente $u$ zu bestimmen sind, wobei sich zugleich die Bedingungen ergeben, welche in Folge dieser Annahme zwischen den Coefficienten $V_{ik}$ bestehen müssen. Man erhält zwei, im Allgemeinen verschiedene Systeme linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für die $u$ und dem entsprechend auch zwei verschiedene Systeme von je $n-1$ Argumenten, die unter Umständen aber auch zusammenfallen können. Hat man nun die Functionen $u$ gefunden, so kann man sich dieselben oder einen Theil derselben, zusammen mit anderen unabhängigen Functionen von $x_1, \dots x_n$, $z$ als neue Variable eingeführt denken, und aus den Gleichungen, denen die Argumente genügen müssen, und der Art, in welcher diese Gleichungen aus den $V_{ik}$ entstehen, ohne Weiteres auf die Form der Gleichung schliessen, in welche hierdurch die gegebene Gleichung 1) transformirt wird. Dann handelt es sich noch darum, zu ermitteln, wie das von den zweiten partiellen Differential-

quotienten der unbekannten Function freie Glied der transformirten Gleichung beschaffen sein muss, wenn die Gleichung eine Lösung von der verlangten Form besitzen soll. Auch diese Aufgabe und mit ihr die Frage, wie die gesuchte Lösung zu finden sei, behandelt der Verfasser ausführlich, indem er jedoch hier die Untersuchuug auf die einfacheren Fälle beschränkt. Am Schlusse deutet er noch kurz die Resultate an, die er durch Ausdehnung seiner Methode auf partielle Differentialgleichungen $m^{ter}$ Ordnung gewonnen habe. Mr.

---

H. W. Lloyd Tanner. The solution of partial differential equations of the second order, with any number of variables, when there is a general first integral. Proc. L. M. S. VII. 75-90.

Im ersten Theile des Aufsatzes wird vermittelst Determinantenentwickelungen die allgemeine Form derjenigen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen $z$ und den unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ aufgestellt, die ein erstes Integral von der Form

$$(1) \qquad F(u_1, u_2, \dots u_n) = 0$$

zulassen, wo $F$ eine willkürliche Function und $u_1, u_2, \dots u_n$ unabhängige Functionen von $x_1, \dots x_n, z$ und den ersten partiellen Differentialquotienten von $z$ sind.

Im zweiten Theile handelt es sich dann umgekehrt darum, wenn eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von dieser Form gegeben ist, und man annimmt, dass dieselbe ein erstes Integral von der Form (1) besitze, die Argumente $u_1, \dots u_n$ dieses Integrales zu finden. Da jede Function dieser Grössen ein erstes Integral liefert, so könnte man, falls $u_1, \dots u_n$ bereits bekannt wären, sofort ein System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung aufstellen, denen jedes Argument $u$ genügen muss. Aus der Voraussetzung aber, dass die $u$ von einander unabhängig sein sollen, ergiebt sich, dass dieses System nur $n$ von einander unabhängige Gleichungen enthalten kann und hieraus, sowie aus der Form, die nach dem ersten Theile

die gegebene Gleichung zweiter Ordnung nothwendig haben muss, folgert der Verfasser, dass man diese linearen Gleichungen, auch ohne $u_1, \dots u_n$ selbst zu kennen, aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung bilden kann; und zwar erhält man im Allgemeinen zwei verschiedene Systeme von je $n$ linearen Gleichungen zur Bestimmung der $n$ Argumente, sodass, falls es überhaupt ein Integral von der Form (1) giebt, drei verschiedene Fälle eintreten können: zwei verschiedene erste Integrale, zwei zusammenfallende erste Integrale oder nur ein einziges erstes Integral.

Im dritten Theile endlich geht der Verfasser von der Voraussetzung aus, dass man ein erstes Integral von der Form (1) der gegebenen Gleichung zweiter Ordnung gefunden habe, und zeigt, wie man die übrig bleibende Integration, d. h. die Bestimmung der unbekannten Function $z$ selbst, in möglichst allgemeiner Weise zu bewerkstelligen hat, eine Aufgabe, die in jedem der drei Fälle eine verschiedene Behandlung erfordert.

Mr.

---

Sophus Lie. Theorie der Transformations-Gruppen I., II.
Arch. f. Math. og Nat. I. 19-58, 152-202.

Diese beiden Abhandlungen geben eine ausführliche Darstellung und Begründung eines Theils derjenigen Resultate, die der Verfasser zum ersten Male in Gött. Nachr., No. 22, 1874 (siehe F. d. M. VI. p. 93) veröffentlichte. Weitere Abhandlungen werden einerseits denselben Zweck verfolgen, andererseits diese neuen Theorien für die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen verwerthen. L.

---

Sophus Lie. Résumé einer neuen Integrationstheorie.
Arch. f. Math. og Nat. I. 335-365.

Es sei $f_1 = \alpha_1 \dots f_q = \alpha_q$ ein vorgelegtes Involutionssystem, und $f_{q+1} \dots f_r$ seien bekannte Lösungen von

$$(1) \qquad (f_1 f) = 0, \dots (f_q f) = 0.$$

Besteht nun eine Relation der Form

$$\Sigma p dx = F_1 \partial f_1 + \cdots + F_q \partial f_q + \cdots + F_r \partial f_r + dV$$

so sind $F_{q+1} \dots F_r$ die fehlenden Lösungen des Systems (1); während $V$ die Gleichungen

$$[f_1, z - V] = 0 \dots [f_q, z - V] = 0$$

befriedigt.

Ist andererseits $f_1 \dots f_s$ eine vorgelegte Gruppe mit $m$ unbekannten ausgezeichneten Functionen, die $\Omega_1 \dots \Omega_m$ heissen mögen, so ist es immer möglich, ein vollständiges System aufzustellen, welches dieselben Lösungen wie das System

$$(\Omega_1 f) = 0 \dots (\Omega_m f) = 0$$

besitzt.

Aus diesen beiden Sätzen lassen sich wichtige Integrations-Vereinfachungen herleiten. L.

---

F. Casorati. Sulle soluzioni singolari delle equazioni a derivate parziali. Rend. Ist. Lomb. (2) IX.

Es werden ausschliesslich algebraische partielle Differentialgleichungen zwischen drei Variablen betrachtet unter der Voraussetzung, dass ihr vollständiges Integral ebenfalls algebraisch ist. Sei die vorgelegte partielle Differentialgleichung

$$(1) \qquad \varphi(xyzpq) = 0, \qquad p = \frac{dz}{dx}, \qquad q = \frac{dz}{dy},$$

ihr vollständiges Integral

$$(2) \qquad f(xyz\xi\eta) = 0,$$

wo $\xi$ und $\eta$ zwei willkürliche Constante bezeichnen, und die durch Elimination derselben aus (2) und seinen Derivirten nach $x$ und $y$ hervorgehende Gleichung

$$(3) \qquad F(xyzpq) = 0,$$

so ist

$$F(xyzpq) = \vartheta . \varphi(xyzpq),$$

wo $\vartheta$ eine ganze rationale Function von $xyz$ ist, falls die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $p, q$ in (1) keinen gemeinsamen Factor haben. Jeder Factor von $\vartheta$ gleich Null gesetzt, giebt dann im Allgemeinen eine uneigentliche Lösung von (3)

(siehe p. 181). Ist $m$ der Grad von $f$ in Bezug auf $\xi, \eta$, so wird der Grad von $F$ in Bezug auf $p, q$ im Allgemeinen $m^2$ sein und sich um soviel erniedrigen, als gemeinsame Lösungen $\xi, \eta$ von

$$f=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}=0. \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}=0$$

für jedes Werthsystem $x, y, z$ vorhanden sind. Um die singulären Lösungen zu erhalten, ist $g$, die Discriminante von (2) in Beziehung auf $\xi, \eta$, und $s$ die von (1) in Beziehung auf $p, q$, aufzusuchen. Es werden nun die Fälle $m=1$ und 2 betrachtet. Im ersten Falle giebt es keine singuläre Lösung. Im Falle $m=2$ ist sie ebenfalls nicht vorhanden, wenn der Grad von $F$ 4 oder 3 ist; ist er aber 2 und hat $f$ die Form

$$f=c+l\eta+m\xi+n\xi\eta,$$

dann ist $g=lm-cn$, und es wird die durch ihre Analogie mit der oben citirten Fundamentalformel in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen bemerkenswerthe Relation bewiesen

$$4\vartheta^2 s = gk^2,$$

wo

$$k=\begin{vmatrix} c & l & m & n \\ \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial l}{\partial x} & \frac{\partial m}{\partial x} & \frac{\partial n}{\partial x} \\ \frac{\partial c}{\partial y} & \frac{\partial l}{\partial y} & \frac{\partial m}{\partial y} & \frac{\partial n}{\partial y} \\ \frac{\partial c}{\partial z} & \frac{\partial l}{\partial z} & \frac{\partial m}{\partial z} & \frac{\partial n}{\partial z} \end{vmatrix}$$

ist. Hr.

---

Allégret. Note sur l'intégration de l'équation:

$$(xdy-ydx)(a+bx+cy)-(a'+b'x+c'y)dy + (a''+b''x+c''y)dx=0.$$

C. R. LXXXIII. 1171.

Die Note führt diese Gleichung auf ein System von drei linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten zurück. Eine ganz ähnliche Integrationsmethode hat bereits

Boole (treatise on differential equations p. 305-306) sowohl für diese Jacobi'sche Differentialgleichung, wie auch für das allgemeinere System:

$$\frac{dx_1}{X_1 - x_1 X} = \frac{dx_2}{X_2 - x_2 X} = \dots = \frac{dx_n}{X_n - x_n X},$$

in welchem die $X$ lineare Functionen von $x_1, x_2, \dots x_n$ bezeichnen, angegeben. Mr.

---

P. Mansion. Integration of a partial differential equation. Messenger (2) VI. 84-85.

Methode zur Transformirung der Jacobi'schen Gleichung

$$A(-dy) + Bdx + C(xdy - ydx) = 0,$$

wo

$$A = a_1 x + a_2 y + a_3,\ B = b_1 x + b_2 y + b_3,\ C = c_1 x + c_2 y + c_3,$$

auf die Form:

$$\frac{du_1}{u_1}(k_2 - k_3) + \frac{du_2}{u_2}(k_3 - k_1) + \frac{du_3}{u_3}(k_1 - k_2) = 0.$$

Glr. (O.)

---

S. Earnshaw. Some remarks on the finite integration of linear partial differential equations with constant coefficients. Phil. Mag. 1876.

Die Arbeit ist ein Auszug aus einem Werke, welches nächstens publicirt werden wird. Csy. (O.)

---

C. Tychsen. En Bemärkning om en partiel Differentialligning. Zeuthen Tidsskr. (3) VI. 165-168.

Für das vollständige Integral der Differentialgleichung der Kugelfunctionen hat Professor Donkin (Phil. Transact. 1857) mittelst symbolischer Methoden eine elegante Form gefunden. Hier wird gezeigt, wie man durch verschiedene Substitutionen die gegebene Differentialgleichung auf eine lineare der zweiten

Ordnung zurückführen kann, welche sich durch Differentiation mit unbestimmtem Index integriren lässt, und sodann zu der eben erwähnten Form des Integrales leitet. Gm.

---

Adolph Steen. Nogle partielle Differentialligningers Integration. Zeuthen Tidsskr. (3) VI. 69-71.

Das Integral der von Monge und Liouville behandelten partiellen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 lz}{dx\,dy} \pm z = 0$$

lässt sich auf folgende Weise finden. Man setze $z = \frac{t}{u^2}$, wo $t$ und $u$ keine gemeinschaftlichen Factoren enthalten sollen. Dann wird $\frac{d^2 . lt}{dx\,dy} = 0$, folglich $t = X.Y$, und durch Einsetzen erhält man abermals $\frac{d^2 u}{dx\,dy} = 0$, also $u = \varphi(x) + \psi(y)$, und $X = \alpha\varphi'(x)$, $Y = \beta\psi'(y)$, mit der Bedingung $\pm\alpha\beta = 2$, sodass man schliesslich $z$ mittelst der beiden arbiträren Functionen $\varphi$ und $\psi$ erhält. Auf ähnliche Weise findet man die Integrale der Gleichungen

$$\frac{d^2 lZ}{dx\,dy} = \pm XYZ, \quad \frac{d^2 lz}{dx\,dy} = \pm z^n.$$

Gm.

---

H. W. L. Tanner. On first integrals of certain partial equations of the first order. Messenger (2) V. 133-137.

Der Verfasser untersucht, unter welchen Bedingungen die partielle Differentialgleichung

$$Ss + Tt + V = 0$$

ein erstes Integral von der Form

$$f(p, q, r, x, y) = \varphi(x),$$

wo $\varphi$ willkürlich und $f$ bestimmt ist, haben wird.

Glr. (O.)

---

H. W. L. Tanner. On the differential equation

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} + P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} + Z = 0.$$

Messenger (2) V. 153-157.

Die Arbeit ist eine Vervollständigung der Arbeit über die Lösung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung Messenger (2) V. 53-71, (siehe F. d. M. VII. p. 235). Das aufgestellte Problem war, die Bedingungen zu finden, unter welchen die Gleichung

$$R\frac{d^2z}{dx^2} + 2S\frac{d^2z}{dx\,dy} + T\frac{d^2z}{dy^2} + V = 0$$

eine vollständige Lösung hat in Ausdrücken von willkürlichen Functionen mit bestimmten Argumenten, d. h. Argumenten, welche von der Form der willkürlichen Functionen nicht abhängen. Diese Argumente sind, wie dort gefunden, bestimmt, wenn, und nur wenn, $R$, $S$, $T$ von gewissen Formen sind. Dann war, wenn die Argumente identisch waren, die Gleichung transformirbar in eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wenn aber die Argumente verschieden waren, reducirte sich die Gleichung auf die Form

$$s + Apq + Pp + Qq + Z = 0,$$

und diese Gleichung kann reducirt werden auf eine der beiden Formen

$$s + Pp + Qq + Zz + W = 0$$
$$s + Ae^z + W = 0,$$

wo $P$, $Q$, $Z$, $W$, $A$ Functionen von $x$, $y$ allein sind. Die Lösung dieser Gleichungen wird in der vorliegenden Arbeit betrachtet.

Glr. (O.)

---

H. W. L. Tanner. Examples of partial differential equations of the second order soluble by differentiation. Messenger (2) VI. 32-45.

Die Gleichungen, welche in dieser Arbeit untersucht werden, sind:

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} + xy\,\frac{dz}{dx} + kyz = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} - \frac{n(n+1)z}{(x+y)^2} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} + kz\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$x_1^2\,\frac{d^2z}{dx_1^2} + \frac{d^2z}{dx_1\,dx_2} + \frac{d^2z}{dx_1\,dx_3} - 2nx_1\,\frac{dz}{dx_1} + n(n+1)z = 0.$$

Auch wird die allgemeine Frage der Lösung partieller Differentialgleichungen durch Differentiation betrachtet.

Glr. (O.)

---

**E. J. Nanson.** Transformation of a differential equation. Messenger (2) VI. 69-71.

Transformation der Gleichung

$$\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2\right\}$$
$$-\left\{\frac{dF}{dx}\frac{du}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{du}{dy}+\frac{dF}{dz}\frac{du}{dz}\right\}^2 = 0$$

auf die Form

$$P\left(\frac{du}{dp}\right)^2 + 2Q\frac{du}{dp}\frac{du}{dq} + R\left(\frac{du}{dq}\right)^2 = 0.$$

Glr. (O.)

---

**H. W. L. Tanner.** On the partial differential equations of cylinders. Messenger (2) VI. 113.

**C. W. Merrifield.** Note on the foregoing paper. Messenger (2) VI. 114-115.

Herr Tanner beweist, dass das System von Differentialgleichungen

$$\frac{d^3z}{dx^3}:\frac{d^3z}{dx^2\,dy} = \frac{d^3z}{dx^2\,dy}:\frac{d^3z}{dx\,dy^2} = \frac{d^3z}{dx\,dy^2}:\frac{d^3z}{dx^2\,dy}$$
$$= \frac{d^2z}{dx^2}:\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d^2z}{dx\,dy}:\frac{dz^2}{dy^2}$$

nur Cylinder darstellen kann.

Herr Merrifield giebt einen andern Beweis und zeigt, wie man ein System von Gleichungen erhalten kann, welches nur Kegel darstellt. Glr. (O.)

---

## Capitel 7.

## Variationsrechnung.

L. Zmurko. Ein Beitrag zur Variationsrechnung, mit der besonderen Berücksichtigung der Kriterien der Maxima und Minima bestimmter Integrale. Krak. Denkschr. II. (Polnisch).

Der Verfasser erklärt ausführlich seine sich auf einen von ihm sogenannten Osculationsfactor gründende Methode, die er zuerst am 20. September 1875 in der 48. Versammlung deutscher Naturforscher in Graz mitgetheilt hat. Nach dem Erscheinen dieser Arbeit hat Herr Mertens seine Bemerkungen über dieselbe publiciren lassen (siehe unten), worauf Herr Zmurko der Krakauer Academie eine Antwort vorgelegt hat, die bis jetzt noch nicht gedruckt ist, in welcher aber (wie wir aus dem Protocoll der Sitzung am 20. April 1876 sehen können) Herr Zmurko manche seiner Beweise als irrthümlich anerkannt hat. Wir bemerken noch, dass Herr Zmurko in der angeführten Arbeit seine allgemeine Methode nicht durch Beispiele verificirt hat.

Bcki.

---

F. Mertens. Ueber die Osculationsfunction des Herrn Professor Zmurko. Krak. Denkschr. II. (Polnisch).

In dieser Arbeit hat der Verfasser zuerst bewiesen, dass Herr Zmurko seine Theorie auf falsche Hülfssätze gegründet hat (was er auch in Schlömilch's Z. XXI. 142, siehe das folgende Referat, zeigt), und jede dieser Behauptungen durch gut gewählte

Beispiele unterstützt. Sodann zeigt er, dass, wenn die Theorie von Herrn Zmurko, abgesehen von der Methode des Beweises, richtig wäre, einige Integrale, die kein Minimum haben, ein Minimum haben würden. Bcki.

---

F. Mertens. Ueber die Kriterien der Maxima und Minima der bestimmten Integrale. Schlömilch Z. XXI. 142-144.

L. Zmurko. Theorie der relativen Maxima und Minima bestimmter Integrale. Wien. Denkschr. XXXVI. 235-250.

In einer Sectionssitzung der 48ten Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte hatte Herr Zmurko einen Vortrag: „Ueber die Unzulänglichkeit der bis jetzt bekannt gewordenen Kriterien des Grössten und Kleinsten bestimmter Integrale und ihre Vervollständigung" gehalten und denselben seinem wesentlichen Inhalte nach im Tageblatte dieser Versammlung veröffentlicht. Nach der Note 1) gründete sich diese Vervollständigung hauptsächlich auf einen merkwürdigen Hülfssatz, der aber, wie Herr Mertens schlagend nachweist, falsch ist.

In dem Aufsatze 2), durch den jener Vortrag berichtigt und ergänzt werden soll, entwickelt nun Herr Zmurko seine Theorie der relativen Maxima und Minima bestimmter Integrale ohne jenen Hülfssatz. Er betrachtet den allerallgemeinsten Fall, wo es sich um das Maximum oder Minimum eines $r$-fachen Integrales handelt, das unter den Integralzeichen eine gegebene Function von den $r$ unabhängigen Variabeln, von beliebig vielen abhängigen Variabeln und beliebig hohen partiellen Differentialquotienten der letzteren enthält, und wo den unabhängigen Variabeln überdies noch beliebig gegebene partielle Differentialgleichungen als Bedingungsgleichungen vorgeschrieben sind. Aus seiner Darstellung erhält man den Eindruck, als ob Jacobi und alle, die nach Jacobi sich mit der zweiten Variation bestimmter Integrale beschäftigt haben, ihre Kräfte ganz unnöthig angestrengt hätten. Herr Zmurko macht das viel einfacher: Er

bringt die zweite Variation ohne alle und jede Integration von Differentialgleichungen auf eine zur Untersuchung ihres Zeichens geschickte Form und mit beneidenswerther Zuversicht erhebt er sich am Ende der Einleitung zu dem kühnen Ausspruche, dass seine Theorie der relativen Maxima und Minima bestimmter Integrale in ihrer Anlage und Durchführung sich durch musterhafte Einfachheit auszeichne und der Erforschung specieller Fälle jeden theoretisch möglichen Vorschub biete.

Man wird Herrn Zmurko sehr gern zugeben, dass bisher noch keine befriedigende allgemeine Theorie der zweiten Variation bei vielfachen Integralen aufgestellt worden ist; nur dürfte es auch wohl vergeblich sein, nach einer solchen Theorie zu suchen, so lange man über die Art, wie man den, aus dem Nullsetzen der ersten Variation entspringenden Bedingungen genügen kann, selbst noch im Allgemeinen so gar wenig weiss. Was dagegen die Kriterien des Maximums und Minimums der vielfachen Integrale betrifft, zu denen Herr Zmurko gelangt, so müssen wir offen bekennen, dass wir uns über ihre Ableitung und den Sinn, in welchem sie zu verstehen sind, nicht in allen Punkten zweifellos klar geworden sind. Es ist aber auch ziemlich gleichgültig, was Herr Zmurko mit seinen Kriterien eigentlich aussagen will, da, wie nach dem Vorhergehenden kaum anders zu erwarten, dieselben höchstens nur nothwendig, keineswegs aber zugleich auch hinreichend sein können.

Wenn nämlich das Raisonnement, welches der Verfasser für den allgemeinsten Fall der Variationsrechnung benutzt, zu den vollständigen Kriterien des Maximums und Minimums führen sollte, so müsste es denselben Zweck nothwendig doch auch erreichen in dem einfachsten Falle, wo das Integral:

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx$$

bei gegebenen Grenzen und Grenzwerthen zu einem Maximum zu machen ist. Hier ist die zweite Variation

$$\delta^2 V = \int_{x_0}^{x_1} \{f''yy\,\delta y\,\delta y + 2f''yy'\,\delta y\,\delta y' + f''y'y'\,\delta y\,\delta y'\}\, dx,$$

worin für $y$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$f'y = \frac{df'y'}{dx}$$

zu substituiren ist, nachdem man die beiden Integrationsconstanten dieser Lösung durch die gegebenen Grenzwerthe ausgedrückt hat.

Angewandt auf diesen einfachsten Fall besteht nun das Wesentliche der Methode von Herrn Zmurko darin, dass

$$(1) \qquad \delta y = \frac{\sin 2n\pi\omega}{2n\pi} \varphi$$

gesetzt wird, wo $\omega = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$, $\varphi$ eine willkürliche, innerhalb der Integrationsgrenzen stetige Function von $x$ und $n$ eine ganze Zahl ist. Aus dieser Annahme ergiebt sich durch Differentiation:

$$\delta y' = \frac{\sin 2n\pi\omega}{2n\pi} \varphi' + \frac{\cos 2n\pi\omega}{x_1 - x_0} \varphi.$$

Setzt man nun $n$ hinlänglich gross voraus, so kann man das erste Glied beliebig klein gegen das zweite machen, und daher hängt alsdann das Vorzeichen von $\delta^2 V$ nur ab von dem Vorzeichen des Integrales:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\, f''y'y' \left(\frac{\cos 2n\pi\omega}{x_1 - x_0} \varphi\right)^2.$$

Was aber lässt sich hieraus schliessen? Doch nur dies, dass die Function $f''y'y'$ zwischen den Integrationsgrenzen ihr Zeichen nicht ändern darf, wenn ein Maximum oder Minimum stattfinden soll. Keinesfalls aber folgt aus dieser Betrachtung, dass, wie Herr Zmurko an der entsprechenden Stelle seines Aufsatzes (p. 249) für den allgemeinsten Fall ohne Weiteres schliesst, der erhaltene Werth des Integrales ein Maximal- oder Minimalwerth sein wird, wenn $f''y'y'$ ein stabiles Vorzeichen besitzt. Steht es uns doch ganz frei, unter anderen in (1) auch $n = 1$ zu nehmen! Dann aber können die Glieder, welche $\frac{1}{2n\pi}$ als Factor besitzen, nicht mehr gegen die übrigen vernachlässigt werden. Ueberdies ist es ja seit Lagrange bekannt, dass die angegebene Bedingung zwar nothwendig aber nicht gleichzeitig auch hinreichend ist,

und Jacobi hat gezeigt, welche andere Bedingung noch hinzugefügt werden muss. Analoges muss daher nothwendig auch für die Maxima und Minima vielfacher Integrale gelten. Allerdings liesse sich die dunkle Schlussbemerkung (6), in welcher von der Gebietsausdehnung der Nachbarwerthe die Rede ist, innerhalb deren ein als Maximum oder Minimum erkannter Werth in dieser Eigenschaft vorherrscht, dahin deuten, dass Herr Zmurko selbst nicht an die Vollständigkeit seiner Kriterien glaubt. Dann aber musste er dies doch nothwendig irgend einmal ausdrücklich hervorheben, und durfte nicht durch Stellen, wie die folgende (p. 236). „Später begründete ich auf Grundlage der wiederholten Summirung eine neue, höchst einfache Transformation, welche die Doppeltransformation von Jacobi in vollem Maasse ersetzt“, den Leser noch mehr in die Irre führen. Mr.

---

L. Zmurko. Ueber Kriterien höherer Ordnung zur Unterscheidung der relativen Maxima und Minima bestimmter Integrale bei vorhandenem Systeme zweifelhafter Nachbarwerthe. Wien. Denkschr. XXXVII. 43-48.

Wenn die zweite Variation eines bestimmten Integrales zwar ihr Vorzeichen nicht zu ändern vermag, aber doch noch verschwinden kann, so lässt sich die Frage, ob wirklich ein Maximum oder Minimum vorliegt, erst durch die Untersuchung der höheren Variationen entscheiden. Soviel wir wissen, hat selbst im einfachsten Falle der Variationsrechnung, wo das Maximum oder Minimum des Integrales

$$S = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx$$

gesucht wird, noch Niemand sich an die Aufgabe gewagt, unter der Voraussetzung, dass die 3 ersten Variationen von $S$ verschwinden, die Bedingungen aufzusuchen, die zu einem unabänderlichen Vorzeichen der 4ten Variation $\delta^4 S$ erforderlich sind. (Diese Aufgabe ist inzwischen von Herrn Erdmann in Schlömilch Z. XXII. p. 324 behandelt worden.) Dies hat aber Herrn Zmurko nicht abgeschreckt, für die in seiner eben besprochenen, ersten

Abhandlung ausgeschlossenen Arten des Verschwindens der zweiten Variation — den dort gemachten Ausnahmen entspricht in der obigen einfachsten Aufgabe der Fall, wo für die Lösung des Problems $\delta S = 0$ der Ausdruck $f'' y' y' = 0$ wird — die entsprechende Aufgabe in dem allgemeinsten Probleme der Variationsrechnung allgemein für die $2k^{te}$ Variation in Angriff zu nehmen, wonach es kaum mehr zweifelhaft erscheinen kann, dass Herr Zmurko die in seiner ersten Arbeit aufgestellten Kriterien des Maximums und Minimums im Allgemeinen, d. h. abgesehen von den ausdrücklich ausgeschlossenen Fällen, trotz Lagrange und Jacobi wirklich für hinreichend hält. **Mr.**

---

J. Horner. On Jacobi's reduction of the second variation. Quart. J. XIV. 218-226.

Dieser kurze Aufsatz leitet auf neue Art mehrere der bekannten Theoreme ab, die bei der Jacobi'schen Reduction der zweiten Variation eines einfachen bestimmten Integrales (Crelle J. XVII.) eine Rolle spielen. Es sind namentlich die Bertrand'schen Sätze (J. de l'Éc. Pol. Cah. 28), die hier von Neuem bewiesen werden. Auf die Reduction selbst geht der Aufsatz nicht näher ein. **Mr.**

---

G. Erdmann. Ueber unstetige Lösungen in der Variationsrechnung. Borchardt J. LXXXII. 21-30.

Der gewöhnlichen Methode, durch welche man in der Variationsrechnung die Aufgabe löst, das Integral

$$V = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \varphi(x, y, y')\, dx$$

zu einem Maximum oder Mimimum zu machen, liegt die stillschweigende Voraussetzung zu Grunde, dass nicht nur die gesuchte Function $y$ selbst, sondern auch ihr Differentialquotient $y'$ zwischen den Integrationsgrenzen stetig sei. Unter Umständen wird aber eine solche Lösung unmöglich sein, und dann bietet

sich die Frage dar, ob man der Aufgabe nicht genügen kann durch eine Curve, die Ecken besitzt, oder die aus verschiedenen Zweigen zusammengesetzt ist.

Mit dieser Frage beschäftigt sich der Verfasser und beweist in Betreff derselben den folgenden Satz:

Jeder Zweig der gesuchten Curve muss der Differentialgleichung:

$$\varphi'y - \frac{d\varphi'y'}{dx} = 0$$

genügen, und es müssen sich überdies längs der ganzen Curve die Ausdrücke:

$$\varphi'y' \text{ und } \varphi - y'\varphi'y'$$

stetig ändern.

Dieser Satz wird dann an verschiedenen speciellen Beispielen erläutert, und schliesslich auch auf die allgemeinere Aufgabe angewandt, wo der gesuchten Curve noch die Bedingung vorgeschrieben ist, ein gegebenes abgegrenztes Gebiet zu vermeiden. Es zeigt sich bei diesen Untersuchungen, dass die Resultate, zu denen Todhunter in seinen „Researches in the calculus of variations" (London 1871) für besondere Aufgaben der angegebenen Art gelangt, nicht durchgängig richtig sind. Mr.

---

F. Minding. Ueber die Curven kürzesten Umrings auf Umdrehungsflächen. Bull. de St. Pét. XXI.

Durch Einführung der isothermischen Coordinaten $(p, q)$, in welchen, wie bekannt, das Linearelement $ds$ sich folgendermassen schreiben lässt

$$ds^2 = E(dp^2 + dq^2),$$

erhält der Verfasser die Differentialgleichung der gesuchten Curven in besonders einfacher Form. Diese Gleichung wird integrirt, die Gestalt der Curven näher discutirt, und endlich folgende Aufgabe gelöst: „Ein in sich geschlossener Faden von gegebener Länge soll auf die Umdrehungsfläche so gelegt werden, dass er durch zwei gegebene Punkte geht und den grösstmöglichen Flächenraum umfasst." P.

---

# Siebenter Abschnitt.

## Functionentheorie.

### Capitel 1.

### Allgemeines.

K. W. UNVERZAGT. Theorie der goniometrischen und der longimetrischen Quaternionen, zugleich als Einführung in die Rechnung mit Punkten und Vectoren. Wiesbaden. Kreidel.

Das vorliegende Werk enthält, wenn auch nicht eine vollständige zusammenhängende Theorie, so doch eingehende Untersuchungen über die Rechnung mit Punkten und Vectoren und erweitert den von Möbius geschaffenen barycentrischen Calcul und die Lehre von den Hamilton'schen Quaternionen einerseits durch Zufügung der Producte und Quotienten von Punkten, andererseits durch die Lehre von den longimetrischen und den Biquaternionen. Der erste, gleichsam einleitende Theil, behandelt die Lehre von den allgemeinen Winkelfunctionen und von den longimetrischen Functionen. Diese „allgemeinen goniometrischen Functionen" sind die 6 Quotienten je zweier Seiten eines schiefwinkligen Dreiecks mit dem Winkel $\beta$ und dem ihm gegenüberliegenden Aussenwinkel $\lambda$, der hier „Basiswinkel" heisst,

$$^{\lambda}\mathrm{Sin}\,\beta = \frac{b}{c}, \qquad ^{\lambda}\mathrm{Cos}\,\beta = \frac{a}{c} \text{ etc.},$$

gehen also für $\lambda = \frac{\pi}{2}$ in die gemeinen goniometrischen Functionen $\sin\beta$, $\cos\beta$ etc. über. Hier wird die Theorie ganz analog der der gemeinen goniometrischen Functionen entwickelt. Auf

die Reductionsformeln für beliebig grosse $\beta$, die Additions-, Subtractions- und Multiplicationsformeln folgen die Grundgleichungen der ebenen Trigonometrie und die Differentiale der Winkelfunctionen. Die Fruchtbarkeit des Studiums dieser allgemeinen Winkelfunctionen beruht augenscheinlich auf der Willkür in der Wahl des Winkels $\lambda$. Verbindet man diese allgemeinen goniometrischen Functionen zu complexen Ausdrücken, und sucht den Werth des Factors $j$, welcher für ein beliebiges $\lambda$ die Gleichung

$$(\operatorname{Cos}\alpha + j \operatorname{Sin}\alpha)(\operatorname{Cos}\beta + j \operatorname{Sin}\beta) = \operatorname{Cos}(\alpha+\beta) + j \operatorname{Sin}(\alpha+\beta)$$

erfüllt, so gelangt man zu dem Begriff des sogenannten „Drehfactors“ $j_\lambda = (-1)^{\frac{\lambda}{\pi}}$, der für $\lambda = \frac{\pi}{2}$ in die bekannte imaginäre Einheit $i$ übergeht. Am Schluss des ersten Capitels werden die „longimetrischen Functionen“ als besonderer Fall der allgemeinen Winkelfunctionen für $\lambda = 0$ oder $\lambda = \pi$ definirt. Ihre Theorie wird darauf ganz unabhängig von den Lehren des Vorigen entwickelt, indem der Verfasser von folgender Definition ausgeht: „Theilt man eine Strecke $ab$ innerlich und äusserlich durch einen Punkt $c$, so dass unter Berücksichtigung des Vorzeichens stets die Gleichung

$$ac + cb = ab$$

gilt, so heissen die aus den Strecken $ac$, $cb$, $ab$ gebildeten 6 Quotienten longimetrische Functionen. Nachdem ihre Theorie entwickelt, und ihre Anwendbarkeit in der analytischen Geometrie und der Kinematik an mehreren Beispielen dargethan ist, werden complexe longimetrische Ausdrücke mit Hülfe des „Verschiebungsfactors“ $j$, der der Gleichung $j^2 = 2j - 1$ genügt, untersucht. Das nächste Capitel enthält die Erweiterung zu „Planfunctionen.“ Verbindet man irgend einen Punkt $m$ der Ebene mit den Ecken eines Fundamentaldreiecks $abc$ und rechnet den Inhalt der Theildreiecke $mbc$, $mca$, $mab$ positiv oder negativ, je nachdem dieses Dreieck mit dem Fundamentaldreieck auf derselben gemeinsamen Basis liegt oder nicht, so sind die Quotienten dieser drei Theildreiecke dividirt durch das Fundamentaldreieck 3 Planfunctionen, die mit

$$\operatorname{Cos}_1 m,\ \operatorname{Cos}_2 m,\ \operatorname{Cos}_3 m$$

bezeichnet werden; aus diesen werden die entsprechenden Sinus gewonnen durch die Relationen

$$1 - \mathrm{Cos}_\alpha \mathfrak{m} = \mathrm{Sin}_\alpha \mathfrak{m} \quad (\alpha = 1, 2, 3);$$

und so die übrigen Planfunctionen. Die Theorie der longimetrischen „complexen" Zahlen wird auf folgende Weise erweitert. Sind $j$ und $k$ den Bedingungen

$$j^2 = 2j - 1, \quad k^2 = 2k - 1, \quad jk = j + k - 1$$

unterworfen, so hat der Ausdruck

$$\mathrm{Cos}_1 \mathfrak{m} + j\, \mathrm{Cos}_2 \mathfrak{m} + k\, \mathrm{Cos}_3 \mathfrak{m}$$

die Bedeutung eines Stellenzeigers für den Punkt $\mathfrak{m}$ in der Ebene des Fundamentaldreiecks. Das letzte Capital des ersten Theiles behandelt die „stereometrischen" Functionen, welche, ähnlich wie die „planimetrischen" Functionen in der Ebene, so im Raume als Quotienten zweier Tetraeder definirt werden. Dadurch wird man auf eine Erweiterung der longimetrisch complexen Zahlen zu viergliedrigen Ausdrücken mit 4 Einheiten (der reellen 1 und 3 imaginären) geführt. Diese viergliedrigen Zahlen von der Form

$$A + j_1 B + j_2 C + j_3 D,$$

welche auch eine Strecke im Raume, die einer gegebenen Richtung parallel läuft, nach Grösse und Stelle darstellen, heissen „longimetrische Quaternionen", zum Unterschied von den Hamilton'schen Quaternionen,

$$A + i_1 B + i_2 C + i_3 D \quad (i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1).$$

Letztere nennt der Verfasser „goniometrische Quaternionen". Durch die Aufgabe, im Raume Strecken von verschiedener Richtung neben einander darzustellen, wenn zugleich Grösse und Richtung der Strecken und die Stelle des Anfangs derselben erkennbar sein sollen, — wozu die longimetrischen Quaternionen nicht mehr ausreichen, — wird man auf die „Biquaternionen" geführt, die allgemein die Form

$$(\mathfrak{A}_0 + i_1 \mathfrak{A}_1 + i_2 \mathfrak{A}_2 + i_3 \mathfrak{A}_3)(\mathfrak{B}_0 + j_1 \mathfrak{B}_1 + j_2 \mathfrak{B}_2 + j_3 \mathfrak{B}_3)$$

haben, also ein Product aus einer goniometrischen und einer longimetrischen Quaternione sind.

In dem zweiten Theil des Werkes wird nun die Theorie der Rechnung mit Vectoren entwickelt, und zwar behandelt der erste Abschnitt dieses Theiles die goniometrischen oder Hamilton-

schen Quaternionen, der zweite die longimetrischen Quaternionen. Es werden zunächst die Principien des barycentrischen Calculs von Möbius entwickelt. Auf die Summen und Differenzen von Punkten und die Addition und Subtraction der Vectoren folgt die Definition der goniometrischen Quaternionen, ihre Zerlegung in ein Product, in eine Summe und in eine viergliedrige Normalform, ihre Operationsgesetze und die Grundrechnungen mit Vectoren. An mehrfachen Aufgaben aus der Geometrie und Mechanik wird die Verwendbarkeit der Quaternionen gezeigt. Hieran schliesst der Verfasser die Differentiation der Quaternionen und die Lösung von Quaternionengleichungen. Die meisten dieser Resultate sind den Werken von Hamilton, Tait und Kelland entlehnt. Der letzte Abschnitt, die Theorie der longimetrischen Quaternionen, beginnt mit Producten und Quotienten von Punkten, woran sich die Rechnung mit Quotientvectoren und das Logarithmiren der Quotientvectoren schliesst. Dann folgen die Summen, die Differenzen und die Quotienten paralleler Differenzvectoren, die Grundrechnungen mit Longiquaternionen, die Vectoren derselben; ferner die Zerlegung in Summen, die Producte paralleler Differenzvectoren, Gleichungen und Differentiale der Longiquaternionen, die Rechnung mit parallelen Quotientvectoren und schliesslich die Biquaternionen. Den Schluss des Werkes bildet eine kurze Uebersicht über die geschichtliche Entwickelung der Quaternionen. M.

---

J. Versluys. Theorie der quaternionen. Nieuw Arch. II. 135-150. Siehe F. d. M. VII. p. 258. G.

---

P. Romer. Principes fondamentaux de la méthode des quaternions. Kief. (Russisch).

Ein Bericht darüber findet sich Darboux Bull. XI. 113-114. O.

---

F. J. Studnička. Ueber die Quaternionentheorie. Casopis V. (Böhmisch).

Eine gedrängte Darstellung der Grundoperationen mit Quaternionen, bis zur Potenzirung. W.

---

F. J. Studnička. Ueber die reducirte Form der Quaternionen. Prag. Ber. 1875. 183-186.

Die Quaternion

$$\alpha = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3,$$

wo

$$i_1 i_2 = i_3 \text{ und } i_k^2 = -1 \quad (k = 1, 2, 3),$$

wird auf die reducirte Form der gewöhnlichen complexen Zahlen gebracht, durch die Substitution

$$R\alpha + J\alpha = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

wo $R\alpha$ der reelle, $J\alpha$ der ideelle Theil der Quaternion ist, und $i$ eine neue ideelle Einheit. Für dieses $i$ erhält man den Ausdruck

$$i = \frac{a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

In einer „Anmerkung" wird eine Anwendung der Quaternionen auf die in der analytischen Geometrie des Raumes auftretende Transformationsformel

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

gemacht (siehe Hesse, Anal. Geom. d. R. II. Aufl., p. 98; Baltzer, Determinanten, III. Aufl. p. 47). M.

---

A. Benthem. Theorie der functiën van veranderlyke complexe getallen. Nieuw Arch. II. 1-40, 113-135.

Siehe F. d. M. VII. p. 241. G.

---

D. Bierens de Haan. Lets over de „theorie des fonctions de variables imaginaires par M. Maximilien Marie." Nieuw Arch. II. 150-160.

Uebersicht über das im Titel citirte Werk. Einige Theile der Theorie werden weiter ausgeführt und beleuchtet. Der zweite Theil wird in einem folgenden Jahrgang erscheinen.

G.

---

L. Barbera. Teorica del calcolo delle funzioni. Bologna, Generelli.

---

J. Varisco. Nuovi principii sulla teorica generale delle funzioni. Padova, Socchetto.

---

B. Riemann. Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber. Leipzig, Teubner.

Bereits im Frühjahr 1872 hatten, wie wir aus der Vorrede des vorliegenden Werkes erfahren, Clebsch und Dedekind den Plan gefasst, eine Gesammtausgabe der Werke Riemann's zu veranstalten, da die meisten dieser Abhandlungen im Buchhandel gar nicht oder nur schwer zu erhalten waren, und da in dem handschriftlichen Nachlasse Riemann's manche schöne Untersuchung verborgen war, die der Wissenschaft nicht länger vorenthalten werden durfte. Aus diesem Nachlasse sind seitdem bereits mehrere Abhandlungen von Dedekind herausgegeben worden. Nach dem unerwarteten Tode Clebsch's übernahm Herr H. Weber die Herausgabe der Werke Riemann's, und brachte mit Dedekind's Unterstützung das für die Wissenschaft so bedeutungsvolle Unternehmen zum Abschluss.

Die erste Abtheilung der Werke bilden diejenigen Abhandlungen, welche von Riemann selbst veröffentlicht sind. Diese Abhandlungen sind in kleinen Ungenauigkeiten corrigirt, und hin und wieder durch einen im Nachlass gefundenen Zusatz bereichert, im übrigen aber in unveränderter Form zum Abdruck gekommen. Es sind dies:

I. Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse; Inauguraldissertation, Göttingen 1851. Die Anmerkungen zu dieser Dissertation enthalten 1) einen Zusatz zu Art. 1 über den Begriff der Stetigkeit, 2) ein Beispiel zur Erläuterung des Schlusspassus in Art. 9, und 3) Ergänzungen und Erläuterungen zu Art. 17.

II. Ueber die Gesetze der Vertheilung von Spannungselectricität in ponderablen Körpern, wenn diese nicht als vollkommene Leiter oder Nichtleiter, sondern als dem Enthalten von Spannungselectricität mit endlicher Kraft widerstrebend betrachtet werden; Vortrag auf der Naturf. Vers. zu Göttingen, 1854.

III. Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe; Poggendorff Ann. XCV., 1855.

IV. Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen; Gött. Abh. VII. 1857.

V. Selbstanzeige der vorstehenden Abhandlung; Gött. Nachr. 1857, No. 1.

VI. Theorie der Abel'schen Functionen nebst den drei einleitenden Abhandlungen; Borchardt J. LIV. 101-155.

VII. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse; Berl. Monatsber. Nov. 1859.

VIII. Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite; Gött. Abh. VIII. 1860.

IX. Selbstanzeige der vorstehenden Abhandlung; Gött. Nachr. 1859, No. 19.

X. Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides; Gött. Abh. IX. 1861.

XI. Ueber das Verschwinden der Theta-Functionen; Borchardt J. LXV. 1865.

Die zweite Abtheilung enthält diejenigen Abhandlungen, die nach Riemann's Tode bereits herausgegeben sind, nämlich:

XII. Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe; Habilitationsschrift, 1854, Gött. Abh. XIII. Die Anmerkungen zu dieser Schrift enthalten 1) eine Erläuterung zu Art. 9, II., 2) einen Zusatz zu Art. 9, III. und 3) einen Hinweis auf einen, die im Schlussartikel befindlichen Beispiele betreffenden Aufsatz von Genocchi. (S. F. d. M. I. 131).

XIII. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen; Habilitationsschrift, 1854, Gött. Abh. XIII. (S. F. d. M. I. 22).

XIV. Ein Beitrag zur Elektrodynamik; 1858, Poggendorff Ann. CXXXI.

XV. Beweis des Satzes, dass eine einwerthige mehr als

$2n$-fach periodische Function von $n$ Veränderlichen unmöglich ist; Schreiben vom 26. Oct. 1859, Borchardt J. LXXI. 197-200. (S. F. d. M. II. 208).

XVI. Estratto di una lettere scritta in lingua Italiana il di 21. Gennaio 1864 al Sig. Professore Enrico Betti; Brioschi Ann. (1) VII. . Der Inhalt betrifft die Anziehung eines homogenen geraden Cylinders mit elliptischer Basis.

XVII. Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung; Gött. Abh. XIII. Das dieser Abhandlung zu Grunde liegende Manuscript Riemann's, aus den Jahren 1860 und 1861, enthält in gedrängter Kürze nur die Formeln und keinen Text. Es wurde im April 1866 Herrn Hattendorff von Riemann selbst zur Bearbeitung übergeben. Nach sorgfältiger Ueberarbeitung seitens des Herausgebers hat diese Abhandlung wesentliche Aenderungen erfahren. (S. F. d. M. I. 218).

XVIII. Mechanik des Ohres; Henle u. Pfeuffer's Z. f. rat. Medicin, (3) XXIX.

In der dritten Abtheilung sind aus Riemann's Nachlass folgende Abhandlungen veröffentlicht:

XIX. Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation, 1847. Diese Erstlingsarbeit Riemann's, die von Anschauungen ausgeht, die der Verfasser später ohne Zweifel selbst als unhaltbar hat fallen lassen, war nicht für den Druck bestimmt, enthält aber immerhin bemerkenswerthe Resultate, und ist für den Entwickelungsgang Riemann's characteristisch.

XX. Neue Theorie des Rückstandes in electrischen Bindungsapparaten (1854). Diese Abhandlung kann als eine weitere Ausführung und Anwendung der Grundgedanken angesehen werden, die Riemann bereits in seinem Vortrage auf der Naturforscherversammlung (s. No. II.) ausgesprochen hatte. Riemann's eigenthümliche Auffassung der electrischen Erscheinungen steht im innigsten Zusammenhange mit seinen naturphilosophischen Principien. Ausser den gewöhnlichen electrischen Anziehungs- und Abstossungskräften wird eine neue „antelectrische" Kraft angenommen als Ursache für das „Widerstreben des Ponderabile gegen das Enthalten von Spannungselectricität oder den electri-

schen Zustand." Für die Bestimmung der electrischen Spannung und Dichtigkeit gewinnt Riemann unter diesen Annahmen zwei lineare partielle Differentialgleichungen 2ter Ordnung. Die Aufgabe wird dann zunächst für den einfachsten Fall gelöst, wo kein Ab- und Zufluss durch die Oberflächen stattfindet. Den Schluss bildet eine Vergleichung der Rechnung mit den Beobachtungen und die Betrachtung des Verhältnisses dieses Problems zur Electrometrie und zur Theorie verwandter Erscheinungen.

XXI. Zwei allgemeine Lehrsätze über lineäre Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten, 20. Februar 1857. Diese Arbeit kann als eine Verallgemeinerung der Theorie der hypergeometrischen Reihe betrachtet werden; denn dieselbe Methode, nach der Riemann die Gauss'sche Reihe (s. Abh. IV.) behandelt hat, wird hier im Wesentlichen auf Functionen, die einer lineären Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten $n^{ter}$ Ordnung genügen, angewendet. Zunächst definirt der Verfasser ein System von $n$ Functionen $y_1, y_2 \dots y_n$, welche für alle complexen Werthe der Veränderlichen $x$, ausser für $a, b, c \dots g$, einändrig und endlich sind, und durch einen Umlauf des $x$ um einen dieser Verzweigungswerthe in lineare Functionen der früheren Werthe mit constanten Coefficienten übergehen. Als zu einer und derselben Klasse gehörig werden sämmtliche Systeme angesehen, für welche die Verzweigungswerthe und die um sie stattfindenden Substitutionen gegebene, einer Bedingungsgleichung genügende Werthe haben. Zwischen je $n+1$ Systemen, die derselben Klasse angehören, besteht eine lineare homogene Gleichung, deren Coefficienten ganze Functionen von $x$ sind. Daraus folgt, dass die Functionen $y$ eines Systems einer Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung genügen, deren Coefficienten ganze Functionen von $x$ sind, und dass jedes derselben Klasse angehörige System sich in diese Functionen und ihre $n-1$ ersten Differentialquotienten linear mit rationalen Coefficienten ausdrücken lässt. Im Folgenden wird dann die Form der Differentialgleichung näher bestimmt.

XXII. Commentatio mathematica, qua respondere tentatur questioni ab Ill^ma Academia Parisiensi propositae: „Trouver quel

doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfini pour qu'un système de courbes isothermes, à un instant donné, restent isothermes après un temps quelconque, de telle sorte que la température d'un point puisse s'exprimer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes" (1861). Das Originalmanuscript dieser Arbeit über isotherme Curven wurde dem Herausgeber durch die Güte des beständigen Secretärs der Pariser Academie, Herrn Dumas, zur Verfügung gestellt. Die Arbeit erhielt den Preis nicht, weil die Wege, auf denen die Resultate gefunden waren, nicht vollständig angegeben sind; zu der beabsichtigten vollständigen Bearbeitung gelangte Riemann seines Gesundheitszustandes wegen leider nicht. Was dieser Arbeit ein besonderes Interesse verleiht, das sind die Untersuchungen Riemann's über die allgemeinen Eigenschaften der mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, die hier in ihren Grundzügen angedeutet (vgl. Abh. XIII.) und auf die Lösung des Problems angewendet werden, einen homogenen Differentialausdruck 2ter Ordnung mit variablen Coefficienten $\sum_{\iota,\iota'} b^{\iota,\iota'}\, ds_\iota\, ds'_{\iota'}$, als Summe von Quadraten $\sum_{\iota} dx_\iota^2$ darzustellen. Zu diesem Problem gelangt nämlich Riemann, indem er zunächst für ein nicht homogenes Medium die Temperatur als Function der Zeit und zweier Variabeln so darstellt, dass ein System isothermer Curven isotherm bleibt, was zu einer linearen partiellen Differentialgleichung mit veränderlichen Coefficienten führt, die durch Einführung neuer Variabeln in die Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = c\,\frac{\partial u}{\partial t}$$

transformirt werden muss. Die Anmerkungen zu dieser Abhandlung sollen theils den Zusammenhang erläutern, in dem die vorstehenden Untersuchungen mit der Riemann'schen Theorie des Krümmungsmaasses einer allgemeinen Mannigfaltigkeit stehen; theils enthalten sie die wirkliche Ausführung der sehr verwickelten Rechnungen, soweit dieselbe aus noch vorhandenen Bruchstücken wieder herzustellen möglich war.

XXIII. Sullo svolgimento del quotiente di due serie iper-

geometriche in frazione continua infinita (1863). Das nur zum Theil ausgeführte Manuscript ist von Herrn Schwarz ergänzt worden. Es handelt sich um die Kriterien der Convergenz der von Gauss (Comm. Götting. 1812) gegebenen Entwickelung des Quotienten der beiden hypergeometrischen Reihen

$$P^{\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\ \beta\ \gamma \\ \alpha'\beta'\gamma'\end{pmatrix} x = P \quad \text{und} \quad P^{\alpha}\begin{pmatrix}\alpha & \beta+1 & \gamma \\ \alpha'-1 & \beta' & \gamma'\end{pmatrix} x = Q$$

in einen unendlichen Kettenbruch von der Form

$$a + \cfrac{b_1 x}{1 + \cfrac{b_2 x}{1 + \cdots}}$$

Die beiden Functionen $P_n$, $Q_n$, welche aus den $P, Q$ entstehen, wenn man für $\alpha, \alpha'$ resp. $\alpha+n$, $\alpha'-n$ setzt, werden durch bestimmte Integrale dargestellt, und dann werden die asymptotischen Werthe dieser Integrale für unendlich grosse Werthe von $n$ bestimmt. Es ergiebt sich, dass die Näherungswerthe des Kettenbruches für alle Werthe von $x$, welche nicht reell und $\geqq 1$ sind, mit wachsendem Index gegen den Werth des Quotienten $P:Q$ convergiren. Es ist dies dasselbe Resultat, zu dem Herr Thomé (Borchardt J. LXVI.) gelangt ist, indem er die Ausdrücke benutzte, die Herr Heine für Kugelfunctionen mit unendlich grossem Index gegeben hat.

XXIV. Ueber das Potential eines Ringes. Die bekannte Potentialgleichung wird unter der Bedingung gelöst, dass die Function $V$ an der Oberfläche einer Ringfläche mit kreisförmigem Querschnitt gegeben ist. Durch passende Wahl der Veränderlichen gelangt man zu einer Differentialgleichung von der Form

$$t^2(t^2+1)\frac{d^2P}{dt^2} + t^3\frac{dP}{dt} - (m^2t^2+n^2-\tfrac{1}{4})\,P = 0,$$

deren Lösung auf mannigfache Art ermöglicht wird durch hypergeometrische Reihen mit besonderem vierten Element, die sich durch ganze elliptische Integrale erster und zweiter Gattung ausdrücken lassen. Dasselbe Problem ist behandelt in der Arbeit von C. Neumann: „Theorie der Electricitäts- und Wärme-Vertheilung in einem Ring.“ Halle 1864.

XXV. Gleichgewicht der Electricität auf Cylindern mit kreis-

förmigem Querschnitt und parallelen Axen. In dieser Abhandlung, für welche, wie auch für die folgenden, ausser wenigen Andeutungen nur Formeln vorhanden waren, wird die Methode auseinandergesetzt, welche dazu dient, Abbildungsaufgaben zu lösen, wenn das abzubildende, einfach oder mehrfach zusammenhängende Gebiet von geradlinigen Strecken und von Kreisbogen begrenzt ist.

XXVI. Beispiele von Flächen kleinsten Inhalts bei gegebener Begrenzung. Die erste Minimalfläche ist eine solche, die von drei Geraden begrenzt ist, welche sich in zwei Punkten schneiden, so dass die Fläche zwei Ecken in ihrer Begrenzung und einen in's Unendliche verlaufenden Sector besitzt. Während das Resultat für dieses Problem von Riemann kurz aber vollständig angegeben ist, findet sich im Nachlass in Bezug auf das zweite Beispiel nur die Andeutung der Möglichkeit der Lösung. Hier ist die gesuchte Fläche vom kleinsten Inhalt begrenzt von zwei in parallelen Ebenen gelegenen geradlinigen Polygonen ohne einspringende Ecken und mit je einem Umlauf. Die vollständige Durchführung des Problems ist dem Herrn Herausgeber zu verdanken. Besondere Fälle dieser Aufgabe hat bekanntlich Herr Schwarz behandelt (Bestimmung einer speciellen Minimalfläche, Berlin 1871).

XXVII. Fragmente über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen (1852). Das erste Fragment ist ein Zusatz zu § 40 der Jacobi'schen Fundamenta. Es werden die dortigen Reihen für den Grenzfall $q = 1$ untersucht; dadurch entstehen Functionen einer Variabeln, die für jeden Werth des Argumentes unstetig sind. Diese Reihen convergiren für $q = 1$ zum grössten Theil nicht, aber durch Integration können convergente Reihen aus ihnen abgeleitet werden. Herr Dedekind bemerkt in den Erläuterungen zu den vorstehenden Fragmenten, dass Riemann sowohl mit diesem ersten Fragmente als auch mit dem zweiten, das unter demselben Gesichtspunkte die Reihen für $\log k$, $\log k'$ und $\log \frac{2k}{\pi}$ untersucht, den Zweck verfolgt habe, zu seiner Abhandlung: „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch

eine trigonometrische Reihe" Beispiele von Functionen zu bilden, die in jedem Intervall unendlich oft unstetig werden. Herr Dedekind verfolgt die Methode, welche Riemann benutzt, um die Modulfunction für den Fall zu untersuchen, wo das complexe Periodenverhältniss $\frac{k'i}{k}$ sich einem rationalen Werthe nähert, weiter, und gelangt zu einer sehr interessanten Anwendung auf die Theorie der unendlich vielen Formen der Thetafunctionen, d. h. auf die Bestimmung der bei der Transformation erster Ordnung auftretenden Constanten, welche von Jacobi und Hermite auf die Gauss'schen Summen, also auf die Theorie der quadratischen Reste zurückgeführt ist.

XXVIII. Fragment aus der Analysis Situs. Dieser kleine Aufsatz enthält leider nur wenige und zu kurz gefasste Andeutungen über die allgemeine Theorie des Zusammenhangs von Mannigfaltigkeiten. Es wird die Definition für eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit und ihre Querschnitte gegeben, und daran ein allgemeiner Satz über die Zerlegung durch Querschnitte geschlossen.

XXIX. Convergenz der $p$-fach unendlichen Thetareihe.

XXX. Zur Theorie der Abel'schen Functionen für den Fall $p = 3$. Die beiden zuletzt genannten Abhandlungen sind Bruchstücke aus einer Riemann'schen Vorlesung aus den Jahren 1861 und 1862, und nach einem von G. Roch geführten Hefte bearbeitet. In der ersten Abhandlung ist der Beweis der Convergenz der $p$-fach unendlichen Thetareihe geführt auf Grund eines allgemeinen Satzes, nach welchem die Untersuchung der Convergenz einer unendlichen Reihe mit positiven Gliedern stets zurückgeführt werden kann auf die Untersuchung eines bestimmten Integrals. Die zweite Abhandlung betrifft die Theorie der „Abel'schen Functionen"

$\sqrt{\sum_{\nu=1..p} c_\nu \varphi_\nu(s,z)}$ (betr. des $\varphi$ s. Abel'sche Functionen Art. 23)' welche in $p-1$ Punkten unendlich klein von der ersten Ordnung werden, für den Fall $p = 3$. Die Anzahl dieser Abel'schen Functionen ist allgemein $2^{p-1}(2^p-1)$, also hier $= 28$. Die Untersuchung derselben basirt auf dem Begriff der „Charakteristik",

eines diesen Functionen zugehörigen Zahlencomplexes, und auf dem Begriff der „Gruppencharakteristik“, d. h. der Summe der Charakteristiken aller Paare von 6 Abel'schen Functionen, die zu einer Gruppe gehören, d. h. beim Ueberschreiten der Querschnitte dieselben Factoren annehmen.

Ein „Anhang“ zu diesen mathematischen Werken Riemann's enthält einige Fragmente philosophischen Inhalts: I. Zur Psychologie und Metaphysik; II. Erkenntnisstheoretisches; III. Naturphilosophie. Wenn auch diese scharfsinnigen philosophischen Speculationen Riemann's auf das Engste mit seinen mathematischen Arbeiten zusammenhängen, so müssen wir doch darauf verzichten, an dieser Stelle den Inhalt derselben wiederzugeben, zumal da ihre knappe Darstellung nur schwer einen Auszug gestattet.

Allen Verehrern Riemann's hat Herr Dedekind eine sehr dankenswerthe Beigabe geliefert in dem dem Werke beigefügten „Lebenslauf Bernhard Riemann's“. Es war nicht die Absicht des Herrn Verfassers, Riemann's wissenschaftliche Bedeutung zu charakterisiren, sondern auf Grundlage von Briefen und anderen Mittheilungen seitens der Riemann'schen Familie in einfachen Zügen eine biographische Skizze von dem Manne zu entwerfen, von dem man mit Recht behaupten kann: Er war gross, nicht bloss als Gelehrter, sondern auch als Mensch. M.

---

C. Weierstrass. Beweis eines Hauptsatzes der Theorie der periodischen Functionen von mehreren Veränderlichen. Berl. Monatsber. 1876. 680-693.

Aus $\varrho$ gegebenen Periodensystemen

$$(P_1', P_2' \dots P_n')\ (P_1'', P_2'' \dots P_n'') \dots (P_1^{(\varrho)} P_2^{(\varrho)} \dots P_n^{(\varrho)})$$

einer eindeutigen oder mehrdeutigen periodischen Function:

$$\varphi(u_1, u_2 \dots u_n) = \varphi(u_1 + P_1,\ u_1 + P_2, \dots u_n + P_n)$$

kann man bekanntlich beliebig viele andere Periodensysteme

$$P_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\varrho} m_\beta P_\alpha^{(\beta)} \qquad (\alpha = 1 \dots n)$$

ableiten, indem man die $\varrho$ ganzen Zahlen $m_1, m_2 \dots m_\varrho$ ganz will-

kürlich wählt. Nun kann der Fall eintreten, dass man nur eine endliche Anzahl solcher Systeme erhält, in denen jede einzelne Periode, ihrem absoluten Betrage nach, unterhalb einer willkürlich anzunehmenden Grenze liegt. „In diesem Falle giebt es stets Periodensysteme der Function, aus denen sich alle übrigen in der angegebenen Weise ableiten lassen, und zwar ist die kleinste Zahl $r$ der dazu hinreichenden Systeme $\gtreqless 2n$." Nachdem Herr Weierstrass diesen Satz bewiesen, wird untersucht, wie eine gegebene Function beschaffen sein muss, damit die dem Satze zu Grunde gelegte Voraussetzung stattfindet. Diese Voraussetzung ist gleichbedeutend mit der Annahme, dass die Function kein System unendlich kleiner Perioden besitzt. Nun wird zunächst für eine eindeutige Function $\varphi(u_1 \dots u_n)$ gezeigt, dass sie nur dann ein System unendlich kleiner Perioden besitzt, wenn sie sich als Function von weniger als $n$ Argumenten, die von den ursprünglichen linear abhängig sind, darstellen lässt. Ist dies nicht der Fall, so giebt es $r$ solcher Fundamental-Periodensysteme

$$(P_{11} \dots P_{n1})\ (P_{12} \dots P_{n2}) \dots (P_{1r} \dots P_{nr}),$$

aus denen sich sämmtliche Periodensysteme vermittelst der Gleichungen

$$P_\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} \nu_\beta P_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = 1 \dots n,\ \nu_\beta \text{ beliebige } g.Z.)$$

bilden lassen. Uebrigens kann man diese $r$ Fundamentalsysteme durch unendlich viele Complexe von $r$ anderen Fundamentalsystemen ersetzen, nicht aber durch Complexe von weniger Systemen. Zum Schluss wird gezeigt, dass der für eine eindeutige Function $\varphi(u_1 \dots u_n)$ bewiesene Satz ebenso für eine $m$-deutige Function gilt. M.

---

Julius Petersen. Om Integralregningens Transcendenter. Zeuthen Tidsskr. (3) VI. 1-9.

Die von Liouville und anderen Mathematikern über die Integrale gewisser Differentialgleichungen angestellten Betrachtungen beschränken sich wesentlich auf einfache Transcendenten und ganz specielle Formen der Gleichungen. Hier wird ein Satz von

mehr umfassender Natur mitgetheilt, der vielleicht dieser Art von Untersuchungen eine weitere Ausdehnung geben kann. Der Verfasser bezeichnet als eine hyperalgebraische Function eine solche Transcendente, deren Derivirte algebraisch (im weitesten Sinne) ist, und behandelt übrigens solche Transcendenten $\theta$, welche durch eine Gleichung von der Form

$$d\theta + N_1 dv_1 + N_2 dv_2 + \cdots = 0,$$

worin die $N$ algebraische Functionen der Variabeln $v$ sind, definirt sind. Solche Functionen werden, „wenn die $v$ algebraisch in $x$ sind", monome der ersten Ordnung, eine algebraische Function derselben „transcendent der ersten Ordnung" genannt. Eine Transcendente von einer solchen genommen, ist wiederum der zweiten Ordnung u. s. w. Zuerst wird der folgende Fundamentalsatz bewiesen. Wenn die Gleichung $\frac{dy}{dx} = P$ ($P$ algebraisch in $x$ und $y$) das Integral

$$u = f(xy\theta) + c,$$

oder auch

$$\psi_1 + \psi_2 + \cdots u_1 = c$$

hat, wo $\psi_1, \psi_2 \dots$ hyperalgebraische der höchsten vorkommenden Ordnung sind, und $u_1$ nur Functionen niedriger Ordnung enthält, und $\theta$ eine der Transcendenten von resp. höchster oder nächsthöchster Ordnung bezeichnet, dann wird $\frac{\varphi}{1}\frac{du}{d\theta} = c$ entweder eine Identität oder eine neue Form der gegebenen Gleichung sein. $\varphi$ bezeichnet hier den Integrationsfactor. Ist $\varphi = e^u$, so gilt dasselbe von $\frac{1}{\varphi}\frac{dx}{d\theta} = c$. Mit Hülfe dieses Satzes wird demnächst bewiesen, dass, wenn $\frac{dy}{dx} = F$ durch $u = c$ integrirt ist, und so auf beliebige Weise durch Transcendenten der genannten Art ausgedrückt werden kann, es stets als eine Summe von hyperalgebraischen Functionen der ersten Ordnung und von algebraischen Functionen geschrieben werden kann Die Beweise dieser Sätze sind nicht der Art, dass sie ohne weitläufige Entwickelung wiedergegeben werden können.

Gm.

---

G. Mittag-Leffler. En metod att analytiskt framställa en funktion af rational karakter, huilken bliv oandlig alltid och endact uti vissa foreskrifna oandlighetspunkter, huilkas konstanter ano påa forhand angifna. Meddellad Ofverr. Forh. Stockholm. 1876.

Herr Weierstrass hat im Winter 1873 in seiner Vorlesung über die elliptischen Functionen bewiesen: Wenn eine Function $f(x)$ vorliegt, deren Null- und Unendlichkeitspunkte im Voraus angegeben sind und die übrigens überall im Endlichen den Charakter einer rationalen Function hat, so kann sie immer analytisch dargestellt werden. Hier ist nicht der Platz, auf die Form und die Eigenschaften dieser analytischen Darstellung näher einzugehen. Es soll nur erwähnt werden, dass die Null- und Unendlichkeitspunkte ganz beliebig angegeben werden können, nur kommt innerhalb jedes endlichen Bereiches nur eine endliche Anzahl vor.

Der Verfasser, welcher das Glück hatte als Zuhörer den obengenannten Vorlesungen des grossen Mathematikers zu folgen, hat sich ein mit dem Weierstrass'schen ganz analoges Problem gestellt. Eine Function $f(x)$, die in einem Punkt $a$ den Charakter einer rationalen Function hat, lässt sich für eine endliche Umgebung dieses Punktes in eine convergirende Potenzreihe entwickeln, welche negative Potenzen nur in endlicher Anzahl enthält. Die Coefficienten dieser negativen Potenzen werden die dem Punkte $a$ zugehörigen Entwickelungscoefficienten mit negativem Index genannt. Es sei jetzt eine Function $f(x)$ vorgelegt, deren sämmtliche Unendlichkeitspunkte im Voraus angegeben sind, und für welche auch sämmtliche zu jedem Unendlichkeitspunkte zugehörigen Entwickelungscoefficienten mit negativem Index vorgeschrieben sind. Die Function soll übrigens überall im Endlichen den Charakter einer rationalen Function haben. Es wird gezeigt, wie man eine solche Function immer analytisch darstellen kann. Die Unendlichkeitspunkte und ebenso die zugehörigen Entwickelungscoefficienten mit negativem Index können ganz beliebig angenommen werden, nur dass in jedem endlichen

Bereiche nur eine endliche Anzahl von Unendlichkeitspunkten liegt, und dass die Entwickelungscoefficienten mit negativem Index, die einem im endlichen Bereiche liegenden Unendlichkeitspunkte zugehören, in endlicher Anzahl, und sämmtlich endlich angenommen werden müssen. Am Ende der Abhandlung wird angedeutet, wie man mehrere Anwendungen der vorgelegten Untersuchung machen kann, und wie auch diese Untersuchung viel weiter geführt werden kann. Dies ist auch schon in späteren Abhandlungen geschehen. M. L.

---

L. Lorenz. Om arbitrære Funktioners Udvikling ved givne Funktioner. Zeuthen Tidsskr. (3) VI. 129-144.

Wenn eine arbiträre Function $f(x)$ in eine Reihe von der Form

$$f(x) = \Sigma A_k F(x),$$

wo $F(x)$ eine bekannte Function bedeutet, entwickelt werden soll, sucht man in der Regel zuerst die Coefficienten zu bestimmen, und demnächst die Bedingungen der Gültigkeit der Entwickelung zu ermitteln. In vielen Fällen können die Coefficienten als Integrale von der Form

$$A_k = \int_a^b f(x')\, \varphi(x')\, dx'$$

bestimmt werden, und zur Untersuchung der Gültigkeitsbedingungen wird dann gewöhnlich die Dirichlet'sche Methode benutzt. Hier wird zu dieser Untersuchung eine andere Methode entwickelt, welche darauf beruht, die Integrale $A_k$ in Elemente aufzulösen, für diese die Integration auszuführen, demnächst für jedes solches Elementsystem die Reihe in Bezug auf $k$ zu summiren, und endlich die Summe aller dieser Partialsummen zu nehmen. In vielen Fällen sind die $k$ die Wurzeln einer Gleichung $\varphi(y) = 0$. Um diesen besonders wichtigen Fall zu untersuchen, behandelt der Verfasser zuerst die Frage, inwiefern die Regel für die Zerlegung algebraischer Brüche sich auch auf Brüche

$\frac{p(y)}{q(y)}$ anwenden lasse, in denen Zähler und Nenner derselben unendliche convergente Reihen sind. Als Bedingung der Zulässigkeit einer solchen Zerlegung findet er, dass

$$\left(\frac{p(\varrho e^{i\theta})}{q(\varrho e^{i\theta})}\right)^{\varrho=\infty} = \begin{cases} 0 \text{ für } \sin\theta \gtrless 0 \\ \text{endlich für } \sin\theta = 0 \end{cases}$$

sein soll. Dieser Satz wird benutzt, um die Gültigkeit der von Hankel und Schläfli behandelten Entwickelung durch Bessel'sche Functionen der ersten Art

$$f(x) \doteq \sum_k A_k J_n(kx)$$

zu untersuchen. Es wird bewiesen, dass für eine beliebige endliche und continuirliche Function die Entwickelung immer zwischen den Grenzen 0 und 1 gültig ist; für $f(x)$ discontinuirlich giebt sie in Discontinuitätspunkten den Mittelwerth der beiden Werthe von $f(x)$, und für $f(x) = \infty$ ist sie noch gültig, wenn nur $\int_0^x f(x)\,dx$ endlich und continuirlich bleibt. Noch eine andere analoge Entwickelung wird betrachtet, in welcher die $k$ die Wurzeln der Gleichung $\frac{dJ_n(x)}{dx}$ sind.

Gm.

---

## H. Durège. Ueber die nichtpolaren Discontinuitäten. Wien. Ber. 1876.

Eine Function einer complexen Variabeln hat in einem Punkte $a$ eine „polare" Unstetigkeit, wenn sie in diesem Punkte stets unendlich gross wird, auf welche Art auch die Variable $z$ dem Punkte $a$ sich nähert; dagegen ist die Unstetigkeit eine „nichtpolare", wenn die Function in dem Punkte $a$ verschiedene Werthe annimmt, je nach dem Wege und der Art der Annäherung des $z$ an $a$. Es ist bekannt, dass die Function in dem letzteren Falle mindestens bei einer Annäherung auch unendlich gross wird, folglich in diesem Unstetigkeitspunkte jeden beliebigen Werth erlangen kann. Von Interesse ist es nun, in besonderen

deren Fällen zu untersuchen, wie sich die Variable dem Unstetigkeitspunkte nähern muss, damit ein unendlich grosser oder ein vorgeschriebener Werth der Function erlangt wird. Diese Frage untersucht der Herr Verfasser an dem Beispiel

$$f(z) = \frac{c^2}{c - e^{\frac{1}{z}}},$$

wo $c$ eine beliebige Constante ist; und zeigt, dass man $z$ auf einer Archimedischen Spirale $\psi = ar$ so bewegen muss, dass der Radiusvector sich sprungweise nach der Ordinatenaxe hin dreht, wenn $f(z)$ im Nullpunkt den Werth $c$ annehmen soll.

M.

---

L. Stickelberger. Ueber einen von Abel aufgestellten die algebraischen Functionen betreffenden Lehrsatz. Borchardt J. LXXXII. 45-46.

Liouville hat in seinem „II. Mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique" (Mém. des soc. étr. V. 140-142) einen speciellen Fall des allgemeinen Abel'schen Satzes über die Form derjenigen Integralfunctionen algebraischer Differentialausdrücke bewiesen, welche durch algebraische und logarithmische Functionen dargestellt werden können, (Crelle J. IV. 204; Oeuvres I. 354), und zwar unter Anwendung der von Abel benutzten Hülfsmittel. Dieser specielle Fall wird hier auf anderem Wege bewiesen, und daraus der Satz gefolgert: „Ist $y$ eine algebraische Function der Veränderlichen $x$ und $z = \frac{dy}{dx}$ die nach $x$ genommene Ableitung derselben, so besteht zwischen je zweien der Veränderlichen $x$, $y$, $z$ eine algebraische Gleichung, und durch irgend zwei dieser Veränderlichen lässt sich die dritte rational ausdrücken."

M.

---

P. Mansion. Elementary demonstration of a fundamental principle of the theory of functions. Rep. Brit. Ass. 1876.

Der Verfasser zeigt, dass Herr Thomae (Abriss einer Theorie der complexen Functionen, Halle, siehe F. d. M. II. 220 u. V. 218) zuerst den Satz bewiesen, dass „eine Function $y = F(x)$, deren Differentialquotient in positiver und negativer Richtung Null ist, für jeden Werth von $x$ zwischen $x_0$ und $X$, in diesem ganzen Intervall constant ist", und giebt einen elementaren Beweis desselben, aber ohne Bemerkung darüber, ob die Variable reell oder complex ist. Csy. (O.)

---

G. Jung. Théorème général sur les fonctions symétriques d'un nombre quelconque des variables. C. R. LXXXII. 988-989.

Ein Satz über das Verhalten der partiellen Differentialquotienten einer symmetrischen Function von $n$ Veränderlichen gegenüber der Vertauschung derselben. St.

---

W. Kapheyn. Beschouwing over symmetrische functien. Nieuw. Arch. II. 73-75.

Es sei

$$V = \text{Const.} + A + B + C \cdots + M,$$

eine symmetrische Function von $x, y, z, \ldots$, worin $A$ eine homogene Function vom ersten Grad, $B$ vom zweiten Grad, etc. Es werden die Beziehungen aufgesucht, welche zwischen der Function und ihren Differentialquotienten bestehen müssen, damit sie symmetrisch sei. G.

---

A. Zievenzoff. Darstellung einer Function in der Form eines bestimmten Integrals. Mosc. Math. Samml. VIII. (Russisch.)

Ist $n$ eine ganze Zahl, $\alpha < 0$, und

$$f(z^{2n}) = f((x+iy)^{2n})$$

für alle positiven Werthe von $x$ und $y$ endlich, continuirlich und eindeutig, so ist

$$f(\alpha^{2n}) = \frac{2}{\pi} e^{\alpha} \int_0^{\infty} f((-1)^n t^{2n}) \cos t \frac{\alpha dt}{\alpha^2 + t^2}$$
$$= \frac{2}{\pi} e^{\alpha} \int_0^{\infty} f((-1)^n t^{2n}) \sin t \frac{t dt}{\alpha^2 + t^2}.$$

Man wird leicht einsehen, dass diese Formeln, sowie die Schlömilch'schen (Schlömilch Z. 1865 p. 152), auf welche sich der Verfasser stützt, ein specieller Fall der allgemeinen, von Cauchy, in den Ann. de Gergonne XVI. gegebenen Formeln sind. P.

---

D. Amanzio. Risoluzione per serie delle equazioni quadrinomie della forma

$$Ax^{2m+n} + Bx^{m+n} + Cx^n + D = 0.$$

Battaglini G. XIV. 153-181, 306-318.

Die Gleichung

$$Ax^{2m+n} + Bx^{m+n} + Cx^n + D = 0$$

kann in die Form

$$a^2x^{2m+n} + 2ax^{m+n} + bx^n - c = 0$$

gebracht werden. Bedeutet nun $P$ den Werth

$$\frac{-(m+n) + [(m+n)^2 - (2m+n)nb]^{\frac{1}{2}}}{2m+n},$$

und ist

$$(2m+n)^m \operatorname{mod.} a^n \operatorname{mod.} c^m < P,$$

so kann jede der $n$ Wurzeln der Gleichung, welche mit $c$ gleichzeitig verschwinden, in eine nach aufsteigenden Potenzen von $a$ geordnete Reihe entwickelt werden, und wenn $b$ von 1 verschieden ist, so kann auch jede der $2m$ Wurzeln, welche für $a = 0$ unendlich werden, in eine nach aufsteigenden Potenzen von $c$ geordnete Reihe entwickelt werden. Ferner kann man die erste Gleichung in die Form bringen

$$\alpha x^{2m+n} + 2\beta x^{m+n} + \beta^2 x^n - \gamma = 0,$$

und hier können, falls eine gewisse Ungleichung erfüllt ist, sämmtliche Wurzeln nach Potenzen von $\beta$ entwickelt werden.

No.

---

A. Zievenzoff. Versuch einer systematischen Darstellung der Functional-Rechnung mit einer unabhängigen Veränderlichen. Mosc. Math. Samml. VIII. (Russisch).

A. Zievenzoff. Ueber Functional-Indices. Mosc. Math. Samml. VIII. (Russisch).

Den Gegenstand der Functional-Rechnung bilden, nach dem Verfasser, alle diejenigen Fragen, wo man die Form einer Function, welche als Resultat gewisser Combinationen von gegebenen Operationen entsteht, zu bestimmen hat, oder umgekehrt, diejenigen Operationen sucht, welche in einer gegebenen Art mit einander combinirt, gewissen Gleichungen genügen. Als Beispiel einer Aufgabe von der ersten Art diene folgende Frage: man bestimme die Form von $\psi^x(t)$, wo $x$ die Zahl der Wiederholungen einer gegebenen Operation $\psi(x)$ bedeutet. Die Zahl $x$ ist der sogenannte Functional-Index. (Diese Definition wird nachher verallgemeinert und auf negative und gebrochene $x$ ausgedehnt). Als Beispiel für die zweite Art kann folgende Aufgabe dienen: man bestimme die Form der Operation $\psi^2(x)$, für welche die Gleichung

$$F(x,\ \psi(x),\ \psi^2(x)) = 0$$

besteht, worin $F$ eine Function von gegebener Form ist. Die Absicht des Verfassers ist, die Allgemeingültigkeit der Zurückführung aller Fragen von angegebener Art auf die Integration der Gleichungen mit endlichen Differenzen zu zeigen. P.

---

## Capitel 2.

## Besondere Functionen.

Faà de Bruno. Sur la fonction génératrice de Borchardt. Borchardt J. LXXXI. 217-220.

Für die erzeugende Function (siehe Cayley, A memoir on the symmetric functions, London, 1857):

$$\theta(t_1, t_2 \dots t_n) = (-1)^n \frac{f(t_1) \dots f(t_n)}{\Pi(t_1, \dots t_n)} D_{t_1} \dots D_{t_n} \left[ \frac{\Pi(t_1, \dots t_n)}{f(t_1) \dots f(t_n)} \right],$$

wo $\Pi(t_1, \dots t_n)$ das Product aller Differenzen der Grössen $t_1, t_2, \dots t_n$ bezeichnet, wird der für die Rechnung geeignetere Ausdruck gegeben:

$$\theta(t_1, t_2, \dots t_n) = \frac{(-1)^{n-1}}{f(t_1) \dots f(t_n)\, \Pi(t_1, \dots t_n)}$$
$$| f'(t),\ f(t) - tf'(t), \dots (n-1)t^{n-2} f(t) - t^{n-1} f'(t) |,$$

wo

$$| F_1(t),\ F_2(t), \dots F_n(t) |$$

die Determinante bezeichnet, die aus den Functionen

$$F_1(t),\ F_2(t), \dots F_n(t)$$

nach Substitution der $n$ Argumente $t_1,\ t_2, \dots t_n$ gebildet wird.

M.

---

Ch. Hermite. Sur un théorème d'Eisenstein. L. M. S. VII. 173-175.

Herr Heine hat bei dem Beweis des Eisenstein'schen Satzes über die Reihenentwickelungen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x, y) = 0$ auch einen Beweis dafür gegeben, dass man durch eine Substitution $kx$ für $x$ stets bewirken kann, dass alle Coefficienten in jenen Entwickelungen, mit Ausnahme des ersten, ganze Zahlen werden (Crelle XLVIII. 267). Herr Hermite giebt eine einfachere Methode, wodurch dieser Zusatz bewiesen wird, der übrigens, (wie Herr Smith in der Anmerkung erwähnt) auch von Eisenstein selbst ausgesprochen ist (siehe Berl. Ber. 1852, p. 441 und Crelle J. XLV. 285). Auch auf transcendente Gleichungen lässt sich die hier gegebene Methode anwenden, wie Herr Hermite an dem Beispiel der Kepler'schen Gleichung $y = a + x \sin y$ zeigt.

M.

---

J. W. L. Glaisher. Values of certain infinite products, with an application to the summation of the geometrical series of the $n^{\text{th}}$ order as a definite integral. L. M. S. VII. 23-26.

Eine Fortsetzung der Untersuchungen über unendliche Producte in Messenger (2) II. 188-190 (s. F. d. M. V. 143) und über geometrische Reihen höherer Ordnung in Quart. J. XI. 328-343 (s. F. d. M. III. 107). Hier ist das Problem, geometrische Reihen $n^{\text{ter}}$ Ordnung durch bestimmte Integrale darzustellen, in seiner Allgemeinheit gelöst. Ausgehend von der Identität

$$1+x^n = (1-\omega x)(1-\omega^3 x)\dots(1-\omega^{2n-1}x),$$

wo $\omega$ irgend eine $2n^{\text{te}}$ Einheitswurzel, und durch die Substitution

$$x^2,\ (\tfrac{1}{2}x),\ (\tfrac{1}{3}x)^2\dots \text{ für } x,$$

erhält Herr Glaisher eine Darstellung der unendlichen Producte

$$x^n(1+x^{2n})\left(1+\frac{x^{2n}}{3^{2n}}\right)\left(1+\frac{x^{2n}}{5^{2n}}\right)\dots$$

und

$$(1+x^{2n})\left(1+\frac{x^{2n}}{3^{2n}}\right)\left(1+\frac{x^{2n}}{5^{2n}}\right)\dots,$$

woraus sich der Werth von

$$\frac{(2^{2n}+x^{2n})(4^{2n}+x^{2n})(6^{2n}+x^{2n})\dots}{(1^{2n}+x^{2n})(3^{2n}+x^{2n})(5^{2n}+x^{2n})\dots},$$

also eine Verallgemeinerung der Formel von Wallis für $\frac{\pi}{2}$ ergiebt. Durch Differentiation ergeben sich dann die Werthe der Reihen:

$$\frac{1}{1^{2n}+x^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}+x^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}+x^{2n}}+\cdots$$

und

$$\frac{1}{1^{2n}+x^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}+x^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}+x^{2n}}+\cdots.$$

Nun wird, wie in der früheren Arbeit, das Integral

$$e^{-ab} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{b^2+x^2}dx$$

angewendet, um die folgenden Resultate zu gewinnen. Es ist:

$$\tfrac{1}{2}+q^{1^n}+q^{2^n}+q^{3^n}+\cdots = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sin az\,dx,$$

$$q^{1^n}+q^{3^n}+q^{5^n}+\cdots = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \sin az\,dx,$$

wo $a = \log \frac{1}{q}$, und $z$ resp. gegeben ist durch die Gleichungen:

$$z(1+z^2)\left(1+\frac{z^2}{2^{2n}}\right)\left(1+\frac{z^2}{3^{2n}}\right)\cdots = e^{a},$$

$$(1+z^2)\left(1+\frac{z^2}{3^{2n}}\right)\left(1+\frac{z^2}{5^{2n}}\right)\cdots = e^{a}.$$

M.

---

B. Bečka. Bestimmung des Werthes des imaginären Products

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{n(n+1)+(1+i)}{n(n+1)+(1-i)}.$$

Casopis V. (Böhmisch.)

Der Verfasser weist nach, dass dieses Product den Werth $i(=\sqrt{-1})$ hat. W.

---

R. H. G. Day. On certain algebraic formulae. Quart. J. XIV. 184-185.

Beweis des Satzes: „Ist S eine ganze homogene Function zweiten Grades von $n$ Variabeln $x, y, z \ldots$, und sind

$$x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \ldots x_n, y_n, z_n$$

$3n$ Variabele, welche für je 2 Zahlen $r \lesseqgtr n$, $s \lesseqgtr n$ der Gleichung

$$X_r x_s + Y_r y_s + Z_r z_s + \cdots = 0 \quad \left(2X = \frac{dS}{dx},\quad 2Y = \frac{dS}{dy}, \ldots\right)$$

genügen, welches im Ganzen $\frac{n}{2}(n-1)$ Bedingungen sind, so ist:

$$S = \frac{1}{S_1}(Xx_1 + Yy_1 + Zz_1)^2 + \frac{1}{S_2}(Xx_2 + Yy_2 + Zz_2)^2 + \cdots\text{“}$$

M.

---

C. Leudesdorf. Solution of a question (4996). Educ. Times XXVI. 18.

Wenn

$$\varphi(a,x) = 1 + a\cdot\frac{1+x}{1+r} + a^2\cdot\frac{1-x}{1-r}\cdot\frac{1-rx}{1-r^2}$$
$$+ a^3\cdot\frac{1-x}{1-r}\cdot\frac{1-rx}{1-r^2}\cdot\frac{1-r^2x}{1-r^3}\cdots,$$

so ist

$$\varphi(1,a).\varphi(a,x) = \varphi(1,ax).$$

O.

---

C. Leudesdorf. Solution of a question (4788). Educ. Times XXV. 30.

Aus der für alle positiven ganzen Werthe von $n$ gültigen Gleichung

$$\frac{1}{n}A_{n+1} = A_n + A_{n-1},$$

wo

$$A_0 = 1,\quad A_1 = 0,$$

wird hergeleitet:

$$A_r = r!\left\{\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots\frac{(-1)^r}{r!}\right\}.$$

O.

---

Yvon Villarceau. Note sur la période de l'exponentielle $e^z$ C. R. LXXXIII. 594-600.

Der Herr Verfasser geht aus von dem Gedanken, dass man die Theorie der Kreis- und hyperbolischen Functionen nicht geometrisch, sondern auf der Theorie der Exponentialfunction $e^z$ aufbauen müsse. Zunächst stellt er sich die Aufgabe, die reelle Grösse $\varpi$ zu ermitteln, welche der Gleichung

$$e^{\varpi i} = 1$$

genügt. Setzt man in der hieraus folgenden Gleichung:

$$(3)\qquad \frac{\varpi}{4}i = \log i$$

für $i$ den Werth $\frac{1+i}{1-i}$, so erhält man die langsam convergirende Reihe

$$\frac{\varpi}{4} = 2(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\cdots).$$

Zweck der vorliegenden Note ist nun, aus der Gleichung (3), ohne Anwendung der Kreisfunctionen, eine grosse Zahl für die numerische Berechnung geeigneterer Ausdrücke für die Grösse $\varpi$ herzuleiten. Setzt man

$$i = \left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^m$$

und entwickelt nach Potenzen von $x$, so lässt sich die resultirende Gleichung für $m = 1, 2 \ldots 6$ auf eine quadratische reduciren. Ebenso lässt sich für $m = 2^i$ (wo $i$ eine positive ganze Zahl) die entsprechende Grösse $x_i$ durch Auflösung einer Reihe quadratischer Gleichungen finden. Es ist nämlich, wenn $x_i = \frac{1}{\alpha_i}$ gesetzt wird,

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i \pm \sqrt{1+\alpha_i^2}.$$

Die gesuchte Grösse $\varpi$ wird dann

$$\frac{\varpi}{8} = 2^i\left(\frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\alpha_i^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\alpha_i^5} - \cdots\right),$$

und geht man zur Grenze über, so findet man leicht für $\varpi$ den bekannten Werth $\pi$. Aehnliche Reihen ergeben sich durch die Substitution $m = k\cdot 2^i$, wo $k$ eine beliebige Zahl ist.

M.

---

A. Laisant & E. Catalan. Sur une question paradoxale. N. C. M. II. 274-276; 353-354.

P. Mansion. Sur de prétendues questions paradoxales. N. C. M. II. 369-372.

Bezieht sich auf die folgenden Paradoxa: Wenn

$$\operatorname{tg} a = \pm\sqrt{-1},$$

so ist

$$\operatorname{tg}(a+b) = \pm\sqrt{-1};$$

wenn

$$\sin a = \cos a = 2,$$

so ist

$$-\sin(z) = \frac{1}{8}\cos(z+2a).$$

Der erste Verfasser greift diese Art zu sprechen als absurd an, der zweite vertheidigt sie als bequem und nützlich. Er vertheidigt auch die Terminologie hinsichtlich des Raumes von $n$ Dimensionen gegen Herrn Catalan, indem er darauf aufmerksam macht, dass Dank dieser Terminologie die Theorie der Gleichungen mit partiellen Derivirten grosse Fortschritte gemacht habe.

Mn. (O.)

---

Yvon Villarceau. Note sur le développement de $\cos mx$ et $\sin mx$, suivant les puissances de $\sin x$. C. R. LXXXII.. 1469-1471.

Um die Entwickelung der Functionen $\cos mx$ und $\sin mx$ nach Potenzen von $\sin x$ zu erhalten, differentiirt der Herr Verfasser die Gleichungen

$$\cos mx = 1 + A_2 \sin^2 x + A_4 \sin^4 x + A_6 \sin^6 x + \cdots,$$
$$\sin mx = B_1 \sin x + B_3 \sin^3 x + B_5 \sin^5 x + \cdots$$

zweimal und vergleicht die entsprechenden Coefficienten von $x$ in der resultirenden Entwickelung und in der ursprünglichen, woraus sich die allgemeinen Ausdrücke für die $A$ und $B$ ergeben. Auf gleiche Weise findet man die Entwickelungen der hyperbolischen Functionen $\cos mx$ und $\sin mx$. Obgleich die Entwickelung von $\cos mx$ nur für ein gerades $m$, die von $\sin mx$ nur für ein ungerades $m$ endlich ist, so convergiren die Reihen doch für jedes ganzzahlige $m$. Die hyperbolischen Reihen hingegen sind nur für diejenigen Werthe convergent, für welche $\mathfrak{Sin}^2 x < 1$. M.

---

A. Enneper. Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. Halle a. S. Louis Nebert. Des Verfassers Bericht. Gött. Anz. 1876, 33-40.

Der Herr Verfasser veröffentlicht hier das Material, welches er in seinen academischen Vorträgen über Theorie und Anwendung der elliptischen Functionen, unter besonderer Berücksichtigung des Entwickelungsganges der Theorie, gegeben. Das Werk zeichnet sich einmal durch eine möglichst einfache Begründung

der Lehre von den elliptischen Functionen und eine leichtfassliche und möglichst ausführliche Darstellung der für die Anwendungen wichtigsten Theile der Theorie aus, dann aber besonders durch die äusserst gewissenhaften literarischen Hinweisungen. Während ein Lagrange, Gauss und Jacobi in kurzen historischen Einleitungen zu ihren Werken diejenigen Schriften anführten, welche ihnen für ihre weiteren Arbeiten zum Ausgangspunkt gedient, lassen sich neuere Mathematiker häufig eine wenig erfreuliche Vernachlässigung der Literatur zu Schulden kommen. Herr Enneper hat, ausgehend von der bekannten Thatsache, dass jedes Zurückgreifen auf die Originalarbeiten stets anregend für die weitere Förderung ist, auf die literarischen Nachweise die allergrösste Sorgfalt verwendet. Das Namenregister am Ende des Werkes erleichtert nicht nur das Auffinden der im Texte vorkommenden Citate, sondern giebt zugleich eine Uebersicht über eine beträchtliche Anzahl von Arbeiten aus der Theorie der elliptischen Functionen. Ausser den Werken von Legendre, Abel und Jacobi und den zahlreichen gedruckten Abhandlungen Anderer, die auf dem von jenen drei Meistern gelegten Fundament weiter gebaut, hat Herr Enneper die Ausarbeitung von Vorlesungen benutzt, die Herr C. W. Borchardt gehalten, und deren Grundlage directe Vorträge von Jacobi waren. Diejenigen Abschnitte, welche das vorliegende Werk jenen Vorlesungen verdankt, betreffen hauptsächlich Untersuchungen über die Thetafunctionen. Zunächst ist als hierher gehörig das Jacobi'sche Fundamentaltheorem (Crelle J. XXXII. 176-181, und Werke I. 357) zu nennen, welches eine bemerkenswerthe Beziehung zwischen den Summen zweier Producte von je vier Thetafunctionen derselben Art, aber mit verschiedenen Argumenten aufstellt, nebst dessen Anwendungen. Auf diesem Fundamentaltheorem hat Jacobi sowohl die Lehre von den elliptischen Functionen basirt, als auch die Additionstheoreme der elliptischen Integrale von Euler und Legendre. Ferner betreffen die den Vorlesungen entlehnten Abschnitte die Anwendung des Multiplicationstheorems der Thetafunctionen auf die elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung; ferner die Methoden zur Betrachtung des un-

endlichen Productes

$$\prod_{s=1}^{\infty} (1-2q^{n(2s-1)} \cos 2nx + q^{n(4s-2)}),$$

und die von Abel zuerst gegebene Zerlegung eines jeden Factors dieses Productes nach dem Cotesischen Satze, auf welcher Zerlegung Jacobi das Problem der Transformation basirte. Ebenso gehört hierzu die Herleitung der Thetafunctionen, in denen $q$ durch $\alpha q^{\frac{1}{n}}$ ($\alpha^n = 1$) ersetzt ist, aus der Productform

$$\vartheta(z,q) = \varphi(q) \prod_{1}^{\infty} (1-q^{2s-1} e^{2zi}) (1-q^{2s-1} e^{-2zi});$$

und schliesslich ist die Note IV. zu nennen, welche die Jacobi'sche Transformation einer Reihe in ein Product mittelst der Reihen von Fourier und Lagrange enthält. Wie Herr Enneper in der Vorrede bemerkt, geben gerade diese, wenn auch kurzen Abschnitte einen schönen Beleg für das wunderbare Genie Jacobi's ab, und machen die vollständige Veröffentlichung seiner Vorlesungen über elliptische Functionen dringend wünschenswerth. Die eigenen Untersuchungen des Herrn Enneper sind einmal durch die ganze Anlage des Werkes, namentlich aber durch die Ausarbeitung des neunten Abschnittes, der Transformation, in Anspruch genommen.

Wir wollen nun eine kurze Uebersicht des Inhalts des vorliegenden Werkes geben. Der Herr Verfasser beginnt mit einigen einleitenden historischen Bemerkungen über die ersten Entdecker der elliptischen Integrale und Functionen. Durch Betrachtung einfacherer Integrale irrationaler algebraischer Functionen wird dann der Weg angedeutet zur Behandlung derjenigen Integrale, die unter dem Wurzelzeichen eine Function dritten oder vierten Grades haben. Es folgt die Reduction auf die Legendre'sche Normalform. Der zweite Abschnitt führt die elliptischen Functionen sin am, cos am, $\Delta$am ein, enthält ihre Definition durch Differentialgleichungen und ihre doppelte Periodicität. Die hier gewonnenen Nullwerthe und Unendliches werden im folgenden Abschnitte zur Darstellung der elliptischen Functionen in Form von unendlichen Producten benutzt. Auf dem von Heine an-

gegebenen Wege (Crelle J. XXXIX. 122-137) werden dann die gewonnenen Resultate dadurch verificirt, dass die Quotienten zweier jener unendlichen Producte in Reihen entwickelt werden. Dies führt auf die Thetafunctionen, deren Theorie im fünften Abschnitt gegeben wird. Im Abschnitt VI. wird der Uebergang von den Thetafunctionen zu den elliptischen Functionen gemacht, und es werden hier die wichtigsten Reihen und Producte, welche in der Theorie der elliptischen Functionen auftreten, zusammengestellt. Es folgt das Additionstheorem für die elliptischen Functionen und Integrale erster Gattung, nebst Folgerungen und Anwendung. Der achte Abschnitt beginnt mit der Classification der elliptischen Integrale, und enthält die Legendre'schen und die Jacobi'schen Untersuchungen über die drei Gattungen parallel nebeneinander; die Integrale der dritten Gattung sind besonders eingehend behandelt. Gegenstand des letzten Abschnittes, der fast die Hälfte des ganzen Werkes ausmacht, ist die Transformation der elliptischen Functionen. Hier ist vom Herrn Verfasser der Weg vom Einfachen zum Zusammengesetzten gewählt worden, um deutlich erkennen zu lassen, wie die einzelnen Theoreme gefunden wurden. Nach Entwickelung der in den Jacobi'schen „fundamenta" gegebenen algebraischen Principien wird die Abel'sche Behandlungsweise des Transformationsproblemes angeschlossen. Dann folgen die Jacobi'schen Ausführungen der Transformation mit Hülfe der Thetafunction. An die Transformation zweiter Ordnung schliessen sich die Resultate von Landen, Legendre, Lagrange, Gauss, Jacobi, Küpper, Richelot und Schröter. Es folgt die Multiplication der elliptischen Functionen. Dann werden nach Jacobi diejenigen elliptischen Functionen behandelt, deren Modul kleiner als 1 ist; diese gestatten mannigfache Anwendungen auf verschiedene Transformationsgleichungen; und letztere führen zu der allgemeinen Transformation der Thetafunctionen und zu der allgemeinen Transformation der elliptischen Functionen mittelst einer algebraischen Gleichung. Der nächste Paragraph enthält die Betrachtung der Differentialgleichungen, welchen die Zähler und die Nenner bei den elliptischen Transformationsformeln und Multiplicationsformeln

genügen. Den Schluss der Transformation bildet die Theorie der Modulargleichungen. Diese Theorie beginnt mit der Jacobi'schen Differentialgleichung dritter Ordnung für den ursprünglichen und den transformirten Modul. Daran schliesst sich die Multiplicatorgleichung. Dann folgen die Methoden von Jacobi und Sohncke zur wirklichen Herstellung der Modulargleichungen. Besonders hervorzuheben sind die den Schluss bildenden schönen Untersuchungen von Schröter, dessen Methode zur Aufstellung der Modulargleichungen wesentlich darin besteht, das Product zweier Thetafunctionen durch eine Summe ähnlicher Producte auszudrücken.

Um den Text nicht von vornherein zu überbürden, hat Herr Enneper eine Reihe von Zusätzen als Noten seinem Werke beigefügt. Die Noten theilen sich in solche, welche die Theorie weiter ausführen, und in solche, die rein historischen Inhalts sind. Der Inhalt betrifft die Reduction einiger allgemeinen Integrale auf elliptische, ferner Reihenentwickelungen, geometrische Anwendungen der elliptischen Integrale, Integrale dritter Gattung mit complexem Parameter, Einiges historisch Wichtige aus der Transformationstheorie und Hermite's Anwendung der Transformation 2[ter] Ordnung auf die Entwickelung einiger elliptischen Functionen in Reihen. M.

---

G. Mittag-Leffler. En metod att komma i analytisk besittning af de elliptiska funktionerna. Helsingfors. J. C. Frenckell & Son.

Diese Abhandlung bildet einen Theil einer grösseren Arbeit, welche der Verfasser baldigst in deutscher Sprache zu publiciren beabsichtigt, und welche die wesentlich verschiedenen Methoden, die zum analytischen Besitz der elliptischen Functionen führen, in organischem Zusammenhange darstellen wird. Die oben genannte Abhandlung bildet jedoch an sich ein abgeschlossenes Ganzes. Ihre Aufgabe ist, theils zu zeigen, welches die Grundgedanken sind, deren Entdeckung eine Theorie der elliptischen Functionen vorbereitete und ermöglichte, theils und hauptsächlich eine mit mathematischer Schärfe durch-

geführte Darstellung von einem der Hauptwege zu geben, die in die analytische Theorie dieser Functionen einführen. Dieser Weg ist der von Abel eingeschlagene. Es wird gezeigt, wie Abel's Methode vor allen übrigen den Vorzug hat, dass sie keinen Satz aus der allgemeinen Functionentheorie voraussetzt, und darum auch die elementarste ist von allen mathematischen Entwickelungen, welche die analytische Bedeutung der elliptischen Functionen vermitteln. Gegen Abel's eigene Darstellung kann der wesentliche Einwand erhoben werden, dass der Uebergang von den Multiplicationsformeln zu den unendlichen Doppelreihen und Doppelproducten nicht hinreichend begründet ist, sondern mittelst einer Beweisführung bewerkstelligt wird, welche auf mathematische Strenge kaum einen Anspruch erheben könnte. Wenn diesem Mangel nicht abgeholfen werden kann, so wird Abel's Methode illusorisch. Es wird gezeigt, wie die Gültigkeit des genannten Ueberganges sich auf einfache und directe Art beweisen lässt, ohne jedoch für diese Beweisführung, die von der Abel'schen durchaus abweicht, irgend einen Satz zu Hülfe zu nehmen, der ausserhalb des Gedankenkreises liegt, worin die Abel'sche Methode im Uebrigen sich befindet. Es wird ferner dargelegt, wie Abel's Methode auf einfache und natürliche Weise in die ältere Weierstrass'sche übergeht, wenn gewisse Sätze aus der allgemeinen Functionstheorie der Entwickelung zu Grunde gelegt werden. Eine Darstellung dieser älteren Weierstrass'schen Methode wird gegeben. Endlich wird in Kürze gezeigt, welche Mängel sowohl der Abel'schen Methode als der älteren Weierstrass'schen anhaften, und zugleich angedeutet, wie diese Mängel durch andere Methoden und besonders durch die spätere Weierstrass'sche Methode entfernt werden können. Es sind im Verlauf der Darstellung die Vorlesungen des Herrn Weierstrass sowie mehrere mündliche Mittheilungen des grossen Mathematikers gelegentlich benutzt worden, was in jedem besonderen Falle bemerkt wird.

M. L.

---

G. Mittag-Leffler. En metod att i teorien for de elliptiska funktionerna hasleda de oundligda dubbelprodukterna utus multiplications formlerna. Öfvers. Forh. Stockholm. 1876.

In der vorigen Arbeit wurde nur der Uebergang von den Multiplicationsformeln zu den unendlichen Doppelreihen im Speciellen durchgeführt. In der jetzt genannten wird der Uebergang von den Multiplicationsformeln zu den unendlichen Doppelproducten im Speciellen ausgeführt. M. L.

---

Ed. Weyr. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Prag. Ber. 1875, 1-32.

Herleitung der wichtigsten Eigenschaften der elliptischen Functionen sin am $u$, cos am $u$, $\Delta$ am $u$ durch Betrachtung des elliptischen Normalintegrals erster Gattung

$$u=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Zunächst werden die Werthe der algebraischen Function

$$\Delta(z)=\sqrt{(1-z^2)\,(1-k^2z^2)}$$

für beliebige Wege der complexen Variabeln $z$ untersucht; dann insbesondere diejenigen Werthe zusammengesetzt, welche $\Delta(z)$ auf der reellen Axe annimmt, je nachdem $z$ die Verzweigungspunkte $\pm 1$, $\pm\frac{1}{k}$ oberhalb oder unterhalb der reellen Axe umgeht. Daran schliesst sich die Ermittelung der Werthe, welche das elliptische Integral erster Gattung auf den 6 Integrationswegen

$$0\dots\pm 1,\ \pm 1\dots\pm\frac{1}{k},\ \pm\frac{1}{k}\cdots\pm\infty$$

erlangt. Das führt zur Einführung von $K$ und $K'$. Darauf werden die Werthe des Integrals $u$ für beliebige obere Grenzen untersucht, und zwar zuerst bei geradlinigen Integrationswegen, dann bei beliebigen. Letztere können ersetzt werden durch eine Anzahl geschlossener Elementarwege, welche im Nullpunkte be-

ginnen und nach Umkreisung je eines der 4 kritischen Punkte wieder im Nullpunkte endigen. So gelangt man zur Ermittelung des allgemeinsten Integralwerthes. Endlich wird $z$ als Function des Integralwerthes $u$ angesehen, der Verlauf von $z = \sin\operatorname{am} u$, ihre speciellen Werthe und ihre Periodicität gegeben. Dasselbe wird dann für die beiden andern Functionen

$$\cos\operatorname{am} u = \sqrt{1-z^2} \text{ und } \Delta\operatorname{am} u = \sqrt{1-k^2z^2}$$

durchgeführt. Somit sind, wie man sieht, die bekannten Resultate direct auf Cauchy'schem Wege hergeleitet.

M.

---

Camillo Tychsen. En Bemärkning om den elliptiske Differentialligning. Zeuthen Tidsskrift (3) VI. 67-69.

Die elliptische Differentialgleichung kann, wie Walton bemerkt hat (Quart. J. 1871) mittelst Substitution auf Clairaut's Form reducirt werden. Gm.

---

Escary. Remarque sur la Note de M. Floquet relative à l'intégration de l'équation d'Euler. Nouv. Ann. (2) XV. 61-63.

Zu demselben Resultat, nämlich zur Integration der Euler'schen Gleichung, zu der Herr Floquet durch Betrachtung der Krümmungslinien des einschaligen Hyperboloids gelangt ist (Nouv. Ann. (2) XIV. 120; siehe F. d. M. VII. 271), kann man auch gelangen mit Hülfe der Krümmungslinien auf dem zweischaligen Hyperboloid und auf dem Ellipsoid. Die Betrachtung der Krümmungslinien jeder einzelnen dieser Flächen lässt die Bedeutung jener Linien für die Integration der Euler'schen Gleichung deutlicher erkennen, als die Lamé'sche Methode des „paramètre thermométrique" der homofocalen concentrischen Flächen zweiten Grades. M.

---

A. G. Greenhill. Graphical representation of the elliptic functions by means of a bent elastic beam. Messenger (2) V. 180-182.

Wenn eine in einer Ebene befindliche Stange in Folge eines Druckes, der aus zwei in ihren Enden balancirenden Kräften zusammengesetzt ist, krumm wird, so beschreibt die Centrallinie eine elastische Curve, deren Krümmung proportional mit der Entfernung von der Drucklinie, und deren Sehnen sowohl wie Tangenten sich als elliptische Functionen des Bogens darstellen lassen. Der Modul wird durch die Grösse des Drucks bestimmt. Dieses wird analytisch nachgewiesen, und eine Darstellung von sinam, cosam, $\Delta$am und des elliptischen Integrals 2[ter] Gattung gegeben. Glr. (O.)

---

Ch. Hermite. Extrait d'une lettre à M. L. Königsberger sur le développement des fonctions elliptiques suivant les puissances croissantes de la variable. Borchardt J. LXXXI. 220-228.

Man weiss, dass in den Entwickelungen der elliptischen Functionen nach steigenden Potenzen der Variabeln:

$$\sin \mathrm{am}\, x = 1 - \frac{\mathfrak{P}_1 x^3}{3!} + \frac{\mathfrak{P}_2 x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{\mathfrak{P}_m x^{2m+1}}{(m+1)!} + \cdots$$

$$\cos \mathrm{am}\, x = 1 - \frac{\mathfrak{Q}_1 x^2}{2!} + \frac{\mathfrak{Q}_2 x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{\mathfrak{Q}_m x^{2m}}{2m!} + \cdots$$

$$\Delta \mathrm{am}\, x = 1 - \frac{\mathfrak{R}_1 x^2}{2!} + \frac{\mathfrak{R}_2 x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{\mathfrak{R}_m x^{2m}}{2m!} + \cdots$$

die $\mathfrak{P}_m$, $\mathfrak{Q}_m$, $\mathfrak{R}_m$ ganze rationale Functionen des Moduls von der Form

$$\mathfrak{P}_m = 1 + P_1 x^2 + P_2 x^4 + \cdots + x^{2m},$$
$$\mathfrak{Q}_m = 1 + Q_1 x^2 + Q_2 x^4 + \cdots + Q_{m-1} x^{2m-2},$$
$$\mathfrak{R}_w = R_0 x^2 + R_1 x^4 + R_2 x^6 + \cdots + x^{2m}$$

sind, doch ist es bis jetzt nur für die $\mathfrak{P}_m$, nicht aber für die $\mathfrak{Q}_m$ und $\mathfrak{R}_m$ gelungen, die in ihnen auftretenden Coefficienten von $x$ allgemein als Functionen von $m$ auszudrücken. Mit der arith-

metischen Herstellung dieser Coefficienten beschäftigt sich im Vorliegenden Herr Hermite. Die Entwickelungen der reciproken Werthe $\frac{1}{\sin \mathrm{am}\, x}$ und $\frac{1}{\sin^2 \mathrm{am}\, x}$ in Reihen geben Veranlassung, neben diesen Polynomen $\mathfrak{P}_m$, $\mathfrak{Q}_m$, $\mathfrak{R}_m$ zwei neue Functionen $\mathfrak{S}_m$ und $\mathfrak{T}_m$ zu untersuchen, welche durch die Relationen:

$$\frac{1}{\sin \mathrm{am}\, x} = \frac{1}{x} + \mathfrak{S}_1 x + \frac{\mathfrak{S}_2 x^3}{3!} + \cdots + \frac{\mathfrak{S}_m x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \cdots$$

$$\frac{1}{\sin^2 \mathrm{am}\, x} = \frac{1}{x^2} + \mathfrak{T}_1 + \frac{\mathfrak{T}_2 x^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathfrak{T}_m x^{2m-2}}{(2m-2)!} + \cdots$$

definirt werden. Für diese Polynome ergeben sich aus der Theorie der Transformation zahlreiche Eigenschaften, wie der Herr Verfasser zeigt. M.

---

D. André. Sur le développement des fonctions elliptiques et de leurs puissances. C. R. LXXXIII. 135-136.

Die $n^{\text{ten}}$ Potenzen der drei elliptischen Functionen

$$\lambda(x),\ \mu(x),\ \nu(x)$$

sind von der Form:

$$\lambda^n(x) = A_0^{(n)} \frac{x^n}{n!} - A_1^{(n)} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + A_2^{(n)} \frac{x^{n+4}}{(n+4)!} - A_3^{(n)} \frac{x^{n+6}}{(n+6)!} + \cdots,$$

$$\mu^n(x) = B_0^{(n)} - B_1^{(n)} \frac{x^2}{2!} + B_2^{(n)} \frac{x^4}{4!} - B_3^{(n)} \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\nu^n(x) = C_0^{(n)} - C_1^{(n)} \frac{x^2}{2!} + C_2^{(n)} \frac{x^4}{4!} - C_3^{(n)} \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

und die Coefficienten lassen sich nach Potenzen von $k^2$ entwickeln. Die Coefficienten dieser letzteren Entwickelungen sind Functionen von $q$, deren allgemeine Form Herr André gesucht hat. Die

Resultate werden in der vorliegenden Note ohne Beweis mitgetheilt. M.

---

P. Joubert. Sur le développement en séries des fonctions $Al(x)$. C. R. LXXXII. 1259-1262, 1326-1327.

Herr Weierstrass hat bekanntlich bewiesen, dass die von ihm eingeführten Functionen

$$Al(x) = e^{-\int_0^x dx \int_0^x k^2 \sin^2 \operatorname{am} x \, dx},$$
$$Al(x)_1 = \sin \operatorname{am} x \, Al(x), \qquad Al(x)_2 = \sin \operatorname{am} x \, Al(x),$$
$$Al(x)_3 = \varDelta \operatorname{am} x \, Al(x)$$

in beständig convergirende Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $x$ entwickelt werden können. Die Coefficienten sind Polynome in $k^2$. Ordnet man die Reihen nach den Potenzen von $k^2$, dann sind die Reihen in $x$, die man als Coefficienten erhält, wie Herr Weierstrass ebenfalls bereits bemerkt hat, summirbar (Crelle J. LII. p. 358). Der Verfasser weist nun insbesondere nach, dass der Coefficient von $k^{2m}$ in der Entwickelung von $Al(x)$ eine Summe von Gliedern der Form

$$f(x) \cos 2px + \varphi(x) \sin 2px$$

ist, wo $f(x)$ und $\varphi(x)$ ganze Polynome in $x$ bedeuten, und $p$ eine ganze Zahl ist, deren Quadrat nicht grösser als $m$ sein kann. Ist nämlich $y = \sin \operatorname{am} x$, dann hat man

$$y'' + y = k^2(-y + 2y^3).$$

Setzt man nun

$$y = \sin x + k^2 S_1 + k^4 S_2 + \cdots$$
$$y^3 = \sin^3 x + k^2 S_1^{(3)} + k^4 S_2^{(3)} + \cdots,$$

dann hängt $S_p^{(3)}$ nur von $S_1, S_2 \ldots S_p$ ab, und durch Coefficientenvergleichung findet man

$$S_1'' + S_1 = -\sin x + 2\sin^3 x = \frac{\sin x}{2} - \frac{\sin 3x}{2},$$
$$S_m'' + S_m = -S_{m-1} + 2S_{m-1}^{(3)}.$$

Ferner ist $S_m = 0$, $S_m' = 0$ für $x = 0$.

Hieraus ergiebt sich, dass $S_m$ eine Summe von Gliedern der Form

$$f(x)\cos(2p+1)x+\varphi(x)\sin(2p+1)x$$

ist, wo

$$p=0,1,2\ldots m;$$

denn die erste Gleichung liefert durch Integration

$$16\,S_1=\sin x-4x\cos x+\sin 3x,$$

also für $S_1$ die bezeichnete Form, und die zweite Gleichung zeigt, dass $S_m$ diese Form annehmen muss, wenn sie für $S_1 \ldots S_{m-1}$ statt hat. Hieraus leitet man dann in einfacher Weise ab, dass in $\sin^2 \mathrm{am}\, x$, in $\int_0^x \sin^2 \mathrm{am}\, x$, und endlich in $Al(x)$ der Coefficient von $k^{2m}$ eine Summe einer begrenzten Anzahl von Gliedern der Form

$$f(x)\cos 2px+\varphi(x)\sin 2px$$

ist. ($p$ ist eine ganze Zahl).

Der Beweis, dass $p^2$ nicht grösser als $m$ ist, stützt sich auf die Betrachtung der von Herrn Weierstrass für $Al(x)$ aufgestellten partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 Al(x)}{\partial x^2}+2k^2x\frac{\partial Al(x)}{\partial x}+2k(1-k^2)\frac{\partial Al(x)}{\partial x}+k^2x^2Al(x)=0.$$

Hr.

---

C. Moreau. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 30-36.

Gegeben ist die Gleichung $\frac{du}{dx}=\sqrt{1+au^2+bu^4}$ mit der Bedingung $u=0$ für $x=0$. Es wird bewiesen, dass $u$ eine ungrade Function von $x$ ist, ferner dass in der Entwickelung von $u$ nach Potenzen von $x$ der Coefficient von

$$\frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)}$$

von der Form

$$a^n+\lambda_1 a^{n-2}b+\lambda_2 a^{n-4}b^2+\lambda_3 a^{n-6}b^3+\cdots \text{ etc.}$$

Dabei ist

$$\lambda_1 = \frac{3^{2n+1}-3}{16} - \tfrac{3}{8}n, \quad \lambda_2 = \frac{5^{2n+1}-5}{256} + \frac{3^{2n+3}-3^3}{64} + \tfrac{9}{8}n^2 - \left(\frac{3^{2n+2}}{32} + \frac{39}{16}\right)n.$$

Die $\lambda$ sind alle ganze Zahlen. O.

---

A. Radicke. Eine einfache Darstellungsform der vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung. Schlömilch Z. XXI. 442-443.

Bezeichnet man mit $D_x^\mu(f(x))$ eine Reihe, welche sich aus der Potenzreihe $f(x)$ dadurch ergiebt, dass man jedes Glied von der Form $A_n x^h$ mit dem Factor

$$\frac{\Gamma(h+1)}{\Gamma(h+1-\mu)}\, x^{-\mu}$$

multiplicirt, so gilt die Gleichung:

$$\int_0^1 t^\alpha(1-t)^\beta\,(1-xt)^\gamma\,dt = \frac{\Gamma(\beta+1)}{x^{\alpha+\beta+1}}\, D_x^{-\beta-1}(x^\alpha(1-x)^\gamma).$$

Für die besonderen Werthe

$$\alpha = -\tfrac{1}{2},\ \beta = -\tfrac{1}{2},\ \gamma = \mp\tfrac{1}{2},\ x = k^2$$

erhält man hieraus sehr elegante Ausdrücke für $K$ und $E$, aus denen sich sehr leicht die bekannten Reihenentwickelungen für diese Integrale nach Potenzen von $k^2$ ergeben. M.

---

A. Cayley. On a $q$-formula leading to an expression for $E_1$. Messenger (2) VI. 63-66.

Die Formel heisst:

$$(1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^4 - 16\left(\frac{q}{1-q^2} + \frac{2q^2}{1-q^4} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \cdots\right) = \frac{1-9q-25q^3+49q^6+81q^{10}-\cdots}{1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots},$$

und führt zu

$$-1 + \frac{2E_1}{K} = \frac{\pi^2}{4K^2}\cdot\frac{1-9q-25q^3+49q^6+81q^{10}-\cdots}{1-q-q^3+q^6+q^{10}-\cdots},$$

was ein neuer Ausdruck für $E_1$ als $q$-Function ist. Der Ausdruck der rechten Seite findet sich in Clebsch, Theorie der Elasticität (Leipzig 1862) p. 162. Glr. (O.)

---

J. W. L. Glaisher. Notes on certain formulae in Jacobi's Fundamenta Nova. Messenger (2) V. 174-179.

Wenn man für eine Function von $k, k', K, K'$ oder von einer dieser Grössen eine Reihe nach Potenzen von $q$ entwickelt hat, und ebenso für dieselbe Function nach Vertauschung von $k$ und $k'$, so erhält man eine Identität, in der eine Function einer willkürlichen Grösse $\mu$ gleich gemacht ist einer Function von $\frac{\pi^2}{\mu}$. Enthält die ursprüngliche Function von $k, k', K, K'$ $k$ und $k'$ symmetrisch, so hat die Identität die Form: Function von $\mu$ gleich derselben Function von $\frac{\pi^2}{\mu}$. Die Arbeit enthält eine Liste solcher symmetrischer und unsymmetrischer Identitäten, die aus den Formeln in den Fundamenta Nova hergeleitet sind. Auch finden sich Identitäten mit $e^{-\pi\sqrt{3}}$ und $e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$, hergeleitet durch die Substitutionen

$$k = \sin 15^\circ \quad \text{und} \quad k = \sin 75^\circ.$$

Es wird ferner bemerkt, dass die drei Winkel

$$\text{arc tan}\, e^{-\frac{1}{4}\pi} - \text{arc tan}\, e^{-\frac{3}{4}\pi} + \text{arc tan}\, e^{-\frac{5}{4}\pi} - \cdots$$

$$\text{arc tan}\, e^{-\frac{1}{2}\pi} - \text{arc tan}\, e^{-\frac{3}{2}\pi} + \text{arc tan}\, e^{-\frac{5}{2}\pi} - \cdots$$

$$\text{arc tan}\, e^{-\pi} - \text{arc tan}\, e^{-3\pi} + \text{arc tan}\, e^{-5\pi} - \cdots$$

in arithmetischer Progression stehen. Glr. (O.)

---

F. W. Newman. On the use of Legendre's scale for calculating the first elliptic integral. Rep. Brit. Ass. 1876.

Lagrange's Tafel zur Berechnung der elliptischen Integrale erster Gattung wurde 1784 veröffentlicht. Das Bildungsgesetz ist sehr einfach. Legendre veröffentlichte 1825 eine neue Tafel,

deren Bildungsgesetz analog ist, bei welcher aber die Berechnung eine schnellere ist. Dabei waren einige Fehler vorgekommen, die Herr Newman verbessert.

Csy. (O.)

---

A. Cayley. Correction to Prof. Cayley's „Eighth memoir on quantics“ Phil. Trans. CLVII. (1867). Proc. of London XXIV. 496.

Berichtigungen zu der Tafel für $L$, $M$, $L'$, $M'$ p. 544.

Cly. (O.)

---

J. W. L. Glaisher. On a series summation leading to an expression for the Thetafunction as a definite integral. Rep. Brit. Ass. 1876.

Benutzt wird die Bezeichnung der „Fundamenta Nova“ und gesetzt

$$\alpha = \frac{\pi K'}{K}, \quad u = \frac{\pi}{2K}(x+K).$$

Es wird bewiesen, dass

$$\theta(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \{f(\alpha t, u) + f(\alpha t, -u)\} \sin t^2 dt,$$

wo

$$f(p, q) = \frac{\sin hp\sqrt{2} + \sin(p\sqrt{2}+2q)}{\cos hp\sqrt{2} - \cos(p\sqrt{2}+2q)},$$

ferner dass

$$\theta(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \{\varphi(\alpha t, u) + \varphi(\alpha t, -u)\} \cos t^2 dt,$$

wo

$$\varphi(p, q) = \frac{\sin hp\sqrt{2} - \sin(p\sqrt{2}+2q)}{\cos hp\sqrt{2} - \cos(p\sqrt{2}+2q)}.$$

Csy. (O.)

A. Cayley. On a differential equation in the theory of elliptic functions. Messenger (2) VI. 29.

Die Differentialgleichung

$$Q^2 - Q\left(k + \frac{1}{k}\right) - 3 = 3(1-k^2)\frac{dQ}{dk},$$

(über welche man auch sehe Messenger (2) IV. 69 und 110, siehe F. d. M. VI. p. 281) hat als particuläre Lösung

$$k + \frac{1}{k} = \tfrac{1}{4}\left(Q^3 - 6Q - \frac{3}{Q}\right).$$

Glr. (O).

---

J. W. L. Glaisher. On a class of identical relations in the theory of elliptic functions. Phil. Trans. CLXV.

Eine periodische Function

$$\psi x = \pm \psi(x + \mu)$$

kann als Reihe von vielfachen sinus oder cosinus von $\frac{\pi x}{\mu}$ (graden oder ungraden Vielfachen, sin oder cos je nach dem besonderen Falle) dargestellt werden, es giebt aber auch eine andere völlig verschiedene Form, in die $\psi x$ im Allgemeinen entwickelt werden kann, nämlich:

$$\begin{aligned}\psi x &= \varphi x + \varphi(x-\mu) + \varphi(x+\mu) + \varphi(x-2\mu) + \varphi(x+2\mu) + \cdots \\ &= \varphi x - \varphi(x-\mu) - \varphi(x+\mu) + \varphi(x-2\mu) + \varphi(x+2\mu) + \cdots\end{aligned}$$

je nachdem

$$\psi(x+\mu) = \psi x \text{ oder } -\psi x.$$

Die primären elliptischen Functionen werden in der Abhandlung unter diesen beiden verschiedenen Formen aufgestellt, und die daraus entstehenden identischen Relationen dann einer Discussion unterworfen. Es wird gezeigt, dass man diese Identitäten direct aus Fourier's Satz ableiten kann, oder auf einem sehr schnellen Wege mit Hülfe der elementaren Algebra. Die Hauptresultate sind die, welche die Nummer 18) bis 23) tragen. Die erste von diesen heisst:

$$\operatorname{sech} x - \operatorname{sech}(x-\mu) - \operatorname{sech}(x+\mu) + \operatorname{sech}(x-2\mu) + \operatorname{sech}(x+2\mu) + \cdots$$
$$= \frac{2\pi}{\mu}\left\{ \frac{\cos\frac{\pi x}{\mu}}{\cosh\frac{\pi^2}{2\mu}} + \frac{\cos\frac{3\pi x}{\mu}}{\cosh\frac{3\pi^2}{2\mu}} + \frac{\cos\frac{5\pi x}{\mu}}{\cosh\frac{5\pi^2}{2\mu}} + \cdots \right\},$$

welches eine Idee von der allgemeinen Form derselben gebe mag. Cly. (O.)

---

J. W. L. Glaisher. On some elliptic function identities. Messenger (2) VI. 102-105; L. M. S. VII. 61-66.

Die Identitäten betreffen die Relationen zwischen

$$\varphi q = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \cdots$$
$$fq = 1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + q^{15} + \cdots$$
$$Fq = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \cdots$$

Eine von ihnen ist z. B.

$$\varphi q \cdot \varphi q^2 \cdot \varphi q^4 \cdot \varphi q^8 \ldots = \frac{\varphi(-q^3)\cdot\varphi(-q^4)\cdot\varphi(-q^6)}{\varphi(-q)}.$$

Glr. (O.)

---

Laguerre. Sur la transformation des fonctions elliptiques. C. R. LXXXII. 1257-1259.

Das Problem der Transformation der elliptischen Functionen kann folgendermassen ausgesprochen werden: „Es soll ein rationales Integral $z = \frac{X}{Y}$ der Gleichung

$$\frac{dz}{\sqrt{u(z, 1)}} = \frac{dx}{\sqrt{\lambda u + \mu h}}$$

gefunden werden, wo $\lambda$ und $\mu$ Constanten, und $h$ die Hesse'sche Determinante der biquadratischen Function $u$ ist." In dieser Form ist das Problem von Hermite für $m = 3$ gelöst. Da nun für $m = 4n + 1$

$$X = -\frac{dJ}{dy}\Theta + x\Pi, \quad Y = \frac{dJ}{dx}\Theta + y\Pi,$$

und für $m = 4n-1$

$$X = -\frac{d\Theta}{dx} + xJ\Pi, \quad Y = \frac{d\Theta}{dy} + yJ\Pi,$$

wo $J$ die Covariante 6ten Grades von $u$, und $\Theta$ und $\Pi$ homogene Functionen von $u$ und $h$ sind, deren Grad im ersten Falle $n-1$, resp. $n$, und im zweiten Falle $n$, resp. $n-2$, so ist das Transformationsproblem auf die Bestimmung der Polynome $\Theta$ und $\Pi$ zurückgeführt. Herr Laguerre deutet nun einen Weg an, auf dem man diese Functionen finden kann. Er benutzt dazu die von Jacobi (Crelle IV.; Eisenstein, Oeuvres p. 159) gegebene Identität;

$$\tfrac{1}{2}(\alpha y - \beta x)^2\left(\xi^2 \frac{d^2U}{dX^2} + 2\xi\eta \frac{d^2U}{dXdY} + \eta^2 \frac{d^2U}{dY^2}\right)$$
$$= \varphi(\xi Y - \eta X)^2 + f(\xi Y_1 - \eta X_1)^2 - f(\xi Y - \eta X)(\xi Y_2 - \eta X_2)$$
$$- \tfrac{1}{2} f_1(\xi Y - \eta X)(\xi Y_1 - \eta X_1),$$

wo

$$\varphi = \frac{m}{12}\left(\alpha^2 \frac{d^2f}{dx^2} + 2\alpha\beta \frac{d^2f}{dx\,dy} + \beta^2 \frac{d^2f}{dy^2}\right) + k(\alpha y - \beta x)^2,$$

indem er darin die obigen Werthe von $X$ und $Y$ einsetzt und ferner

$$f = \lambda u + \mu h, \quad \xi = \frac{du}{dy} + \theta \frac{dh}{dx}, \quad \eta = -\varrho \frac{du}{dx} - \theta \frac{dh}{dx},$$
$$\alpha = \varrho' \frac{du}{dy} + \theta' \frac{du}{dy}, \quad \beta = \varrho' \frac{du}{dx} - \theta' \frac{dh}{dx}.$$

Dadurch ergeben sich zwei identische Polynome für $\varrho, \theta, \varrho', \theta'$, deren Coefficienten nur $u, h$ und die unbekannten Functionen $\Theta$, $\Pi$ mit ihren partiellen Ableitungen nach $u$ und h enthalten. Durch Gleichsetzung der entsprechenden Potenzen der Unbekannten würde man 3 Differentialgleichungen erhalten, analog den Jacobi'schen, aus denen sich $\Theta$, $\Pi$ und die Constanten $\lambda$, $\mu$, $k$ bestimmen liessen. Die Ausführung der angedeuteten Methode hat der Verfasser einer späteren Mittheilung vorbehalten.

M.

---

W. K. Clifford. On the transformation of elliptic functions. Proc. L. M. S. VII. 29-38.

W. K. Clifford. Notes on the Communication entitled „On the transformation of elliptic functions.“ Proc. L. M. S. 225-233.

In diesen Arbeiten wird die Jacobi'sche geometrische Construction des Additionstheorems der elliptischen Function angewendet auf die Theorie der Transformation. Die erste Arbeit enthält eine geometrische Herleitung des Poncelet'schen Theorems: „Ist ein Polygon einem Kegelschnitt $U$ so eingeschrieben, dass alle Polygonseiten, mit Ausnahme einer Seite, Kegelschnitte aus der Schaar $U+\sigma V$ berühren, so wird die übrig bleibende Seite gleichfalls einen Kegelschnitt der Schaar berühren“. Ferner werden, wenn alle diese Kegelschnitte in einen andern übergehen, ohne in zwei gerade Linien zu zerfallen, die Verbindungslinien entsprechender Ecken zweier solcher Polygone einen Kegelschnitt der Schaar berühren. Als eine Verallgemeinerung dieses Theorems ergiebt sich folgendes: „Bewegt sich ein $n$-Eck mit seinen einen Kegelschnitt berührenden Seiten so, dass diese Gruppen von $n$Tangenten eine Involution bilden, so ist der Ort der $\frac{1}{2}n(n-1)$Ecken eine Curve von der Ordnung $n-1$“.

In seiner zweiten Arbeit bemerkt Herr Clifford zunächst, dass der eine der obigen Arbeit zuletzt gegebene Satz über das Polygon, das einem Kegelschnitt umgeschrieben und einer Curve, deren Ordnung um 1 geringer ist als seine Seitenzahl, eingeschrieben ist, bereits von Herrn Darboux (Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, Paris 1873, p. 183; siehe F. d. M. V. 399) gegeben sei. Hierauf ergänzt Herr Clifford das Frühere durch den analytischen Nachweis, dass das neue Argument $u'$ der transformirten elliptischen Function gleich ist dem ursprünglichen Argument $u$, dividirt durch eine Constante $M$. Dann wird der Cayley'sche Satz, dass jede Transformation dritten Grades ein elliptisches Differential besitzt, das sie transformirt (s. Phil. Mag. (4) XV. 363), so bewiesen, dass sich daraus folgende Verallgemeinerung ergiebt: „Die nothwendige und hinreichende

Bedingung, dass die Substitution $y = U:V$ geeignet ist, ein elliptisches Differential zu transformiren, wenn $U-Vy$ in Bezug auf $x$ von der Ordnung $2m+1$ ist, ist die, dass Disct. $(U-Vy)$ eine vollständige $m^{te}$ Potenz, und dass diejenigen Formen $U-Vy$, welche einen quadratischen Factor haben, $m$ quadratische Factoren besitzen. Ist dem so, so wird das Differential

$$\frac{dy}{\sqrt[2m]{\text{Disct.}(U-Vy)}}$$

durch die gegebene Substitution übergeführt in $\frac{dx}{\sqrt{X}}$, wo $X$ das Product aus vier Factoren ersten Grades ist".

M.

---

M. Simon. Ganzzahlige Multiplication der elliptischen Functionen in Verbindung mit dem Schliessungsproblem. Borchardt J. LXXXI. 301-323.

Abgesehen von einzelnen Vereinfachungen, ein Abdruck der Programm-Abhandlung, über welche F. d. M. VII. 285 referirt worden ist.

M.

---

Joubert. Sur les équations, qui se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques. Paris, Gauthier-Villars.

---

A. Cayley. Correction of two numerical errors in Sohncke's paper respecting modular equations. Borchardt J. LXXXI. 229.

In Sohncke's Arbeit Crelle J. XVI. p. 113 und p. 115 muss es in den Ausdrücken für $u^{8}$ und $u^{18}$ heissen:

$$+\,13569463\,q^{18},\ \text{resp.}\ +\,80177033781\,q^{18}.$$

M.

---

M. Krause. Ueber die Discriminante der Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Clebsch Ann. IX. 554-572.

Fortsetzung der Untersuchungen in Clebsch Ann. VIII. 539, über welche F. d. M. VII. 284 berichtet worden ist. In der früheren Arbeit war bei der Aufstellung der Bedingungen für die Coefficienten der Gleichung

$$(1) \qquad P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0,$$

damit für $\varphi(\tau)$ zwei Wurzeln der Modulargleichung einander gleich werden, der Fall ausgeschlossen, dass $P$, $Q$, $R$ einen gemeinsamen Theiler haben, der zugleich Theiler von $n$ ist. Jetzt wird diese Beschränkung aufgehoben. Auch in diesem Falle sind die aufgestellten nothwendigen Bedingungen die hinreichenden. Die gefundenen Sätze, welche denen von Hermite (C. R. 1859, t. XLIX) für eine Primzahltransformation aufgestellten ganz analog sind, gestatten nun, sämmtliche Gleichungen (1) aufzustellen, deren Lösungen die Argumente der von einander verschiedenen Wurzeln $u = \varphi(\tau)$ der Discriminante

$$D = u^N(u^8-1)^{N_1}\ (a_0 + a_1u^8 + \cdots + a_\nu u^{8\nu}) = 0$$

sind. Hieran schliesst sich die Aufgabe, zu bestimmen, eine wievielfache Wurzel der Discriminante eine jede zu einer beliebigen der aufgestellten Gleichungen (1) gehörende Function $\varphi(\tau)$ ist. Nachdem dies geschehen, wird die von Hermite aufgestellte Tabelle der den Primzahlen $n = 5$ bis 29 zugehörigen Gleichungen für die weitere Primzahl 31 und für die zusammengesetzten Zahlen 15, 21, 33, 35 ergänzt. M.

---

L. Kronecker. Mittheilung. Berl. Monatsber. 1876. 242.

Notiz darüber, wieweit Herr Sylow bereits vor Herrn Kronecker die Frage nach dem Affecte der Theilungsgleichungen behandelt hatte. (Siehe F. d. M. VII. 288). M.

---

L. Kiepert. Ueber Curven, deren Bogen ein elliptisches Integral erster Gattung ist. Freiburg. Ber. VII. 1-17.

Es wird eine Schaar nicht algebraischer Curven betrachtet, deren Bogen sich als elliptische Integrale erster Gattung dar-

stellen lassen, und deren Gleichung die Form hat

$$4 \cos x = (e^c - e^{-c})(e_y - e^{-y}).$$

Zu jedem Werthe des Moduls $k = \frac{2}{e^c + e^{-c}}$ gehört eine bestimmte Curve. Ihre Gesammtheit, $c = \pm\infty \dots 0$ oder $k = 0 \dots 1$, bedeckt eine Fläche, deren Gleichung aus der obigen entsteht, wenn man $y$ für $c$ setzt. Die Krümmung der Curven ist in allen Punkten, welche dieselbe Abscisse resp. Ordinate haben, dem Modul $k$ resp. $k'$ proportional. Die Fläche ist eine Minimalfläche. Aus ihr lässt sich wieder eine Schaar von Flächen bilden, auf denen je zwei Schaaren von Curven liegen, deren Bogen ein elliptisches Integral erster Gattung ist. Auch die Bogen der Krümmungslinien sind elliptische Integrale erster Gattung. Endlich untersucht der Herr Verfasser die sogenannte Ossian Bonnet'sche Biegungsfläche der obigen Minimalfläche; auch sie ist eine Minimalfläche. Die hier behandelten Minimalflächen dienen nicht nur dazu, den Verlauf der elliptischen Integrale erster Gattung darzustellen, sondern bieten auch vielfache Anwendungen vom Additions- und Multiplicationstheorem der elliptischen Functionen.

M.

---

H. Gyldén. Extrait d'une lettre à M. Hermite, relative à l'application des fonctions elliptiques à la théorie des perturbations. Liouville J. (3) II. 411-419.

Die Note betrifft die praktische Verwerthung der in der früheren Arbeit „Sur le développement de la fonction perturbatrice etc." (C. R. LXXX. 1070; siehe F. d. M. VII, 283) gegebenen Formel (5) für $T'_1$, worin für das Argument des Factors

$$\{1 + (\Phi) \cos [2x + (\Delta)]\}$$

nicht das elliptische Integral, sondern ein Grenzwerth zu nehmen ist, so dass an die Stelle der Gleichung (5) folgende tritt:

$$\frac{T_1}{m'_0} = \frac{(1 - k_1 \Phi_1 \cos \Delta)(1 - k_2 \Phi_2 \cos \Delta_1) \dots}{(1 - k_1)(1 - k_2) \dots} \cdot \frac{1 - (x)}{1 - (x) \cos 2(u)} \{1 + (\Phi) \cos [2(u) + (\Delta)]\},$$

deren negative und gebrochene Exponenten sich leicht nach dem Argument ($u$) entwickeln lassen, wonach man wieder durch eine sehr einfache Operation das Argument $x$ an Stelle von ($u$) einführen kann. ($x$) ist die Grenze der Grössen $x_2$, $x_3$...

M.

---

J. Thomae. Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden. Halle a. S. L. Nebert.

Nach der Methode Jacobi's, der auf der Theorie der Thetafunctionen die Theorie der elliptischen Functionen aufgebaut hatte, wurden die nächst höheren Transcendenten, die ultraelliptischen Functionen zunächst behandelt in den beiden Werken von Göpel: „Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis", Crelle J. XXXV. 277—312, und von Rosenhain: „Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultraelliptiques de la première classe", Mém. prés. (Sav. étrangers) XI. 361—468, Paris 1851. Die Theorie der allgemeineren „Abel'schen" Functionen wurde dann weiter entwickelt durch die Arbeiten von Weierstrass, Riemann, Hermite u. A. Die meisten dieser Arbeiten verfolgen rein theoretische Ziele; für die practische Anwendung, selbst der ersten Klasse der ultraelliptischen Functionen, ist bis jetzt sehr wenig geschehen. Zu erwähnen ist eine Arbeit von Weierstrass (Berl. Monatsber. 1861 p. 986—997) über die kürzeste Linie auf dem dreiachsigen Ellipsoid; die Coordinaten der geodätischen Linie sind durch Rosenhain'sche Functionen, die Länge der Linie durch ein einfaches Integral zweiter Gattung, mithin durch die Differentialquotienten einer $\vartheta$-Function ausgedrückt. Leider ist der versprochene zweite Theil dieser Arbeit nicht veröffentlicht. An einer Zusammenstellung von Formeln für die Anwendung der ersten Klasse der ultraelliptischen Functionen fehlte es bis jetzt ganz. Diese Lücke auszufüllen und zu zahlreicheren Anwendungen der Rosenhain'schen Functionen zu ermuthigen, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit. Der Herr Verfasser beginnt mit einer

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen Functionen gebraucht werden, da ja gewöhnlich in den Rechnungen, die auf ultraelliptische Functionen führen, auch elliptische Functionen auftreten. Auf die zur Definition der elliptischen Integrale erster Gattung, der elliptischen Functionen und der Thetafunctionen $\Theta_g^h(u)$ $(g, h = 0, 1)$ dienenden Gleichungen folgen die Formeln zur Berechnung der Integrale erster Gattung und ihrer Constanten. Daran schliessen sich die Differentialgleichungen für die elliptischen Functionen und Werthe dieser Functionen für specielle Argumente. Es folgen Formeln für die Periodicität und Transformation der elliptischen Functionen sowie für Addition und Subtraction der Argumente. Die folgenden Formeln 55)—68) betreffen die elliptischen Integrale zweiter Gattung und die $Z$-Function und die Differentialquotienten der übrigen Thetafunctionen. Den Schluss (69—87) bildet die Function $\Pi(u, v, k)$ und die Darstellung häufig vorkommender Integrale durch die Thetafunction.

Der zweite Abschnitt: „Formeln, welche bei Anwendung der Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden", beginnt mit der Beschreibung und Zerlegung einer Riemann'schen Fläche mit 6 Verzweigungspunkten. Dann folgen Formeln für die Integrale erster Gattung

$$w_1(\psi, s) = \int \frac{dx}{s}, \quad w_2(x, s) = \int \frac{x\,dx}{s},$$

$$(s = \sqrt{(x-k_1)(x-k_2)\ldots(x-k_6)}),$$

und ihre Periodicitätsmoduln. Darauf die Definition der Thetafunctionen mit zwei veränderlichen Argumenten, $\vartheta_{g_1\, g_2}^{h_1\, h_2}(v_1, v_2)$, und ihre Periodicität. Daran schliesst sich die Umkehrung der Integrale erster Gattung. Die Ausdrücke der Quotienten je zweier der 15 nicht identisch verschwindenden $\vartheta$-Functionen werden in Form einer Proportion zusammengefasst, in der die achten Potenzen genommen sind, um die genaue Bestimmung der Wurzelzeichen zu vermeiden. Das Additionstheorem der Rosenhain'schen Functionen wird ebenfalls in Form einer Proportion geschrieben, unter Einführung einiger Abkürzungen. Die folgenden Formeln

dienen der Berechnung der Periodicitätsmoduln und der Integrale erster Gattung. Dann folgt die Darstellung der Integrale zweiter Gattung durch die $\vartheta$-Functionen, die Darstellung ihrer Periodicitätsmoduln; auf die Darstellung der Periodicitätsmoduln für die Integrale dritter Gattung wird hier Verzicht geleistet. Die Determinanten der partiellen Differentialquotienten der ungraden $\vartheta$-Functionen werden für verschwindende Argumente durch $\vartheta$-Functionen selbst dargestellt. Den Schluss bilden Transformationsformeln für die $\vartheta$-Functionen und Einiges über die Wahl des Schnittnetzes oder der Periodicitätsmoduln für reelle $k$. Als Anhang gibt der Herr Verfasser die Herleitung der Formeln zur Berechnung der Integrale erster Gattung, die Abbildung der Riemann'schen Fläche durch ein Integral erster Gattung, Kriterien für die Convergenz der mehrfach unendlichen Theta-Reihen, und den Grenzwerth der Constanten der Rosenhain'schen Functionen für den Fall, wo Verzweigungspunkte aufeinander fallen.

Der zweite Theil enthält „Anwendungen der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen". Die beiden ersten Beispiele, „die Bewegung eines schweren Punktes auf einem Kreise", und „die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Parabel" führen auf elliptische Functionen. Am instructivsten für die Anwendung der gegebenen Formeln ist das dritte durchgeführte Beispiel, „die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Ellipse, deren Axen horizontal-vertikal sind", zu dessen Lösung Rosenhain'sche Functionen erforderlich sind. Hier wird ein numerisches Beispiel gegeben. M.

---

Ch. Hermite. Sur un exemple de réduction d'intégrales abéliennes aux fonctions elliptiques. Ann. Soc. scient. Brux. I. B. 1-16.

1) In einer Note im 8. Bande von Crelle's J. p. 416 ist Jacobi durch Verallgemeinerung eines von Legendre gewonnenen Resultates dazu gelangt, durch eine ebensolche Substitution 2 hyperelliptische mit einander combinirte Integrale erster Art auf 2 elliptische Integrale erster Art und von verschiedenem Modul zurück-

zuführen. Er hat daraus den Werth des reellen und des imaginären Theils eines elliptischen Integrals erster Art mit imaginärem Modul hergeleitet. Herr Hermite hat ein zweites Beispiel einer analogen Reduction gefunden. Es sei:

$$ax = 4z^3 - 3az, \quad 3y(z^2-a) = 2z^3 - b, \quad S^2 = (z^2-a)(8z^3-6az+b).$$

Man findet

$$\int \frac{dz}{S} = \tfrac{1}{3} \int \frac{dx}{(2ax-b)(x^2-a)},$$

$$\int \frac{z\,dz}{S} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int \frac{dy}{\sqrt{y^3-3ay-b}}.$$

Man wird so durch Induction auf die Vermuthung gebracht, dass es für die Abel'schen Functionen vom Geschlecht $p$ Reductionen auf elliptische Integrale giebt, in denen die $p$ Functionen erster Art mit Hülfe von $p$ Substitutionen durch ebenso viel verschiedene elliptische Integrale ausgedrückt werden. Diese Bemerkung und die Beispiele, die dazu geführt haben, zeigen, neben den schönen Entdeckungen von Clebsch, einen neuen Weg zur Untersuchung algebraischer, auf elliptische Integrale reducirbarer Differentiale.

2) Herr Hermite greift diese schwierige Frage nicht an, sondern behandelt eine einfachere, die eine Verallgmeinerung der oben citirten Untersuchungen von Jacobi ist. Es sei

$$k = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{c}, \quad l = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{c}, \quad c^2 = (1+az)(1+bz),$$

$$x = \frac{c^2 z}{(1+az)(1+bz)}, \quad R(z) = z(1-z)(1-abz)(1+az)(1+bz),$$

$$\varDelta^2(x,k) = x(1-x)(1-k^2x), \quad \varDelta^2(y,l) = y(1-y)(1-l^2y).$$

Man findet

$$\frac{dx}{\varDelta(x,k)} = \frac{c\,dz}{\sqrt{R(z)}}(1+\sqrt{ab}\,z), \quad \frac{dx}{\varDelta(x,l)} = \frac{c\,dx}{\sqrt{R(z)}}(1-\sqrt{ab}\,z).$$

Der Verfasser will nun zuerst die Summe

$$\int \frac{f(X)\,dX}{\sqrt{R(X)}} + \int \frac{f(Y)\,dY}{\sqrt{R(Y)}}$$

auf elliptische Functionen reduciren. Dabei ist $f(x)$ eine rationale Function, $X$ und $Y$ Functionen von $x$ und von $y$, nämlich die Wurzeln

der in $z$ quadratischen Gleichung

$$\frac{F^2(z)-R(z)}{\Phi(z,x)\ \Phi(z,y)}=0,$$

wo

$$\Phi(z,x)=x(1+az)(1+bz)-c^2z,$$

$F(z)$ eine solche Function vom dritten Grade, dass die Division möglich ist.

3) Setzt man zuerst voraus, dass

$$f(u)\,(u-g)=1,$$

wo $g$ unbestimmt, und

$$(x_0,\, x_1)(y_0,\, y_1)$$

die Wurzeln von

$$\Phi(z,x)=0,\quad \Phi(z,y)=0,$$

so giebt das Abel'sche Theorem

$$\frac{1}{\sqrt{R(y)}}\log\frac{F(y)+\sqrt{R(y)}}{F(y)-\sqrt{R(y)}}$$
$$=I(x_0)+I(x_1)+I(y_0)+I(y_1)+I(X)+I(Y),$$

wo

$$I(u)=\int\frac{du}{(u-y)\sqrt{R(u)}}\,.$$

Herr Hermite beweist, dass sich die Summen

$$I(x_0)+I(x_1),\quad I(y_0)+I(y_1)$$

reduciren auf die elliptischen Integrale

$$\int\frac{dx}{\Delta(x,k)},\quad \int\frac{dx}{(x-h)\,\Delta(x,k)};$$
$$\int\frac{dy}{\Delta(y,l)},\quad \int\frac{dy}{(y-h)\,\Delta(y,l)};$$

wo $h$ mit $g$ verbunden ist durch die Relation $h(1+ag)(1+bg)=c^2g$. Der Satz wird bewiesen, wenn $f(u)(u-g)=1$, und folglich wegen der Eigenschaften rationaler Brüche für $f(u)$ gleich einem beliebigen rationalen Bruch ohne ganzen Theil.

4) Wenn $f(u)$ einen ganzen Theil enthält, so enthalten die zu reducirenden Abel'schen Integrale die Summen

$$\int\frac{dX}{\sqrt{R(X)}}+\int\frac{dY}{\sqrt{R(Y)}},\quad \int\frac{XdX}{\sqrt{R(X)}}+\int\frac{YdY}{\sqrt{R(Y)}},$$

deren Werthe man findet, indem man in den für $f(u)(u-g)=1$

gefundenen Reductionsformeln die Coefficienten von $g^{-1}$ und $g^{-2}$ gleich macht, wenn die beiden Glieder in eine Reihe entwickelt sind. Das letzte gelöste Problem ist: Man kann die inversen Functionen der Abel'schen Integrale finden. Indem man setzt:

$$\int \frac{c(1+\sqrt{ab}X)\,dX}{2\sqrt{R(X)}} = \varphi(X), \quad \int \frac{c(1-\sqrt{ab}X)\,dX}{2\sqrt{R(X)}} = \chi(x),$$

wird

$$\varphi(X)+\varphi(Y) = u = -\int \frac{dx}{\Delta(x,k)},$$

$$\chi(X)+\chi(Y) = v = -\int \frac{dy}{\Delta(y,l)}.$$

$X$ und $Y$ sind algebraische Functionen von $x$ und $y$; $x$ und $y$ algebraische Functionen von sin am $(x, k)$, sin am $(y, l)$. Das Resultat ist von Interesse für die wirkliche Berechnung der Werthe von $X$ und $Y$ oder vielmehr der Combinationen dieser Functionen, die von Herrn Weierstrass mit $al(u, v)_\alpha$ bezeichnet sind, wo $\alpha$ ein einziger Index ist. Mit dieser Berechnung schliesst Herr Hermite seine Abhandlung. Er bemerkt schliesslich, dass die gefundenen Formeln den Weg zu weiteren Untersuchungen eröffnen, auf die er zurückzukommen hofft. Mn. (O.)

---

A. Martin. Reduction of some integrals to elliptic forms. Messenger (2) VI 28-29.

Fortsetzung der Arbeit Messenger (2) IV. 179—180, 1875; siehe F. d. M. VII p. 274. Glr. (O.)

---

G. Janni. Studii di analisi superiore. Battaglini G. XIV. 321-347.

Eine Darstellung der Theorie der Verzweigungspunkte, der Unstetigkeitspunkte und der Cyklen der Integrale erster und zweiter Gattung, und Herleitung der Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der Abel'schen Integrale erster Gattung, nach Briot und Bouquet, Schlömilch und Clebsch und Gordan.

M.

---

Göran Dillner. Entwickelung von Formeln zum Abel'schen Theoreme. Gött. Nachr. 1876, 29-50.

Zweck der vorliegenden Abhandlung ist, die von Abel (Précis d'une théorie des fonctions elliptiques; Oeuvres I. 335) angewendete Methode zur Aufstellung des Additionstheoremes auf beliebige Wurzelausdrücke zu verallgemeinern. Die gewonnenen Resultate bilden zwar in theoretischer Hinsicht nur einen speciellen Fall des grossen Theorems, das Abel in seiner Pariser Abhandlung behandelt hat, verdienen aber wegen der ausgeführten Formeln Beachtung. Bezeichnen $\sigma$, $s$, $m$, $n$, $\mu$, $\nu$ beliebige ganze positive Zahlen mit der Bedingung $\sigma s \geqq 2$, und ist

$$\chi(z) = \sum_m a_m z^{m\sigma}, \qquad \vartheta(z) = \sum_\tau b_\tau z^{\sigma\tau}$$

(wo die $a$ und $b$ constant),

$$\varphi(z) = z.\sum_\mu \alpha_\mu z^{\mu\sigma}, \quad \lambda(z) = \sum_\nu \beta_\nu z^{\nu\sigma}$$

(wo $\alpha, \beta$ veränderliche Parameter),

so ist:

$$\sum_{r=1}^{r=g} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=s} \int_{z_0}^{z_r^{(\varrho-1)}} \frac{\eta^{\varrho-1}\vartheta(z).dz}{\left[1-\left(\frac{z}{a}\right)^\sigma\right]\cdot\chi(z)^{\frac{n}{\sigma s}}}$$

$$= \text{Const.} - \frac{a\vartheta(x)}{\sigma.\chi(a)^{\frac{n}{\sigma s}}}\cdot\sum_{r=1}^{r=\sigma s}\eta^{r-1}.\log\left[\chi(a)^{\frac{n}{\sigma s}}\cdot\lambda(a)-\eta^{r-1}\cdot\varphi(a)\right],$$

wo die Parameter $\alpha$, $\beta$ als Functionen der oberen Grenzen der Integrale vermittelst der Systeme

$$\left.\begin{array}{l}\chi(z_g)^{\frac{n}{\sigma s}}.\lambda(z_g) = \varphi(z_g)\\ \chi(z_g')^{\frac{n}{\sigma s}}\cdot\lambda(z_g') = \eta.\varphi(z_g')\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \chi(z_g^{(\sigma-1)})^{\frac{n}{\sigma s}}.\lambda(z_g^{(s-1)}) = \eta^{s-1}\cdot\varphi(z_g^{s-1})\end{array}\right\}\left(g = 1, 2\ldots g,\ \eta = e^{\frac{2\pi i}{\sigma s}}\right)$$

und der Gleichung

$$F(z) = A(z^\sigma - z_1^\sigma)(z^\sigma - z_2^\sigma)\ldots(z^\sigma - z_k^\sigma)$$

auszudrücken sind. Hier sind noch 5 besondere Fälle zu betrachten, in deren vier $a = \infty$ und in einem $a$ eine Wurzel der

Gleichung $\chi(z) = 0$. Als besondere Beispiele werden Integrale von dem Typus

$$J^{\tau,1}_{2,2.1}\; J(z) \quad \text{und} \quad J^{\tau,1}_{m,1.2}\; J(z)$$

betrachtet, wo die Bezeichnung

$$u = \int_{z_0}^{z} \frac{\vartheta(z)\,dz}{\left[1-\left(\frac{z}{a}\right)^{\sigma}\right]\chi(z)^{\frac{n}{\sigma s}}} = J^{\tau,n}_{m,\sigma.s\atop a}\; J(z)$$

gemäss der von Abel für das elliptische Integral dritter Gattung gebrauchten (siehe Oeuvres I. 326) eingeführt ist. M.

---

L. Königsberger. Ueber die Entwicklung der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in Reihen. Clebsch Ann. IX. 487-503.

Herr Hermite hat (Sur le développement en série des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce, Brioschi Ann. (2) II.) gezeigt, dass wenn

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \Sigma\, \alpha_n x^{2n+1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \Sigma\, \beta_n x^{2n+1},$$

zwischen den Coefficienten $\alpha_n$, $\beta_n$ und den Coefficienten $A$, $B$ in der Reductionsformel

$$\int_0^x \frac{(k^2x^2)^{n+1}\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = P\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$
$$-A\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + B\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

die Relationen

$$A = \beta_n, \quad B = \alpha_n$$

bestehen. Herr Königsberger bemerkt, ohne dies weiter auszuführen, dass die Richtigkeit dieses Satzes sofort erhellt, wenn man die elliptischen Integrale in der von Herrn Weierstrass aufgestellten Form nimmt, indem man die Entwickelung um den

unendlich entfernten Punkt in die Entwickelung um den Nullpunkt überträgt und die Beziehung

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \frac{1}{x}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

berücksichtigt. Dass dieser Weg der naturgemässe zur Auffindung der obigen Relation ist, ergiebt sich aus dem ähnlichen Resultat, das Herr Königsberger für die hyperelliptischen Integrale herleitet. Die analogen Relationen lauten:

$$\int\Big(\frac{2p-r-1}{2}B_{r-1}u^{p-1} + \frac{2p-r-2}{2}B_{r-2}u^{p-2} + \cdots + \frac{2p-2r}{2}B_0u^{p-r} + \frac{2p-2r-1}{2}Au^{p-r-1}\Big)\frac{du}{\sqrt{R_1(u)}}$$
$$= (u^{p-r-1} + M_0u^{p-r} + \cdots + M_{r-1}u^{p-1})\sqrt{R_1(u)} + \sqrt{R_1(u)}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty} l^{(r)}_{2p+\nu}\,u^{p+\nu}, \quad (r = 0, 1, 2, \ldots p-1),$$

und

$$\int_0\Big((r-2p+\tfrac{1}{2})B_{2p-1}u^{3p-r-1} + (r-2p+1)B_{2p-2}u^{3p-r-2} + \cdots + \frac{2p-r}{2}B_ru^p\Big)\frac{du}{\sqrt{R_1(u)}}$$
$$= (N_0u^{p-r} + N_1u^{p-r+1} + \cdots + N_{r-1}u^{p-1})\sqrt{R_1(u)} + \sqrt{R_1(u)}\sum_{\nu=0}^{\infty} k^{(r)}_{2p+\nu}u^{p+\nu}, \quad (r = p, p+1, \ldots 2p-1),$$

wo

$$R(z) = Az^{2p+1} + B_0z^{2p} + B_1z^{2p-1} + \cdots + B_{2p-1}z,$$

und, für $\frac{1}{z} = u$,

$$R_1(u) = B_{2p-1}u^{2p+1} + B_{2p-2}u^{2p} + \cdots + B_1u^3 + B_0u^2 + Au,$$

und $l^{(r)}_n$, $k^{(r)}_n$ die Coefficienten der Integrale zweiter und erster Gattung

$$-\left[\frac{t^n}{\sqrt{R(t)}}\int_x \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}$$

sind. M.

A. PRINGSHEIM. Zur Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Clebsch Ann. IX. 445-475.

Herr Königsberger hat (Borchardt J. LXVII. 57) die Theorie der Transformation zweiten Grades für die Abel'schen Transcendenten erster Ordnung in ihrer Allgemeinheit entwickelt, indem er die Ausdrücke der transformirten $\vartheta$-Functionen, also auch die algebraischen Beziehungen zwischen den Grenzen der Abel'schen Integrale in der einfachsten Gestalt herstellte und sodann die transformirten Integralmoduln als Functionen der ursprünglichen ausgedrückt erhielt. Es ergaben sich zwei Hauptgattungen von Transformationen, für welche sich das transformirte $\vartheta$ entweder als Summe von 4 mit Constanten multiplicirten Thetaquadraten des ursprünglichen Systems, oder durch eine Summe von zwei Thetaproducten darstellen liess. Diese Theorie wandte Herr Königsberger auf die Untersuchung der Abel'schen Integrale erster Ordnung an, die durch eine Transformation zweiten Grades auf elliptische reducirbar sind. Es ergab sich das Resultat, dass das Jacobi'sche Integral

$$(A) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)(1-\lambda^2x)(1-k^2\lambda^2x)}}$$

sowie die aus diesem durch lineare Transformation hervorgehenden Integrale die einzigen Abel'schen Integrale erster Ordnung sind, die sich durch eine Transformation zweiten Grades auf elliptische reduciren lassen.

In vorliegender Arbeit betrachtet Herr Pringsheim die aus der ersten der obigen Hauptgattungen von Transformationen hervorgehenden Gleichungen

$$e^{f(v_1,v_2)\pi i}\,\vartheta_\lambda(v_1',v_2') = (\alpha)\,\vartheta_\alpha^2(v_1,v_2)+(\beta)\,\vartheta_\beta^2(v_1,v_2) + (\gamma)\,\vartheta_\gamma^2(v_1,v_2)+(\delta)\,\vartheta_\delta^2(v_1,v_2)$$

eingehender und gelangt zu dem für alle Transformationen zweiten Grades gültigen Satze, „dass sich bei jeder Transformation zweiten Grades für die hyperelliptischen Functionen erster Ordnung aus dem Ausdrucke für eine transformirte Thetafunction 3, und immer nur 3, weitere transformirte Thetafunctionen durch Sub-

stitution von halben Perioden ableiten lassen". Dieser Satz gilt auch für Transformationen von beliebigem paaren Grade, wenn nur diejenigen Transformationen ausgeschlossen werden, bei denen alle Transformationszahlen durch 2 oder eine Potenz von 2 theilbar sind.

Im Folgenden leitet der Herr Verfasser aus der obigen Form der Transformations-Gleichungen eine Reihe von linearen homogenen Relationen zwischen gewissen Combinationen von vier Thetaquadraten her. Diese Relationen, deren es im Ganzen 96 giebt, sind den von Rosenhain (Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, p. 425) erwähnten äquivalent.

Endlich kehrt Herr Pringsheim zur Transformation zweiten Grades zurück, und zwar betrachtet er den speciellen Fall, in welchem die transformirte hyperelliptische Thetafunction sich als ein Product zweier elliptischer $\vartheta$-Functionen ergiebt, so dass also:

$$\vartheta_\lambda(v', v'_2, \tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22}) = \vartheta_{\lambda_1}(v'_1, \tau'_{11}) . \vartheta_{\lambda_2}(v'_2 \tau'_{22}).$$

Dieser Fall liefert demnach die von Jacobi (Crelle J. VIII.) auf rein algebraischem Wege hergestellte Reduction gewisser hyperelliptischer Integrale auf elliptische. Hier wird die Reduction einer Summe von zwei hyperelliptischen Integralen von der Form ($A$) in den Grenzen resp. $0 \dots x_1$, $1 \dots x_2$, auf je eine Summe von zwei elliptischen Integralen von der Form

$$A\int_0^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-c^2y^2)}} + B\int_0^{y} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}$$

bewirkt. Der Jacobi'sche Fall geht aus diesem hervor, wenn man $x_2 = 1$ setzt. M.

---

L. Königsberger. Ueber die allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen. Borchardt J. LXXXI. 193-216.

Das allgemeine hyperelliptische Integral erster Gattung, das für keinen Punkt der zur Irrationalität

$$\sqrt{R(z)} = \sqrt{A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_{2p+1})}$$

gehörigen Riemann'schen Fläche unendlich wird, hat die Form:

$$J(z) = \int_{z_0} \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{p-1} z^{p-1}}{\sqrt{R(z)}} dz;$$

dasjenige zweiter Gattung, welches nur in einem Punkte der Riemann'schen Fläche algebraisch unendlich von der ersten Ordnung wird, ist von der Form:

$$E(z) = M \int_0 \left[ \frac{1}{(z-z_1)^2} + \frac{\frac{R'(z_1)}{2\varepsilon_1 \sqrt{R(z_1)}}(z-z_1) + \varepsilon_1 \sqrt{R(z_1)}}{(z-z_1)^2 \sqrt{R(z)}} \right] dz + J(z) \qquad (\varepsilon_1 = \pm 1);$$

und das hyperelliptische Integral dritter Gattung, welches für zwei beliebig gewählte Punkte $z_1$, $z_2$ logarithmisch unendlich wird, so dass die Coefficienten der logarithmischen Entwickelungen $A\log(z-z_1)$, $B\log(z-z_2)$ durch die Relation $A + B = 0$ verbunden sind, hat die Form:

$$\Pi(z) = M \int \left[ \frac{\sqrt{R(z)} + \varepsilon_1 \sqrt{R(z_1)}}{z - z_1} - \frac{\sqrt{R(z)} + \varepsilon_2 \sqrt{R(z_2)}}{z - z_2} \right] \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + J(z).$$

Letzteres heisst „Hauptintegral dritter Gattung“, wenn $M = \frac{z_1 - z_2}{2}$.

Das allgemeine hyperelliptische Integral zweiter Gattung lässt sich, abgesehen von einem Integrale erster Gattung, als das Product aus einer Constanten und den nach $z_1$ genommenen Differentialquotienten eines hyperelliptischen Haupt-Integrales dritter Gattung darstellen, dessen zweiter logarithmischer Unstetigkeitspunkt ein ganz willkürlicher ist. Analog dem Beweise des Dirichlet'schen Princips für die den elliptischen Functionen entsprechende Riemann'sche Fläche (siehe des Verfassers Vorlesungen über elliptische Functionen), lässt sich hier zeigen, dass es stets ein zu einer bestimmten doppelblättrigen Riemann'schen Fläche mit $2p+1$ Verzweigungspunkten gehöriges, von dem willkürlichen, aber bestimmten Werthe $z_0$ ausgehendes hyperelliptisches Integral giebt, und nur ein solches, welches in 2 beliebig gewählten Punkten

Unstetigkeiten der Form hat

$$A_\alpha \log(z-z_\alpha)+B_\alpha(z-z_\alpha)^{-1}+C_\alpha(z-z_\alpha)^{-2}+\cdots$$
$$+K_\alpha(z-z_\alpha)^{-k_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2 \dots \nu),$$

für welches $A_1+A_2+\cdots+A_\nu = 0$ augenommen wird, und für welches ferner die reellen Theile der Periodicitätsmoduln an den $2p$ Querschnitten der in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelten Riemann'schen Fläche für $\sqrt{R(z)}$, oder $p$ dieser Periodicitätsmoduln selbst (entweder an allen $a_k$ oder an allen $b_k$ Querschnitten) gegebene Werthe haben; und dieses hyperelliptische Integral ist die einzige Function überhaupt, welche diesen Bedingungen genügt.

Nachdem Herr Königsberger diese Hauptresultate recapitulirt, wird die Reduction des allgemeinen hyperelliptischen Integrales auf die drei Gattungen mit Hülfe der von Herrn Weierstrass für elliptische Integrale angewandten Bezeichnungen hergestellt. Hierauf wird aus der früheren Arbeit des Verfassers über die allgemeinste Relation zwischen den Periodicitätsmoduln zweier hyperelliptischen Integrale derselben Ordnung (Gött. Nachr. 1875, p. 327; siehe F. d. M. VII. 289) der specielle Fall hervorgehoben für solche Hauptintegrale dritter Gattung, deren Periodicitätsmoduln an einem gesammten Querschnittssystem verschwinden. Endlich wird das Abel'sche Theorem in der Form gegeben, dass das allgemeine hyperelliptische Integral sich aus einer Summe von solchen Integralen zusammensetzt, die nur in zwei Punkten logarithmisch unendlich werden.

Nach diesen Vorbereitungen schreitet Herr Königsberger zur Untersuchung der allgemeinen Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen und zur Reduction des algebraischen Transformationsproblems auf das rationale. Es werden nun allgemein die Bedingungen dafür untersucht, dass für eine additive Verbindung gleichartiger und ungleichartiger hyperelliptischer Integrale verschiedener Ordnung, elliptischer Integrale, algebraischer Functionen der Integralgrenzen und Logarithmen von algebraischen Functionen dieser Grössen algebraische Beziehungen zwischen den Grenzen der Integrale bestehen. Als Resultat ergiebt sich, dass das allgemeine Transformationsproblem auf die

Differentialgleichungen führt:

$$\frac{dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}+\frac{dz_2}{\sqrt{R(z_2)}}+\cdots+\frac{dz_p}{\sqrt{R(z_p)}}$$
$$=\frac{f_0(Y_1)\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}}+\frac{f_0(Y_2)\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}}+\cdots+\frac{f_0(Y_\sigma)\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}},$$

$$\frac{z_1\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}+\frac{z_2\,dz_2}{\sqrt{R(z_2)}}+\cdots+\frac{z_p\,dz_p}{\sqrt{R(z_p)}}$$
$$=\frac{f_1(Y_1)\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}}+\frac{f_1(Y_2)\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}}+\cdots+\frac{f_1(Y_\sigma)\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{z_1^{p-1}\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}+\frac{z_2^{p-1}\,dz_2}{\sqrt{R(z_2)}}+\cdots+\frac{z_p^{p-1}\,dz_p}{\sqrt{R(z_p)}}$$
$$=\frac{f_{p-1}(Y_1)\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}}+\frac{f_{p-1}(Y_2)\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}}+\cdots+\frac{f_{p-1}(Y_\sigma)\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}},$$

in welchen $Y_1, Y_2, \dots Y_\sigma$ die Lösungen einer Gleichung $\sigma^{\text{ten}}$ Grades sein sollen, deren Coefficienten rational aus

$$z_1, z_2, \dots z_p,\ \sqrt{R(z_1)},\ \sqrt{R(z_2)}, \dots \sqrt{R(z_p)},$$

zusammengesetzt sind, während die zugehörigen Irrationalitäten mit Hülfe eben dieser Grössen rational mit den resp. $Y$ zusammenhängen.

Hierauf kehrt Herr Königsberger zu dem ursprünglichen allgemeinen Transformationsproblem zurück, um die allgemeinste Beziehung zwischen hyperelliptischen Integralen derselben Irrationalität herzustellen. Das Resultat ist eine Verallgemeinerung der von Abel für die elliptischen Functionen gegebenen allgemeinsten Beziehung und hat die Form:

$$m_1\int_{\xi_1}^{z_1}\frac{\pm\sqrt{R(a_1)}\,dz}{(z-a_1)\sqrt{R(z)}}+m_2\int_{\xi_1}^{z_1}\frac{\pm\sqrt{R(a_2)}\,dz}{(z-a_2)\sqrt{R(z)}}+\cdots$$
$$+m_r\int_{\xi_1}^{z_1}\frac{\pm\sqrt{R(a_r)}\,dz}{(z-a_r)\sqrt{R(z)}}+\beta_0\int_{\xi_1}^{z_1}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$+\beta_1\int_{\xi_1}^{z_1}\frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}}+\cdots+\beta_{p-1}\int_{\xi_1}^{z_1}\frac{z^{p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$=\log\left\{\frac{f_\varrho(z_1)-g_\varrho(z_1)\sqrt{R(z_1)}}{f_\varrho(z_1)+g_\varrho(z_1)\sqrt{R(z_1)}}\cdot\frac{f_\varrho(\xi_1)+g_\varrho(\xi_1)\sqrt{R(\xi_1)}}{f_\varrho(\xi_1)-g_\varrho(\xi_1)\sqrt{R(\xi_1)}}\right\},$$

worin $m_1, m_2, \dots m_r$ ganze Zahlen, und $\beta_0, \beta_1, \dots \beta_{\varrho-1}$ Constanten sind. M.

---

H. Weber. Ueber die Transcendenten zweiter und dritter Gattung bei den hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Borchardt J. LXXXII. 131-144.

Jacobi hat die elliptischen Transcendenten zweiter und dritter Gattung als Functionen der elliptischen Integrale erster Gattung dargestellt. Eine analoge Darstellung der Transcendenten zweiter und dritter Gattung wird hier für die hyperelliptischen Integrale erster Ordnung ausgeführt. In seiner allgemeinsten Gestalt, d. h. für die Abel'schen Integrale im Allgemeinen formulirt Herr Weber das betreffende Problem folgendermassen:

„Es sei $s$ eine beliebige algebraische Function von $z$ vom Geschlechte $p$, $\varphi(s, z)$ irgend eine rationale Function von $s$ und $z$, ferner seien

$$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_p; \quad \xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots \xi_p^{(0)}$$

Punkte in der die Verzweigungsart von $s$ darstellenden Riemann'schen Fläche $T$, d. h. Repräsentanten von je $p$ zusammengehörigen Werthepaaren von $s$ und $z$; es soll die Summe

$$\int_{\xi_1^{(0)}}^{\xi_1} \varphi(s,z)\,dz + \int_{\xi_2^{(0)}}^{\xi_2} \varphi(s,z)\,dz + \dots + \int_{\xi_p^{(0)}}^{\xi_p} \varphi(s,z)\,dz$$

dargestellt werden als Function der $p$ unabhängigen Veränderlichen

$$(v_1, v_2, \dots v_p) \equiv \left(\sum_1^p \int_{\xi_i^{(0)}}^{\xi_i} du_1, \ \sum_1^p \int_{\xi_i^{(0)}}^{\xi_i} du_2, \dots \sum_1^p \int_{\xi_i^{(0)}}^{\xi_i} du_p\right),$$

wenn $u_1, u_2, \dots u_p$ von einander unabhängige Integrale erster Gattung sind".

Dieses allgemeine Problem lässt sich reduciren auf die Darstellung eines Integrals dritter Gattung, das ausser von der oberen Grenze und den Moduln noch von einem variabeln Parameter abhängt. Die Schwierigkeit, dass der eine Unstetigkeitspunkt in den Argumenten der darstellenden Thetafunctionen als Grenze eines Integrals erster Gattung auftritt, wird durch Ein-

führung von Integralen mit $p$ von einander unabhängigen Unstetigkeitspunkten vermieden.

Für den Fall $p = 2$, der in vorliegender Arbeit durchgeführt ist, geht das Problem dahin, die Functionen

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\log\vartheta\begin{Bmatrix}g_1\, g_2\\ h_1\, h_2\end{Bmatrix}(u_1, u_2),\qquad \frac{\partial}{\partial u_2}\log\vartheta\begin{Bmatrix}g_1\, g_2\\ h_1\, h_2\end{Bmatrix}(u_1\, u_2),$$

$$\log\frac{\vartheta\begin{Bmatrix}g_1\, g_2\\ h_2\, h_2\end{Bmatrix}(u_1-v_1,\ u_2-v_2)}{\vartheta\begin{Bmatrix}g_1\, g_2\\ h_1\, h_2\end{Bmatrix}(u_1+v_1,\ u_2+v_2)},$$

worin die Thetacharakteristik $\begin{Bmatrix}g_1\, g_2\\ h_1\, h_2\end{Bmatrix}$ ein aus den Zahlen 0,1 irgend wie zusammengesetzter Zahlencomplex, und $u_1$, $u_2$, $v_1$, $v_2$ Integralsummen erster Gattung sind, durch Summen von Integralen zweiter und dritter Gattung auszudrücken. Dies gelingt hauptsächlich mit Hülfe einer Reihe von Relationen zwischen den vollständigen Integralen erster und zweiter Gattung, welche der bekannten Legendre'schen Formel

$$K'E+E'K-KK' = \frac{\pi}{2}$$

für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung ganz analog sind. M.

---

L. Milewski. De abelianarum functionum periodis per aequationes differentiales definiendis. Diss. Berlin.

Die Perioden der Abel'schen Functionen sind bekanntlich vollständige Integrale, doch sind die Integrationswege nur in ganz speciellen Fällen zu finden. Da aber die endlichen Ausdrücke für die Perioden von jenen Integrationswegen ganz unabhängig sind, so ist zu vermuthen, dass es Methoden zur Bestimmung der Perioden giebt, welche ebenfalls unabhängig von den Integrationswegen sind. Eine solche Methode hat Herr Weierstrass gefunden und in einer Vorlesung über hyperelliptische Functionen im J. 1874 vorgetragen. Diese Methode besteht darin, dass die Perioden durch lineare Differentialgleichungen

bestimmt werden. Bei dieser Methode wird angenommen, dass die Werthe der Perioden für irgend ein Modulsystem gegeben sind. Für den Rang $\varrho = 3$ können derartige Gleichungen aufgestellt werden, so dass die betreffenden Integrale erster Gattung auf elliptische zurückgeführt werden, also sich berechnen lassen. Auch für grössere $\varrho$ kann man ähnliche Gleichungen finden, und wahrscheinlich für jedes beliebige $\varrho$. Daher wird sich jede Gleichung irgend eines beliebigen Ranges auf eine Gleichung dieser Art durch Variation der Constanten zurückführen lassen, und die Differentialgleichungen, durch welche die Perioden bestimmt werden, lassen sich allgemein lösen. Auf diese Weise tritt auch die wahre Natur der Perioden in helleres Licht.

Herr Milewski wendet nun diese von Herrn Weierstrass gegebene Methode zur Bestimmung der Perioden durch Differential gleichungen zunächst auf die hyperelliptischen Integrale an. Auf doppeltem Wege gelangt er zu den betreffenden Differentialgleichungen: einmal durch Variation der Moduln $g_1, g_2, \dots g_{2\varrho+1}$ und dann durch Variation der Wurzeln $e_1, e_2 \dots e_{2\varrho+1}$ der Gleichung

$$y^2 = R(x) = \sum_{\lambda=0}^{2\varrho+1} g_{2\varrho+1-\lambda} x^{\lambda}.$$

Beidemal werden die Coefficienten in den Fällen $\varrho = 2$, $\varrho = 3$ wirklich ausgerechnet, und für $\varrho = 1$ werden die auf beiden Wegen gewonnenen Resultate aufeinander zurückgeführt.

Im zweiten Theile der Arbeit wird dann auseinandergesetzt, wie in ganz ähnlicher Weise die Differentialgleichungen für die Perioden der allgemeinen Abel'schen Integrale, in denen $\varrho = 3$ ist, zu bilden sind. Hier wird das Problem soweit durchgeführt, dass nur noch ein System linearer Gleichungen, dessen Determinante nicht verschwindet, aufzulösen bleibt. Die numerische Berechnung ist freilich, solange die Moduln der Gleichung, von welcher ausgegangen wird, ganz allgemein bleiben, nicht ohne grosse Schwierigkeiten. M.

---

H. Weber. Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3. Preisschrift. Berlin. G. Reimer. 4°.

Will man in derselben Weise in die Theorie der allgemeinen Abel'schen Functionen eindringen, wie es von Göpel und Rosenhain für die hyperelliptischen Functionen geschehen ist, so bildet die naturgemässe Grundlage dazu die Theorie der sechsfach periodischen Functionen und der $\vartheta$-Functionen dreier Variabeln. Diese dient denn auch dem Herrn Verfasser als Ausgangspunkt für seine Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3. Nachdem der Begriff der periodischen Functionen von 3 Variabeln festgestellt und der Begriff eines Systems zusammengehöriger Perioden entwickelt ist, wird die Aufgabe gelöst, solche Functionen von 3 Variabeln zu suchen, die 6 von einander unabhängige Periodensysteme haben. Diese 6 Periodensysteme lassen sich auf folgende reduciren:

für die Variable $v_1 : \pi i,\ 0,\ 0,\ a_{11},\ a_{12},\ a_{13}$,
„ „ „ $v_2 : 0,\ \pi i,\ 0,\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23}$,
„ „ „ $v_3 : 0,\ 0,\ \pi i,\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33}$.

Da nun die darzustellende Function nicht für alle endlichen Werthe des Argumentes endlich und stetig sein kann, so hat sie die Bruchform

$$F(v_1,\ v_2,\ v_3) = \frac{\Phi(v_1,\ v_2,\ v_3)}{\Phi_1(v_1,\ v_2,\ v_3)}.$$

Eine weitere Untersuchung der beiden Functionen $\Phi$ ergiebt die Form:

$$(5) \qquad \Phi = \Theta(w_1,\ w_2,\ w_3) = \sum_{h_1, h_2, h_3} B_{h_1, h_2, h_3} \cdot e^{2(h_1 w_1 + h_2 w_2 + h_3 w_3)}$$

und, wenn

$$k_1^{(h)} a_{1i} + k_2^{(h)} a_{2i} + k_3^{(h)} a_{3i} = -\delta b_{hi} \quad (i = 1, 2, 3;\ h = 1, 2, 3),$$

$$(6) \quad \Theta(w_1 + b_{1i},\ w_2 + b_{2i},\ w_3 + b_{3i}) = C_i e^{-2\delta w_i} . \Theta(w_1,\ w_2,\ w_3).$$

Durch die Bedingungen (5) und (6) werden sog. „Thetafunctionen der Ordnung $\delta$" definirt; die Quotienten zweier dieser Thetafunctionen werden „sechsfach periodische Functionen der Ordnung $\delta$" genannt. Es folgt die definitive Darstellung dieser Functionen, indem die Constanten $B$ bestimmt werden. Alle

$\vartheta$-Functionen von der Ordnung $\delta$ sind linear durch $\delta^3$ unter ihnen ausdrückbar, und die allgemeinste Function dieser Art enthält $\delta^3$ willkürliche Constanten linear und homogen. Eine sechsfach periodische Function erster Ordnung giebt es nicht. Alle $\vartheta$-Functionen sind nun durch die eine

$$\vartheta(w_1, w_2, w_3;\, b) = \sum_{n_1, n_2, n_3} e^{\sum\limits_i \sum\limits_k b_{ik} n_i n_k + 2\sum\limits_i n_i w_i}$$

in der Weise ausdrückbar, dass

$$\Theta\begin{pmatrix} w_1, & w_2, & w_3 \\ \nu_1, & \nu_2, & \nu_3 \end{pmatrix} = e^{2\sum\limits_i \nu_i w_i} \cdot \vartheta(u_1, u_2, u_3;\, \delta b).$$

Diese Darstellung erfährt ihren Abschluss durch die Untersuchung der Convergenzbedingung.

Da die einfachsten der sechsfach periodischen Functionen die von der zweiten Ordnung sind, so wird zunächst im folgenden Paragraphen die Bedingung dafür aufgestellt, dass die Function

$$\Psi(u_1, u_2, u_3) = Ce^{2(g_1 u_1 + g_2 u_2 + g_3 u_3)} \cdot \vartheta^2(u_1 + f_1,\; u_2 + f_2,\; u_3 + f_3)$$

eine $\vartheta$-Function zweiter Ordnung ist. Die Quadratwurzeln aus diesen Functionen sind Functionen, die mit der Function $\vartheta$ nahe verwandt sind, und welche deshalb folgendermassen bezeichnet werden:

$$(1)\qquad \vartheta\begin{Bmatrix} g_1 g_2 g_3 \\ h_1 h_2 h_3 \end{Bmatrix}(u_1\, u_2\, u_3)$$
$$= e^{\frac{1}{4}\sum\limits_i \sum\limits_k a_{ik} g_i g_k + \frac{1}{2}\pi i \sum\limits_i g_i h_i + \sum\limits_i g_i u_i}$$
$$\cdot\, \vartheta\left(u_1 + \frac{\varpi_1}{2},\; u_2 + \frac{\varpi_2}{2},\; u_3 + \frac{\varpi_3}{2}\right).$$

Alle diese Functionen werden erhalten, wenn man in dem Zahlencomplex $\begin{Bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{Bmatrix}$ den $g$ und $h$ auf alle möglichen Arten die Werthe 0 und 1 beilegt; es giebt im Ganzen 64 solcher Functionen. Dieser Zahlencomplex, welcher nach Riemann „Charakteristik" der $\vartheta$-Functionen genannt wird, ist für die folgende Theorie von der grössten Wichtigkeit. Deshalb hat der Herr Verfasser diese „Charakteristik" ausführlich behandelt, und hat, ganz abgesehen von der besonderen Bedeutung der Charakteristik, allein aus dem Begriff derselben, mit Hülfe der combinatorischen Analysis eine

Reihe von Sätzen hergeleitet, welche den Angelpunkt der ganzen Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3 bilden. Die Charakteristik $\binom{g_1\, g_2\, g_3}{h_1\, h_2\, h_3}$ heisst grade oder ungrade, je nachdem die Summe $g_1\, h_1 + g_2\, h_2 + g_3\, h_3$ grade oder ungrade ist, und es ergiebt sich, dass die $\vartheta$-Functionen mit graden Charakteristiken grade, die mit ungraden Charakteristiken ungrade Functionen sind. Um die halben Periodensysteme zu ermitteln, für welche eine $\vartheta$-Function von gegebener Charakteristik verschwindet, hat man die gegebene Charakteristik auf alle mögliche Arten in zwei andere zu zerlegen, von denen wenigstens eine ungrade ist. Sämmtliche $6 \cdot 63$ Paare von ungraden Charakteristiken ordnen sich in Gruppen von je 6 Paaren in der Weise, dass die sämmtlichen Paare einer Gruppe die nämliche Summe ergeben, welche „Gruppencharakteristik“ genannt wird. Es folgt nun eine Reihe von Sätzen über die merkwürdigen Gruppirungen dieser Charakteristiken. In 3 Tafeln sind die 63 Gruppen ungrader Charakteristiken, die vollständigen Systeme ungrader Charakteristiken, und die Zerlegung einer graden Charakteristik in drei ungrade übersichtlich zusammengestellt.

Im folgenden Paragraphen: „Das Additionstheorem der $\vartheta$-Functionen“ wird ein System von acht $\vartheta$-Functionen zweiter Ordnung gewählt, so dass alle $\vartheta$-Functionen zweiter Ordnung sich linear und homogen mit constanten Coefficienten durch diese acht $\vartheta$-Functionen ausdrücken lassen. Es wird eine Reihe von Formeln gewonnen, welche zu einer vollkommen entwickelten und verhältnissmässig sehr einfachen Darstellung des Additionstheorems der sechsfach periodischen Functionen führen. Die resultirende Form ist ganz analog dem Additionstheorem für die elliptischen und für die hyperelliptischen Functionen erster Ordnung (vgl. Königsberger's Abhandlung in Borchardt J. LXIV. p. 17). Den Schluss des I. Abschnittes bilden eine Reihe von Relationen zwischen constanten Werthen der $\vartheta$-Functionen.

Der II. Abschnitt behandelt die algebraischen Functionen vom Geschlecht 3 und ihre Integrale. Hier werden die Riemann'schen Anschauungen und Bezeichnungen recapitulirt und die

Hauptpunkte der Riemann'schen Theorie für den vorliegenden Fall specialisirt. Den Ausgangspunkt bildet die algebraische Gleichung

$$F(s^n, z^m) = 0,$$

und die algebraische Function $s$ von $z$ gehört (nach der Bezeichnung von Clebsch) zum Geschlecht 3, wenn die ihren Verlauf darstellende, die $z$-Ebene $n$-fach bedeckende Riemann'sche Fläche $T$ siebenfach zusammenhängend ist. Nun werden die „Integrale erster Gattung"

$$w = \int \frac{\varphi(s^{n-2}, z^{m-2})\, dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}$$

betrachtet. Die Functionen $\varphi$ können linear und homogen durch 3 unter ihnen ($\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$) ausgedrückt werden. Das Verhältniss zweier Functionen $\varphi$ geht durch eindeutige Transformation wieder in das Verhältniss zweier solcher Functionen über, so dass die Functionen $\varphi$ für alle diese Transformationen den Charakter von Covarianten haben. Zwischen den 3 Functionen $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ besteht eine homogene Gleichung vierter Ordnung $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, und nun wird die Function

$$\sigma = \frac{\Psi_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\Psi_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}$$

aufgestellt. Dadurch, dass, soweit es thunlich war, nur solche Functionen benutzt werden, die den Charakter der Invarianz bei jeder rationalen Transformation bewahren, gewinnt die Untersuchung an Allgemeinheit, Einfachheit und Eleganz.

Unter Beschränkung auf die Integrale erster Gattung wird nun dem Abel'schen Theorem folgender Ausdruck gegeben: „Die Summe der Werthe eines Integrals erster Gattung, erstreckt von festen Punkten bis zu denjenigen Punkten, in denen eine homogene Function von $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ verschwindet, ist von den Coefficienten dieser homogenen Function unabhängig". Der aus diesem Theorem erkannte Zusammenhang der algebraischen Integrale mit den periodischen Functionen führt zur Aufstellung der beiden Probleme: „Es sollen gegebene sechsfach periodische Functionen der Variabeln $v_1$, $v_2$, $v_3$ algebraisch durch die in den Punkten

$\xi_1, \xi_2, \xi_3$ stattfindenden Werthe von $s$, $z$ dargestellt werden", und: „Es sollen die Punkte $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ auf algebraischem Wege aus den als gegeben vorausgesetzten Werthen von $v_1$, $v_2$, $v_3$ ermittelt werden". Das erste dieser Probleme nennt Herr Weber das „Riemann'sche", weil der Nachweis seiner allgemeinen Lösbarkeit den Schlussstein von Riemann's Theorie bildet; das zweite ist das „Jacobi'sche Umkehrproblem".

Zunächst werden die Integrale erster Gattung mit den $\vartheta$-Functionen in Beziehung gesetzt, und zwar dadurch, dass den Periodicitätsmoduln dieser Integrale dieselbe Form gegeben wird, welche die Perioden der aus $\vartheta$-Functionen gebildeten sechsfach periodischen Functionen haben. Die Betrachtung der Integrale erster Gattung als Argumente der $\vartheta$-Functionen liefert das Resultat, dass es nur eine Lösung des Jacobi'schen Problems giebt, und lässt die Bedingung für die Unbestimmtheit derselben erkennen. Es folgt nun die Darstellung algebraischer Functionen durch die $\vartheta$-Functionen; es gilt der Satz, der als die „Umkehrung des Abel'schen Theoremes" bezeichnet werden kann: „Wenn die Punkte

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\mu;\ \eta'_1, \eta'_2, \ldots \eta'_\mu$$

der Congruenz genügen;

$$\left[\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\eta'_1}^{\eta_1} du_h + \int_{\eta'_2}^{\eta_2} du_h + \cdots + \int_{\eta'_\mu}^{\eta_\mu} du_h\right)\right] \equiv (0, 0, 0),$$

so existirt eine rationale Function $\sigma$ von $s$ und $z$, die in den Punkten $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\mu$ unendlich klein, in $\eta'_1, \eta'_2, \ldots \eta'_\mu$ unendlich gross von der ersten Ordnung, sonst weder Null noch unendlich wird". Es wird nun gezeigt, wie die Function $\sigma$, deren Darstellung auf unendlich verschiedene Arten möglich ist, am einfachsten dargestellt wird, und zwar unter der Form:

$$\sigma = \frac{\Psi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\varphi_4 \cdot \varphi_5}.$$

Im Ganzen existiren 28 Functionen $\varphi$, welche in zwei Punkten unendlich klein von der zweiten Ordnung werden; sie repräsentiren, gleich 0 gesetzt, die Gleichungen der 28 Doppeltangenten der Curve vierter Ordnung $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0$. Die Quadrat-

wurzeln aus diesen Functionen $\varphi$ heissen nach Riemann „Abel'sche Functionen".

Der Behandlung dieser Abel'schen Functionen ist Abschnitt III. gewidmet. Zunächst werden die Abel'schen Functionen durch die $\vartheta$-Functionen dargestellt. Wenn eine Abel'sche Functionen $\sqrt{x}$ in denselben Punkten verschwindet, wie

$$\vartheta\{\varpi\}\left(\int_{\xi'}^{\xi} du_h\right),$$

so heisst $(\varpi)$ die „Charakteristik" der Abel'schen Function und wird mit $(\sqrt{x})$ bezeichnet. Dann besteht die Relation:

$$\sqrt{\frac{x_1\,x_1'}{x_2\,x_2'}} = \frac{\vartheta\{\sqrt{x_1}\}\left(\int_{\xi'}^{\xi} du_h\right)}{\vartheta\{\sqrt{x_2}\}\left(\int_{\xi'}^{\xi} du_h\right)},$$

und für das Quadrat einer beliebigen Abel'schen Function erhält man den Ausdruck:

$$x = \vartheta_1^{\prime}\{\sqrt{x}\}\,\varphi_1 + \vartheta_2^{\prime}\{\sqrt{x}\}\varphi_2 + \vartheta_3\{\sqrt{x}\}\,\varphi_3.$$

Sucht man nun aus den Abel'schen Functionen Ausdrücke zusammenzusetzen, die sich rational durch $s$, $z$ darstellen lassen, so gewinnen auch die früheren Sätze über die Gruppirung der ungraden Charakteristiken eine bestimmte algebraische und geometrische Bedeutung. Es ergeben sich auf diesem Wege mehrere der von Steiner, Hesse und Aronhold aufgestellten Sätze über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung. Die Auflösung der Gleichung 28[ten] Grades für die Bestimmung der Abel'schen Functionen (oder der Doppeltangen der Curven vierter Ordnung) muss als bekannt vorausgesetzt werden; dann bleibt zur Erledigung der oben aufgestellten Fundamentalprobleme noch die algebraische Bestimmung der einzelnen Abel'schen Functionen und ihrer Charakteristiken übrig. Nach vollständiger Erledigung dieser Frage werden Gleichungen aufgestellt zwischen den $\vartheta$-Moduln und den sogen. „Classenmoduln", d. h. den 6 Constanten, von denen die Normalform

$$\sqrt{x_1\,\xi_1} + \sqrt{x_2\,\xi_2} + \sqrt{x_3\,\xi_3} = 0$$

der algebraischen Gleichung abhängig ist, die den betrachteten Functionen zu Grunde liegt. Daran schliesst sich eine Untersuchung der algebraischen Eigenschaften und der geometrischen Bedeutung der für das Folgende wichtigen „Wurzelfunctionen“. Unter einer Wurzelfunction (zweiten Grades) versteht der Herr Verfasser ganze rationale und homogene Ausdrücke, gebildet aus den Abel'schen Functionen, von der Eigenschaft, dass jedes Glied derselben die nämliche Charakteristik hat. Diese Wurzelfunctionen werden nach ihrer Ordnung eingetheilt. Von besonderer Bedeutung sind die Wurzelfunctionen dritter Ordnung, weshalb sie einer eingehenderen Betrachtung unterworfen werden.

Nach diesen Vorbereitungen schreitet nun der Herr Verfasser im IV. Abschnitt zur endlichen Lösung der beiden oben aufgestellten Fundamentalprobleme. Zunächst wird die algebraische Darstellung der sechsfach periodischen Functionen vollendet, aber unter Beschränkung auf den einfachsten Fall, nämlich auf die sechsfach periodischen Functionen zweiter Ordnung. Zur Lösung dieses Falles reichen die Wurzelfunctionen zweiten Grades vollständig aus. Die hier gewonnenen Resultate führen dann sofort zu einer sehr eleganten Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems, welche den Schluss des Werkes bildet. M.

---

M. Elliot. Détermination du nombre des intégrales abéliennes de première espèce. Ann. de l'Éc. Norm. (2) V. 399-444.

Ist $F(x, y) = 0$ eine irreductible Gleichung $m^{\text{ten}}$ Grades und $\Psi(x, y)$ irgend eine rationale Function von $x$ und $y$, so ist

$$\int \Psi(x, y)\, dx$$

ein Abel'sches Integral. Dasselbe heisst (nach Riemann) Abel'sches Integral erster Gattung, wenn es von der Form

$$\int \frac{N(x, y) dx}{F_y(x, y)}$$

ist, wo $N(x, y)$ ein Polynom vom Grade $m-3$, dessen Coefficienten so beschaffen sind, dass das Integral für alle Werthe von $x$

endlich bleibt. Für den Fall, wo die Curve $F(x, y) = 0$ keine anderen singulären Punkte hat, als Doppelpunkte und Rückkehrpunkte, haben Clebsch und Gordan (Theorie der Abel'schen Functionen p. 15) die Anzahl der Abel'schen Integrale erster Gattung bestimmt. Dieselbe ist:

$$p = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)-d-r,$$

wo $d$ die Anzahl der Doppelpunkte, $r$ die Anzahl der Rückkehrpunkte bedeuten. Die Anzahl der Perioden des Integrals ist gleich $2p$. In vorliegender Arbeit wird nun die Anzahl der Integrale erster Gattung ganz allgemein, d. h. für Curven $F(x, y) = 0$ mit beliebigen Singularitäten, bestimmt, und gezeigt, dass diese Anzahl auch in dem allgemeinen Fall halb so gross ist, wie die Anzahl der Perioden. Die Anzahl dieser Perioden ist ganz allgemein von Briot und Bouquet (Théorie des fonctions elliptiques, p. 170) angegeben. Herr Elliot bedient sich der Puiseux'schen Methode (siehe das eben citirte Werk p. 42), welche darin besteht, dass die Glieder des niedrigsten Grades in der Gleichung $F(x, y) = 0$ gesucht werden, indem man $x$ als Grösse erster Ordnung und $y$ als unendlich kleine Grösse einer Ordnung $\mu$ ansieht. Die hier benutzten Relationen sind auf anderem Wege von Halphén (C. R. 1874; s. F. d. M. VI. 254) hergeleitet. Die gewonnenen Resultate werden angewendet auf die Untersuchung der Gleichung $F(x,y) = 0$ für die Fälle, wo sich dass Integral

$$\int \Psi(x, y)\, dx$$

durch algebraische Functionen und Logarithmen, oder durch diese und elliptische Functionen ausdrücken lässt. M.

---

## C. W. Borchardt. Ueber das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen. Berl. Monatsber. 1876, 611-621.

Bereits im Jahre 1858, als Herr Borchardt seine Abhandlung über dass arithmetisch-geometrische Mittel aus zwei Elementen der Berliner Akademie vorlegte, war er im Besitz des Algorithmus, welcher für vier Elemente in Betracht kommt. Bildet man aus den vier reellen positiven Grössen $a$, $b$, $c$, $e$, welche der Bedingung

$$a > b > c > e,\quad a-b-c+e > 0$$

genügen, die vier Functionen

$$a_1 = \tfrac{1}{4}(a+b+c+e),\quad b_1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{ce}),$$
$$c_1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{ac}+\sqrt{be}),\quad e_1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{ae}+\sqrt{bc}),$$

und aus diesen ebenso vier neue Grössen $a_2$, $b_2$, $c_2$, $e_2$, und setzt diese Operation fort, so nähern sich mit wachsendem $n$ alle vier Grössen $a_n$, $b_n$, $c_n$, $e_n$ der nämlichen Grenze $g$. Dieses $g$ ist eine bestimmte analytische Function der vier Elemente $a$, $b$, $c$, $e$, welche den drei nothwendigen und zu ihrer Definition hinreichenden Bedingungen genügt, dass sie erstens der Functionalgleichung

$$f(a,b,c,e) = f(a_1, b_1, c_1, e_1)$$

genügt, zweitens eine homogene Function erster Ordnung der vier Elemente ist, und drittens, wenn die vier Elemente in einen Werth $a$ zusammenfallen, dem nämlichen Werthe $a$ gleich wird. Ferner lässt sich auch das $g$ durch ein System von Differentialgleichungen definiren, ebenso wie die Grenze für zwei Elemente (vgl. Borchardt J. XVIII. 131, 132). Andrerseits ist diese Function von vier Elementen $a$, $b$, $c$, $e$ durch hyperelliptische Integrale ausdrückbar. Ist nämlich

$$R(x) = x(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3),$$

so wird der reciproke Werth von $g$ bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{4\pi^2}{g} = \int_0^{\alpha_3} dx' \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} dx \, \frac{x-x'}{\sqrt{R(x).R(x')}}.$$

Im Folgenden wird nun ein Theorem für die Bestimmung der Grössen $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ gegeben, und gezeigt, wie sich dasselbe auf einem verhältnissmässig elementaren Wege begründen lässt, wenn man nicht den oben gegebenen Algorithmus, sondern die Weierstrass'sche Theorie der hyperelliptischen Integrale und der damit verbundenen Thetafunctionen zum Ausgangspunkt der Untersuchung macht.

Am Schluss wird gezeigt, inwiefern der obige Algorithmus auf jede Anzahl von Elementen, die gleich einer Potenz von 2 ist, ausgedehnt werden kann. M.

---

F. Klein. Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven 4ten Grades. Clebsch Ann. X. 365-397.

Der Verfasser führt durch vorliegende Arbeit, die er übrigens als einen ersten Versuch bezeichnet, in das Gebiet der Abel'schen Functionen einen Gedanken ein, der sich in manchen Zweigen der Geometrie bereits als fruchtbar bewährt hat. Er untersucht den Fall $p = 3$ an dem Beispiel einer durch Deformation aus einem Kegelschnittpaar entstandenen und von diesem in der Form nur wenig abweichenden allgemeinen Curve vierter Ordnung. Auf diese Weise lässt sich die zugehörige Riemann'sche Fläche und deren Zerschneidung im Einzelnen discutiren und ein Urtheil über die Realität der vollständigen Integrale und des Jacobi'schen Umkehrproblems gewinnen. An Stelle der durch die Curvengleichung gegebenen Riemann'schen Fläche wird nämlich eine ebenso verzweigte, aus der dualistisch entsprechenden Curve vierter Classe abgeleitete Fläche (vgl. die Aufsätze des Verfassers über eine neue Art Riemann'scher Flächen) eingeführt, wodurch die Discussion die wichtige Basis der Anschauung gewinnt. Auch bezüglich des Problems der Berührungscurven zu einer gegebenen Curve vierter Ordnung kann man, wie der Verfasser in mehreren Fällen zeigt, auf diesem Wege sich ein Urtheil über die Zahl und Vertheilung der reellen Lösungen bilden. Bl.

---

H. Léauté. Représentation des fonctions elliptiques de première espèce à l'aide des biquadratiques gauches. C. R. LXXXII. 527-529.

Der Verfasser projicirt die Punkte einer Raumcurve vierter Ordnung mit 2 scheinbaren Doppelpunkten auf eine ebene Curve vierter Ordnung, deren rechtwinklige Coordinaten durch bezw. sin am $u$ und cos am $u . \Delta$ am $u$ darstellbar sind, und erhält so eine Repräsentation dieser drei elliptischen Functionen einzeln.

Bl.

F. E. PRYM. Zur Theorie der Gammafunction. Borchardt J. LXXXII. 165-172.

Durch die Untersuchungen von Weierstrass (Theorie der analytischen Facultäten, Borchardt J. LI.) ergiebt sich, dass die Function $\Gamma(z)$ eine einwerthige Function der complexen Variabeln $z$ ist, die mit Ausnahme der Punkte $0, -1, -2, \ldots$, wo sie $\infty^1$ wird, und des unendlich entfernten Punktes der Zahlenebene, wo sie eine Unstetigkeit der dritten Art besitzt, in der ganzen übrigen Ebene allenthalben stetig ist. Die hier gegebenen Untersuchungen über die Gammafunction gipfeln in folgendem Resultat: „Es existiren zwei von $z$ abhängige Grössen $P(z)$ und $Q(z)$, von denen die erste durch die Bedingungen

$$\lim_{n=\infty} \frac{P(z+n)}{(n-1)!\, n^z} = 0, \qquad P(z+1) = zP(z) - \frac{1}{e}$$

allein, die zweite durch die Bedingungen

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q(z+n)}{(n-1)!\, n^z} = 1, \qquad Q(z+1) = zQ(z) + \frac{1}{e},$$

unter Ausschluss einer hebbaren Unstetigkeit für $z = 0$, vollständig bestimmt ist, und deren analytische Ausdrücke beziehlich

$$P(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{1!\,(z+1)} + \frac{1}{2!\,(z+2)} - \cdots,$$

$$Q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots, \quad c_\nu = \frac{1}{\nu!} \int_1^\infty e^{-\xi}\, ln^\nu \xi \,\frac{d\xi}{\xi},$$

sind. Beide Grössen sind einwerthige Functionen der complexen Variable $z$, die erste mit dem Charakter einer echtgebrochenen rationalen Function, die zweite mit dem Character einer ganzen Function. Aus ihnen entstehen, indem man vermittelst zweier willkürlicher Constanten $p, q$ die Form $pP(z) + qQ(z)$ bildet und dann für $p, q$ alle möglichen Zahlenpaare setzt, unendlich viele Functionen, von denen eine jede zweien speciellen Gleichungen von der Form

$$\lim_{x=n} \frac{S(z+n)}{(n-1)!\, n^z} = k, \qquad S(z+1) = zS(z) + l$$

genügt, und auch umgekehrt durch diese ihr speciell entsprechenden Gleichungen allein vollständig bestimmt erscheint. Unter all

diesen zusammengesetzten Functionen zeichnet sich die den Werthen $p = q = 1$ entsprechende Function $P(z) + Q(z)$ durch besondere Eigenschaften aus und erweist sich als identisch mit dem unter dem Namen der Gammafunction bekannten Gebilde".

M.

---

Th. Muir. Transformation of Gauss' hypergeometrical series into a continued fraction. L. M. S. VII. 112-118.

---

G. Darboux. Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres et sur une classe étendue de développements en séries. Extrait par l'auteur. C. R. LXXXII. 365-367; 404-406.

Indem wir einen eingehenderen Bericht bis zum Erscheinen der Abhandlung versparen, entnehmen wir den beiden Auszügen des Herrn Verfassers Folgendes. Die Untersuchung knüpft an die Dirichlet'schen Arbeiten über die trigonometrischen Reihen an. Es werden im ersten Theile bestimmte Kennzeichen gegeben, um die Ordnung der Grösse der einzelnen Glieder zu erkennen und um den angenäherten Ausdruck für die aufeinanderfolgenden Coefficienten einer trigonometrischen Reihe zu erhalten. Die gewonnenen Resultate werden dann angewendet auf die angenäherte Bestimmung der Functionen von sehr grossen Zahlen, für welche Laplace in seiner Théorie des probabilités eine Methode gegeben. Von diesen Functionen werden nun in der Abhandlung die folgenden einer eingehenden Behandlung unterworfen: 1) Die Polynome $X_n$ von Legendre, 2) die allgemeineren Polynome, welche aus der hypergeometrischen Reihe entstehen und durch die Gleichung

$$X_n = F(-n, \alpha + n, \gamma, x)$$

definirt werden; 3) das Integral von Laplace

$$\int f(x) . \varphi^n(x)\, dx$$

zwischen zwei reellen oder imaginären Grenzen; 4) die $n^{ten}$ Ab-

leitungen von $(1 \pm x^2)^{-n}$; 5) die $n^{ten}$ Ableitungen von

$$(x-a_1)^{m_1},\ (x-a_2)^{m_2} \ldots (x-a_p)^{m_p};$$

6) das allgemeine Glied der Function

$$\frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}\Big(\varphi^n(x)\, f(x)\Big),$$

wo $n$ sehr gross und $p$ endlich ist. M.

---

E. Heine. Lettre à M. Résal. Liouville J. (3) II. 155-158.

G. Darboux. Lettre a M. Résal. Liouville J. (3) II. 240-241.

Laurent. Lettre. Liouville J. (3) II. 420.

Die vorliegenden Briefe beziehen sich auf eine im vorigen Jahrgang (F. d. M. VII. p. 292) besprochene Arbeit von Laurent. Herr Heine zeigt im Einzelnen, dass die sämmtlichen dort entwickelten Resultate theils von Ivory, Jacobi, Dirichlet und Neumann, theils von ihm selbst gefunden seien, ohne dass Herr Laurent dies erwähne. Die Darstellung der Kugelfunctionen als Differentialquotienten rühre auch nicht von Rodrigues, sondern von Ivory her. Neu sei nur folgende Formel von Laurent:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) X_n Z_n = \frac{n+1}{z-x}(Z_{n+1} X_n - X_{n+1} Z_n),$$

deren man sich zweckmässig zur Entwickelung von $(z-x)^{-1}$ bedienen könne.

Dazu bemerkt Herr Darboux, dass diese Herrn Laurent zugeschriebene Formel nur eine einfache Anwendung einer allgemeinen Formel ist, die Darboux für alle Functionen gegeben hat, die eine Sturm'sche Reihe bilden [cf. F. d. M. VII. p. 35]. Die specielle Formel für die Functionen $X_n$ finde sich übrigens bereits in einer Arbeit von Christoffel über mechanische Quadratur. (Borchardt J. LV. p. 73).

Herr Laurent replicirt, er habe seine Formel schon im Jahre 1870 Herrn Darboux mitgetheilt, die Priorität Christoffel's erkenne er an. Wn.

---

J. W. L. GLAISHER. Expressions for Laplace's coefficients, Bernoullian and Eulerian numbers etc. as determinants. Messenger (2) VI. 49-63.

1. Bezeichnet $P_n$ den $n^{ten}$ Laplace'schen (oder Legendre'schen) Coefficienten, so ist

$$P_n = \begin{vmatrix} 1 & , 1, & 0, & 0, & 0,\dots \\ 0 & , x, & 1, & 0, & 0,\dots \\ \frac{1}{2}(x^2-1) & , x^2, & 2x, & 1, & 0,\dots \\ 0 & , x^3, & 3x^2, & 3x, & 0,\dots \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}(x^2-1)^2, & x^4, & 4x^3, & 6x^2, & 4x,\dots \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots \end{vmatrix} \quad (n+1 \text{ Reihen}),$$

wo die Glieder der ersten Colonne abwechselnd 0 sind und das $(2r+1)^{te}$ Glied $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2r-1}{2r}(x^2-1)^r$ ist.

2. In den Quadraturformeln:

$$\frac{1}{h}\int_a^b \varphi x dx = \tfrac{1}{2}\varphi a + \varphi(a+h) + \cdots + \varphi(b-h) + \tfrac{1}{2}\varphi b$$
$$-\tfrac{1}{12}\{\Delta\varphi(b-h) - \Delta\varphi a\} \quad -\tfrac{1}{24}\{\Delta^2\varphi(b-2h) + \Delta^2\varphi a\}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

ist der Coefficient von

$$-\{\Delta^n\varphi(b-nh) \pm \Delta^n\varphi a\}$$

gleich

$$(-1)^n \begin{vmatrix} \frac{1}{2}, & 1, & 0, & 0\dots \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{2}, & 1, & 0\dots \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{2}, & 1\dots \\ \frac{1}{5}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{2}\dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad (n+1 \text{ Reihen})$$

3. $E_n$, die $n^{te}$ Euler'sche Zahl, ist

$$E_n = (2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!}, & 1, & 0, \dots \\ \frac{1}{4!}, & \frac{1}{2!}, & 1, \dots \\ \frac{1}{6!}, & \frac{1}{4!}, & \frac{1}{2!}, \dots \\ \cdot, & \cdot, & \cdot, \dots \end{vmatrix} \quad (n \text{ Reihen})$$

4. $B_n$, die $n^{te}$ Bernoulli'sche Zahl, ist:

$$B_n = \tfrac{1}{2}(2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{3!}, & 1, & 0, & 0, \dots \\ \frac{3}{5!}, & \frac{1}{3!}, & 1, & 0, \dots \\ \frac{5}{7!}, & \frac{3}{5!}, & \frac{1}{3!}, & 1, \dots \\ \frac{7}{9!}, & \frac{5}{7!}, & \frac{3}{5!}, & \frac{1}{3!}, \dots \\ \cdot, & \cdot, & \cdot, & \cdot, \dots \end{vmatrix} \quad (n \text{ Reihen})$$

$$= 2^n(2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{4!}, & 1, & 0, & 0, \dots \\ \frac{2}{6!}, & \frac{1}{4!}, & 1, & 0, \dots \\ \frac{3}{8!}, & \frac{1}{6!}, & \frac{1}{4!}, & 1, \dots \\ \frac{4}{10!}, & \frac{1}{8!}, & \frac{1}{6!}, & \frac{1}{2!}, \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Es giebt noch andere Ausdrücke derselben Art für $B_n$, $\frac{1}{n!}$, die Coefficienten in der Entwickelung eines Binomens, für $\Delta^n 0^m$ und $e^{\Delta} 0^n$. Die allgemeinen Sätze, auf denen die Resultate beruhen, werden ebenfalls gegeben. Glr. (O.)

---

L. Schendel. Zusatz zu einer Abhandlung über Kugelfunctionen. Borchardt J. LXXXII. 158-164.

Im Anschluss an eine im vorigen Jahrgang (F. d. M. VII. p. 293) besprochene Arbeit giebt der Verfasser, ausgehend von der Leibniz'schen Formel für die höheren Differentialquotienten eines Productes, noch die folgenden anderen Gleichungen zur Definition der Kugelfunctionen $P_k^n(x)$ und der ihnen zugeordneten Functionen $A_k^{n-1}(x)$:

$$P_k^n(x) = \frac{n!\,(x-1)^{-\frac{1}{2}k}\,(x+1)^{+\frac{1}{2}k}}{2^n(n-k)!\,(n+k)!}\;\frac{d^n(x-1)^{n+k}(x+1)^{n+k}}{dx^n}$$
$$= \frac{n!\,(x-1)^{+\frac{1}{2}k}(x+1)^{-\frac{1}{2}k}}{2^n(n+k)!\,(n-k)!}\;\frac{d^n(x-1)^{n-k}(x+1)^{n+k}}{dx^n},$$

$$A_k^{n-1}(x) = \frac{n!\,(x-1)^{-\frac{1}{2}k-1}(x+1)^{+\frac{1}{2}k}}{2^{n-1}(n+k)!\,(n-1-k)!}\;\frac{d^{n-1}(x-1)^{n+k}(x+1)^{n-1-k}}{dx^{n-1}}$$
$$= \frac{(n-1)!\,(x-1)^{+\frac{1}{2}k}\,(x+1)^{-\frac{1}{2}k}}{2^{n-1}(n-1-k)!\,(n+k)!}\;\frac{d^n(x-1)^{n-1-k}(x+1)^{n+k}}{dx^n}.$$

Für die so definirten Functionen werden dann mehrere dieselben zu einander in Beziehung setzende Formeln abgeleitet, von denen die folgenden hier angeführt werden mögen:

$$2(x-1)^{-\frac{1}{2}}P_k^{n+1}(x) = (x-1)^{+\frac{1}{2}}A_k^n(x) + (x+1)^{+\frac{1}{2}}A_{k-1}^n(x),$$
$$A_k^n(x) = P_k^n(x) + (x-1)^{-\frac{1}{2}}(x+1)^{+\frac{1}{2}}P_{k+1}^n(x).$$

Analoge Definitionsgleichungen und Relationen werden auch für die Kugelfunctionen zweiter Art $Q_k^n(x)$ und die ihnen zugeordneten Functionen $B_k^{n-1}(x)$ aufgestellt.

Weiter zeigt der Verf., wie man die Definition, die zunächst nur für den Fall $n \geqq k$ (resp. $k+1$) gelte, auch auf den Fall $n < k$ (resp. $k+1$) ausdehnen kann. Dann wird die Function $Q_k^n(x)$ bis auf einen constanten Factor $= P_k^{-(n+1)}(x)$. Dies führt darauf, das Functionszeichen $Q$ ganz aufzuheben und statt dessen sich des Zeichens $P_k^{-(n+1)}(x)$ zu bedienen.

Zum Schluss erörtert der Verf. einige Beziehungen zwischen der Differentialgleichung der Kugelfunctionen und der der Kreisfunctionen. Wn.

---

L. Gegenbauer. Ueber die Bessel'schen Functionen. Wien. Ber. LXXIV.

Der Verfasser definirt eine Function $A_n^\nu(x)$ durch folgende Gleichung:

$$A_n^\nu(x) = \frac{2^{n+\nu}(n+\nu)}{x^{n+1}}\sum_{s=0}^{s=r}\frac{\Pi(n+\nu-s-1)}{4^s\,\Pi(s)}\,x^{2s},$$

wo

$$r = \frac{n}{2} \text{ oder } \frac{n-1}{2}$$

ist, je nachdem $n$ grade oder ungrade ist. Aus dieser Definition wird eine Recursionsformel für die obige Function und daraus eine Differentialgleichung für dieselbe abgeleitet. Ferner wird gezeigt, dass unter der Bedingung

$$\operatorname{mod} x_1 < \operatorname{mod} x$$

folgende Beziehung stattfindet, in der die $J$ Bessel'sche Functionen bedeuten.

$$\frac{1}{x - x_1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n^\nu(x) x_1^{-\nu} J^{n+\nu}(x_1).$$

Die Functionen $A_k^\nu$ treten also bei der Entwickelung von $\frac{1}{x-x_1}$ nach Bessel'schen Functionen als Coefficienten auf.

Daraus folgt weiter, dass jede Function $f(x)$, welche innerhalb eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises eindeutig und stetig ist, sich für alle Punkte innerhalb dieses Kreises nach den Bessel'schen Functionen erster Art in eine Reihe

$$f(x_1) = \sum_n B_n x_1^{-\nu} J^{n+\nu}(x_1)$$

entwickeln lässt, deren Coefficienten durch die Gleichung gegeben sind

$$B_n = \frac{1}{2\pi i} \int f(x) A_n^\nu(x) dx,$$

wobei die Integration um die Peripherie jenes Kreises sich erstreckt. Der Verf. giebt einige Folgerungen aus diesem allgemeinen Satze und stellt zum Schluss für die Bessel'sche Function $J^\nu$ mit dem zusammengesetzten Argument

$$\sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_{11}^2 - 2\varrho_1\varrho_{11}\cos\varphi}$$

folgendes Doppelintegral auf:

$$(\varrho_1^2 + \varrho_{11}^2 - 2\varrho_1\varrho_{11}\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}\nu} J^\nu(\sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_{11}^2 - 2\varrho_1\varrho_{11}\cos\varphi})$$
$$= \frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{3\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)[\Pi(\nu-1)]^2}$$
$$\cdot \int_0^\pi \int_0^\pi e^{i[\varrho_1(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\chi) + \varrho_{11}\cos\psi]} \cdot \sin^{2\nu-1}\chi \sin^{2\nu}\psi \, d\chi \, d\psi.$$

Ein ähnliches Doppelintegral wird noch für die Function $C_n^\nu$ mit dem zusammengesetzten Argument

$$xx_1 - \sqrt{x^2-1}\sqrt{x_1^2-1}\cos\varphi$$

aufgestellt (Ueber die Definition der Function $C_n^\nu$ vergl. F. d. M. VI. p. 297). Wn.

---

J. J. Sylvester. Note on spherical harmonics. Phil. Mag. 1876.

Die Ausdrücke, mit welchen sich die vorliegende Arbeit beschäftigt, sind diejenigen, welche man in Deutschland „Kugelfunctionen", in Frankreich „Fonctions sphériques" nennt, während englische Mathematiker sie allgemein als Laplace'sche Functionen bezeichnen.

Herr Sylvester verallgemeinert die gewöhnliche Theorie des Potentials. Sind $P'$, $P''$ zwei feste Punkte mit den Coordinaten $h$, $k$, $l$, $h'$, $k'$, $l'$ und sind $x$, $y$, $z$ die Coordinaten eines variabeln Punktes, dann ist, wenn

$$R^2 = (x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2,$$
$$R'^2 = (x-h')^2+(y-k')^2+(z-l')^2,$$

das betrachtete Integral $\iiint \frac{dV}{RR'}$, welches Herr Sylvester das „Bipotential" nennt. Er leitet Eigenschaften dieser Function ab, welche Verallgemeinerungen der Laplace'schen Sätze sind und die Theorie auf einen Raum von $n$ Dimensionen ausdehnen. Die Arbeit enthält einige wichtige Winke, da die Bestimmung des Bipotentials der Theorie der bestimmten Integrale ein weites Feld eröffnet und zur Auswerthung einiger Klassen derselben fruchtbar zu werden verspricht. Namentlich ist ein Satz bemerkenswerth, der dem Ivory'schen Satze über Anziehung analog ist.

Csy. (O.)

---

L. Schläfli. Ueber die Convergenz der Entwickelung einer arbiträren Function $f(x)$ nach den Bessel'schen

Functionen

$$J^a(\beta x),\quad J^a(\beta_2 x),\quad J^a(\beta_3 x),\ldots,$$

wo $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ die positiven Wurzeln der Gleichung $J^a(\beta) = 0$ vorstellen. Clebsch Ann. X. 137-142.

Es ist hier dasselbe Problem, das Hankel in seiner nachgelassenen Abhandlung über die Fourier'schen Reihen und Integrale für Cylinderfunctionen (Clebsch Anm. VIII. 471—490; siehe F. d. M. VII. 301) gelöst hat, auf einem etwas naturgemässeren Wege behandelt, nämlich durch rein analytische Verwandlung der Function

$$f(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} A_\lambda J^a(\beta_\lambda x)$$

und Benutzung derjenigen Integralausdrücke, die bei der Behandlung der trigonometrischen Reihen auftreten. M.

---

E. Lommel. Ueber eine mit den Bessel'schen Functionen verwandte Function. Clebsch Ann. IX. 425-444.

Der Herr Verfasser untersucht den Zusammenhang zwischen den beiden Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art $J^n_{(z)}$ und $Y^n_{(z)}$, welche der Bessel'schen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) y = 0$$

Genüge leisten, und der von Herrn C. Neumann eingeführten Function $O^n_{(z)}$. Diese letztere ist eine rationale ganze Function von $\frac{1}{z}$ vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade und genügt für ein grades $n$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 O^n}{\partial z^2} + \frac{3}{z}\cdot\frac{\partial O^n}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2-1}{z^2}\right) O^n = \frac{1}{z},$$

für ein ungrades $n$ aber der Gleichung

$$\frac{\partial^2 O^n}{\partial z^2} + \frac{3}{z}\cdot\frac{\partial O^n}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2-1}{z^2}\right) O^n = \frac{n}{z^2}$$

als particuläres Integral. Als Resultat der Untersuchung ergiebt

sich, dass diese Function $O$ ein specieller Fall einer viel allgemeineren Function ist, welche die Form hat:

$$S^{\mu,\nu}_{(z)} = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left(J^{\nu}_{(z)}\int z^{\mu}\, J^{-\nu}_{(z)}\cdot dz - J^{-\nu}_{(z)}\int z^{\mu}\, J^{\nu}_{(z)}\, dz\right)$$

oder

$$S^{\mu,n}_{(z)} = Y^{n}_{(z)}\int z^{\mu}\, J^{n}_{(z)}\, dz - J^{n}_{(z)}\int z^{\mu}\, Y^{n}_{(z)}\, dz.$$

Es wird nämlich

$$O^{2m}_{(z)} = \frac{1}{z}\cdot S^{1,2m}_{(z)}$$

und

$$O^{2m+1}_{(z)} = \frac{2m+1}{z}\cdot S^{0,2m+1}_{(z)};$$

uud der Zusammenhang der Function $O$ mit den Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art findet seinen Ausdruck in den Gleichungen:

$$O^{2m} = \frac{1}{z}\left(Y^{2m}\int z\, J^{2m}\, dz - J^{2m}\int z\, Y^{2m}\, dz\right),$$

$$O^{2m+1} = \frac{2m+1}{z}\left(Y^{2m+1}\int J^{2m+1}\, dz - J^{2m+1}\int Y^{2m+1}\, dz\right).$$

M.

---

# Achter Abschnitt.

# Reine, elementare und synthetische Geometrie.

## Capitel I.

## Principien der Geometrie.

J. Frischauf. Elemente der absoluten Geometrie. Leipzig. Teubner.

Bekanntlich hat der Verf. 1872 eine recht brauchbare Schrift unter dem Titel „Absolute Geometrie nach Johann Bolyai“ veröffentlicht. Dieselbe erscheint jetzt in umgearbeiteter und erweiterter Form wieder. Der Verf. hat es zumal unternommen, die Beziehung zwischen den Lobatchewsky-Bolyai'schen Entwickelungen und den Untersuchungen Späterer darzulegen. Inzwischen scheint ihm nicht Alles in den neueren Entwickelungen verständlich gewesen zu sein. Wenigstens ist, was er über den Raum von positiver Krümmung, den „endlichen“ Raum sagt, durchaus unrichtig. Er behauptet z. B. (wie es die ältere Theorie allerdings annahm), dass sich 2 gerade Linien im endlichen Raume nothwendig in 2 Punkten schneiden müssen, und doch wurde in Clebsch Ann. VI. p. 125 die Unrichtigkeit dieser Behauptung gezeigt. Er meint ferner, in dieser Geometrie sei die Ebene nicht „umkehrbar“ und also auch nicht „durch 3 Punkte bestimmt“, was Beides doch der Fall ist. Diese Frage wird

sich, dass diese Function $O$ ein specieller Fall einer viel allgemeineren Function ist, welche die Form hat:

$$S_{(z)}^{\mu,\nu} = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left(J_{(z)}^{\nu}\int z^{\mu}\, J_{(z)}^{-\nu}\cdot dz - J_{(z)}^{-\nu}\int z^{\mu}\, J_{(z)}^{\nu}\, dz\right)$$

oder

$$S_{(z)}^{\mu,n} = Y_{(z)}^{n}\int z^{\mu}\, J_{(z)}^{n}\, dz - J_{(z)}^{n}\int z^{\mu}\, Y_{(z)}^{n}\, dz.$$

Es wird nämlich

$$O_{(z)}^{2m} = \frac{1}{z}\cdot S_{(z)}^{1,2m}$$

und

$$O_{(z)}^{2m+1} = \frac{2m+1}{z}\cdot S_{(z)}^{0,2m+1};$$

uud der Zusammenhang der Function $O$ mit den Bessel'sc Functionen erster und zweiter Art findet seinen Ausdruck in Gleichungen:

$$O^{2m} = \frac{1}{z}\left(Y^{2m}\int z\, J^{2m}\, dz - J^{2m}\int z\, Y^{2m}\, dz\right),$$

$$O^{2m+1} = \frac{2m+1}{z}\left(Y^{2m+1}\int J^{2m+1}\, dz - J^{2m+1}\int Y^{2m+1}\, dz\right)$$

st-
ıus
sch
ung
diese
unkte
llelen-
durch
durch
Kln.

arallelen-

thode, das
n zwei ge-
hen, einge-
it stichhaltig
traud darauf,
$a > b$, wenn
die Richtigkeit
Kln.

Analyst III. 103-104.

uclid's Axiom, der sich in
Glr. (O.)

mit der vorangehenden zusammen am Besten auf die Anschauungen zurückgeführt, die in Clebsch Ann. VII. p. 549 und IX. p. 476 entwickelt sind. Die Ebene ist in dieser Geometrie des endlichen Raumes (wie in der projectiven Geometrie überhaupt) eine Doppelfläche, bei der man durch stetige Bewegung auf der Fläche von der einen Seite auf die andere gelangt. Zieht man nun in ihr zwei gerade Linien, so schneiden sich dieselben, wenn man will, in der That zweimal; aber der Schnittpunkt ist beidemal derselbe; nur wird er das eine Mal der einen Seite, das andere Mal der anderen Seite der Ebene zugerechnet.
Kln.

---

M. Réthy. Die Fundamentalgleichungen der nichteuklidischen Geometrie auf elementarem Wege abgeleitet. Grunert Arch. LVIII. 416-423.
Kln.

---

A. v. Frank. Der Körperinhalt des senkrechten Cylinders und Kegels in der absoluten Geometrie. Grunert Arch. LIX. 71-83.

Statt durch Parallelebenen die Körper zu begrenzen und zum Zwecke der Integration zu zerschneiden, muss man in den gewählten Beispielen zweckmässigerweise solche Flächen anwenden, welche zu einer festen Ebene aequidistant verlaufen.
Kln.

---

S. Günther. Sulla possibilità di dimostrare l'assioma delle parallele mediante considerazioni stereometriche. Complemento alla geometria assoluta di Bolyai. (Traduzione del Tedesco di A. Sparagna.)

Die Meinung des Verf., kurz zusammengezogen, scheint folgende zu sein. In der gewöhnlichen Geometrie ist die Ebene zweier Definitionen fähig, welche in der Nicht-Euklidischen Geometrie auseinandertreten: einmal kann man sie definiren als

Kugel von unendlich grossem Radius, das andere Mal als geometrischen Ort der Durchschnittscurve der um zwei feste Punkte herumgelegten congruenten Kugeln. Bekanntlich benutzt Bolyai als Definition der Ebene die letztere. Die Kugeln mit unendlich grossem Radius sind bei ihm keine Ebenen; übrigens herrscht auf ihnen für Figuren, welche von geodätischen Linien (statt der geraden Linien) gebildet werden, die Euklidische Geometrie. Der Verf. schlägt nun vor, an der ersten Definition einfach festzuhalten und also die Kugeln von unendlich grossem Radius Ebenen zu nennen. Dann sei die Geometrie der Ebene euklidisch und also Alles in Ordnung. Der erste Theil dieser Behauptung ist evident, aber inhaltslos, der zweite unrichtig; denn diese „Ebenen" des Verf. haben nicht die Eigenschaft, durch 3 Punkte eindeutig bestimmt zu sein, wenn man nicht das Parallelenaxiom oder ein Aequivalent einführt. Vielmehr gehen durch 3 Punkte (allgemein zu reden) immer 2 „Ebenen" und durch 2 Punkte unendlich viele „gerade Linien". Kln.

---

J. Lüroth. Ueber Bertrand's Beweis des Parallelenaxioms. Schlömilch Z. XXI. 294-297.

Der Verf. zeigt, weshalb die Bertrand'sche Methode, das Parallelenaxiom zu beweisen (Vergleich des zwischen zwei geraden Linien, die auf einer dritten senkrecht stehen, eingeschlossenen Raumes mit einem Winkelraume) nicht stichhaltig ist. Rein formal beruht der Fehlschluss bei Bertrand darauf, dass aus $na > nb$ nicht geschlossen werden kann $a > b$, wenn nicht $a$, $b$ als Zahlgrössen definirt sind oder die Richtigkeit dieses Schlusses besonders nachgewiesen wird. Kln.

---

W. W. Johnson. Theory of parallels. Analyst III. 103-104.

Reproduction des Beweises von Euclid's Axiom, der sich in Crelle J. für 1834 findet. Glr. (O.)

---

C. Heinze. Kritische Beleuchtung der Euklidischen Geometrie. Berlin. Friedberg u. Mode.

C. Heinze. Die Elementar-Geometrie für den Schulgebrauch bearbeitet. Berlin. Friedberg u. Mode.

Die erstere Schrift erscheint, wie auf dem Titel bemerkt, als Einleitung zu der letztern. Er nennt die kritische Beleuchtung eine nur um den neuen Elementen Eingang zu verschaffen, versuchte und dadurch abgedrungene. In der That ist sie nichts weiter als eine Bemängelung der Wortfassung, aber nicht einmal der Euklid'schen, sondern zum grössten Theil der in neueren Autoren angetroffenen. Sachlich ist allein die Behauptung, die Congruenz durch Deckung zu erklären, sei unmöglich, was ziemlich einseitig erörtert wird.

Die letztere Schrift bietet weder dem Bericht noch der Kritik einen nennenswerthen Gegenstand dar. Im Vorwort wird die Euklid'sche Methode gelästert, die versprochene gelobt ohne beide zu kennzeichnen. In der Ausführung ist von Methode keine Spur; der Verfasser giebt sich nicht die Mühe, auch nur den Anschein der vorher gepriesenen Vorzüge zu wecken. Eine Probe der Unklarheit giebt der Anfang (überschrieben „Lehrsatz" statt des gewöhnlichen Ausdrucks „Erklärung"): „Der Ort, in welchem ein allmälig abnehmendes Ding aufhört Raum einzunehmen, ist der geometrische Punkt". Was dem weiter hinzugefügt wird, dient uur dazu, die Verwirrung zu vermehren.

H.

---

## Capitel 2.

## Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs).

F. Klein. Ueber den Zusammenhang der Flächen. Clebsch Ann. IX. 476-483.

Der Verfasser hat zunächst eine Uebereilung zu berichtigen, welche ihm in der unter gleichem Titel im siebenten Bande der

Math. Ann. veröffentlichten Note begegnet war; sodann erläutert er ausführlicher den Begriff der Doppelfläche und stellt für ihn eine Definition auf, die ihn als unabhängig erscheinen lässt von der Art oder selbst der Existenz eines die Fläche umgebenden Raumes. Er wird dadurch überhaupt anwendbar bei der Untersuchung zweifach ausgedehnter beliebiger Mannigfaltigkeiten, und so verwerthet ihn der Verf. beispielsweise dazu, um die Liniencongruenzen erster Ordnung und Classe, die getrennte Leitlinien besitzen, auf ihren Zusammenhang zu untersuchen.

Kln.

---

L. Schläfli. Correzione alla memoria intitolata: Quand'è che dalla superficie generale di terz'ordine si stacca un pezzo rientrante? Brioschi Ann. 2) VII. 193-197.

Diese Note bezieht sich auf die Frage nach der Abzählung des „Zusammenhangs“ bei unpaaren Flächentheilen. Nach der nun vom Verf. vorgeschlagenen Zählweise erhalten die fünf Arten der reellen Flächen dritter Ordnung die Zusammenhangszahlen 12, 8, 4, 0, —4. Kln.

---

F. Klein. Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve. Erl. Ber 1875, Clebsch Ann. X. 199-200.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2 B.

---

F. Klein. Ueber eine neue Art von Riemann'schen Flächen. Zweite Mittheilung. Clebsch Ann. X. 398-417.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2 B.

---

A. Harnack. Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven. Clebsch Ann. X. 189-199.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2 B.

---

J. Thomae. Ueber ein Integral von Gauss, welches die Verknotungen zweier geschlossenen Curven im Raume zählt. Freiburg. Ber. VII.

Beweis des im Nachlass von Gauss (Werke V. 605) sich findenden Satzes: „Es seien die Coordinaten eines unbestimmten Punktes der einen Linie $xyz$, der zweiten $x'y'z'$ und

$$V = \int\int \frac{\varDelta}{[\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}]^3},$$

wenn

$$\varDelta = \begin{vmatrix} x'-x, & y'-y, & z'-z \\ dx, & dy, & dz \\ dx', & dy', & dz' \end{vmatrix}$$

ist, dann ist dieses Integral durch beide Linien ausgedehnt, gleich $4m\pi$ und $m$ die Anzahl der Umschlingungen“. Zunächst wird das Integral auf die Form:

$$V = \int\int \frac{dX'.dx + dY'.dy + dZ'.dz}{[\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}]^3}$$

$$= \int\int \frac{dX.dx' + dY dy' + dZ dz'}{[\sqrt{(x'-x)^2+y'-y)^2+(z'-z)^2}]^3}$$

gebracht; dann das Integral

$$V = \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} dx \cdot \int dX' + dy \cdot \int dY' + dz \cdot \int dZ'$$

betrachtet, für das $dV$ ein vollständiges Differential, und welches von der Gestalt der geschlosseneu Curven $s$ und $s'$ insofern ganz unabhängig ist, als nur die Anzahl der Umschlingungen der einen um die andere den Werth $V$ bestimmt, und um diesen zu ermitteln, werden für $s$ und $s'$ specielle Curven gesetzt.

Derselbe Satz ist auf anderem Wege von Herrn Böddicker und Herrn Schering bewiesen worden. M.

---

P. G. Tait. General theorems relating to closed curves. Rep. Brit. Ass. 1876.

Diese Sätze beziehen sich auf Schnitte geschlossener Curven mit anderen. Cly. (O.)

---

Th. Hugel. Die regulären und halbregulären Polyeder. Neustadt a. d. H. Witter.

Von den halbregulären Körpern werden zunächst zwei Arten behandelt. Bei der ersten Gattung sind die Halbirungspunkte der Kanten eines regulären Polyeders die Ecken des neuen Körpers, bei der zweiten Art liegen je zwei Ecken des abgeleiteten Polyeders in den Kanten des regulären Grundkörpers so, dass sie in jeder Seitenfläche ein reguläres Polygon von doppelter Seitenzahl bilden. In den folgenden Paragraphen ist die Entstehungsweise der Archimedischen, der anti-archimedischen Körper, sowie der beiden Rhombenflache aus den regulären Polyedern ausführlich erläutert. Schliesslich wird eine einfache Construction der Poinsot'schen Körper mitgetheilt. Durch 113 der Abhandlung beigelegte Stereoskopbilder wird die Anschauung der besprochenen zahlreichen Körperformen vermittelt.

Schl.

---

J. Krejci. Ueber die geometrische Construction der tesseralen Gyroide und Tetartoide. Prag. Ber. 1875. 153-156.

Die Construction des Gyroides wird aus dem umschriebenen Granatoid, die des Tetartoides aus dem umschriebenen Hexaeder hergeleitet.

Schl.

---

## Capitel 3.

## Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

G. Recknagel. Ebene Geometrie für Schulen. 2. Aufl. München. Th. Ackermann.

Die Bearbeitung ist im ganzen musterhaft sorgfältig und correct. Die Methode zeigt keine eigenthümlichen Seiten ausser

etwa einer gewissen Bevorzugung des rechnenden Verfahrens bei der Gleichheit und Proportionalität. Ausnahmen von der sonst beobachteten logischen Strenge bilden ein bekanntermassen unrichtiger Beweis für den Parallelensatz und ein unzureichender, obwohl besserungsfähiger Beweis für die unendliche Kleinheit der Differenz zwischen Kreis und einbeschriebenem Vieleck. (Ausführlicher besprochen in Grunert Arch. LX. Litber. p. 32.)

H.

---

J. Gilles. Lehrbuch der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten nach der Entwickelungsmethode bearbeitet. Heidelberg. C. Winter.

Das Vorliegende ist ein verunglückter Versuch, vermeintlichen Mängeln der Unterrichtsmethode abzuhelfen. Der Verf. tadelt an der gewöhnlichen Methode die lose Verknüpfung der Sätze und das Voranstellen des Satzes vor den Beweis; er setzt ihr die Entwickelungsmethode entgegen, welche das Entstehen der Raumgebilde sehen lasse und den Satz erst nach gewonnener Einsicht ausspreche. In der Ausführung begegnet man zunächst dem principiellen Irrthum, dass das Allgemeinere immer das Deutlichere, dem Anfänger Näherliegende sei; darum wird hier auch die Kreislehre aus der Ellipse entwickelt. Der Anfang des Buchs bietet eine philosophische Auseinandersetzung, bestehend aus theils unrichtigen, theils halbrichtigen, durchweg aber bestreitbaren Aufstellungen dar, das Weitere, an Stelle der Anreihung der Sätze nach logischem Connex, eine blosse Disposition des Lehrstoffs, in welcher jedoch auch viel Willkührliches enthalten ist. (Ausführlicher besprochen in Grunert Arch. LX. Litber. p. 31.)

H.

---

O. Fabian und L. Zmurko. Geometrie für die unteren Klassen der Mittelschulen. I. Heft für die erste und zweite Klasse. Lemberg. Seyfarth und Czajkowski.

Eine Versammlung aller Lehrer der Mathematik in Galizien hatte als Grundsatz aufgestellt, dass der Unterricht mit Versinnlichung der mathematischen Wahrheiten beginnen und die Theorie der Operationen aus der Betrachtung der Raumgrössen ableiten müsse, und Fabian mit der Bearbeitung des gemeinsamen Lehrbuchs beauftragt. Das darin zum Theil realisirte, im übrigen angestrebte didaktische Princip ist hingegen selbständige Idee seines Lehrers Zmurko und besteht darin, die Grundbegriffe schrittweise aus der Beobachtung zu entwickeln. Zur Versinnlichung der Linien wendet der Verf. Drähte an. Auf den Begriff der geraden Linie führt er hin, indem er einen krummen Draht um 2 feste Punkte rotiren lässt. Dies ist jedoch ziemlich der einzige Gegenstand, den er ausführlich und mit Sorgfalt behandelt. Weiterhin zeigt sich mehr und mehr, dass er seine Aufgabe nicht bewältigt hat. (Ausführlicher besprochen in Hoffmann Z. VI. 296 und Grunert Arch. LVIII. Litber. 40.) H.



---

F. Folie. Précis de géométrie élémentaire. Liège Desoer. 8°.

Das Buch ist zu kurz geschrieben, um in den Schulen verwandt zu werden, aber es kann dem Lehrer nützlich sein, weil es über manche Punkte eigenthümliche Gedanken enthält, und weil der Verfasser sich Mühe giebt, streng zu sein und die Definitionen, Sätze und Aufgaben in durchaus logischer Weise zu ordnen. Das ganze Buch ist so geschrieben, dass man Figuren entbehren kann. Die Methode der Grenzen ist bei der Ausmessung der aus dem Kreise abgeleiteten Figuren angewandt, zuweilen allein, zuweilen auch im Verein mit der Methode der Reduction auf's Absurde. Im Allgemeinen hat sich der Verf. wenig von den Ideen Legendre's entfernt. Mn. (O.)

---

A. Dauber. Die Sätze der Planimetrie. Pr. Helmstedt.

Eine Zusammenstellung der für den Schulunterricht bestimmten Axiome, Lehrsätze und Aufgaben aus der Planimetrie, ohne Beweise. M.

---

F. J. C. Éléments de géométrie comprenant des notions sur les courbes usuelles. $2^{me}$ éd. Tours. Marne. 12°.

Das Buch enthält im ersten Theil die elementare Geometrie, während im 2. Theile die Ellipse, Hyperbel, Parabel, Archimedische Spirale und andere Curven behandelt werden. Einen eingehenderen Bericht über dasselbe von G. Dostor findet man Nouv. Ann. (2) XV. 212—217. O.

---

E. S. Burchett. Practical plane geometry. London, Glasgow. W. Collins Sons & Co.

Referat im Quart. J. of Sc. VI.

---

K. Zahradnik. Geometrie des Kreises. Casopis V. (Böhmisch.)

Für Schüler in Mittelschulen zusammengestellt. W.

---

L. Graf von Pfeil. Einige Wünsche, die Planimetrie betreffend. Grunert Arch. LVIII. 369-376.

Die hier ausgesprochenen Wünsche beziehen sich darauf, in die Lehrbücher der Planimetrie eine Reihe von praktischen Aufgaben aufzunehmen, welche meist fehlen. Unter Anderem werden die Aufgaben empfohlen, welche Kreise oder Kreisbogen nach beliebigen Verhältnissen theilen, Aufgaben, die also auf Näherungsmethoden beruhen. Indem der Herr Verf. auf einen früheren Aufsatz (Grunert Arch. XLIX.) hinweist, stellt er die betreffenden Sätze in der Reihenfolge zusammen, wie sie etwa in die Planimetrie eingefügt werden könnten. M.

---

Hubert Müller. Schulgemässe Behandlung der Symmetrielehre. Hoffmann Z. VII. 169-178, 257-265

Die Symmetrie wird hier nur in einem so geringen Umfang behandelt, wie sie auch wohl sonst gewöhnlich in Betracht gezogen zu werden pflegt, in einer Weise jedoch, die sich nicht

besonders durch Schärfe der Auffassung auszeichnet. Was hier centrische Symmetrie genannt wird, ist gar keine Symmetrie, ausser etwa in den wenigen Beispielen, wo sie vorkommt. Von der wirklichen centrischen Symmetrie ist nirgends die Rede.

H.

---

J. Hoüel. Bemerkungen über die Art, wie die Trigonometrie gelehrt werden soll. Casopis V. (Böhmisch).

Uebersetzung des Artikels aus Battaglini G. XIII. 72-79 von A. Kosteuer. (Siehe F. d. M. VII. p. 322.) W.

---

E. Hain. Zur Theorie der Symmetriepunkte erster Ordnung. Grunert Arch. LX. 71-78.

E. Hain. Die Höhenschnitte der Dreiecke aus vier Geraden. Grunert Arch. LX. 88-92.

E. Hain. Allgemeine Beziehungen der Symmetriepunkte. Grunert Arch. LIX. 420-426.

E. Hain. Ueber symmetrische Punktsysteme des Dreiecks. Grunert Arch. LVIII. 385-394.

Allgemeine Entwickelungen über vollständige und unvollständige Symmetriepunkte des Dreiecks. Schl.

---

E. Hain. Ueber eine Klasse irrationaler Symmetriepunkte des Dreiecks. Grunert Arch. LIX. 415-420.

Es giebt einen Symmetriepunkt des Dreiecks, für welchen die Summe der drei auf die Seiten herabgelassenen Normalen ein Minimum wird. Dieser Minimumpunkt, wie ihn der Verf. nennt, gehört zu den irrationalen Symmetriepunkten, weil seine trimetrischen Coordinaten sich nicht rational als Functionen der Seiten des Dreiecks ausdrücken lassen. Construirt man über den Seiten des Dreiecks äussere gleichseitige Dreiecke, so

schneiden sich die von den Ecken des Grunddreiecks nach den Spitzen der gleichseitigen Dreiecke gezogenen Transversalen in dem Minimumpunkte. Schl.

---

E. Hain. Ueber isogonal entsprechende Punkte des Dreiecks. Grunert Arch. LX. 92-99.

E. Hain. Beziehungen zwischen Dreieck und Kreis. Grunert Arch. LX. 78-88.

Wenn die durch zwei Punkte $P$ und $Q$ gehenden Ecktransversalen des Dreiecks mit den zugehörigen Halbirungslinien der Dreieckswinkel in jedem Eckpunkte des Dreiecks gleiche Winkel bilden, so heissen die Punkte $P$ und $Q$ einander isogonal entsprechende oder auch reciproke Punkte. Solche Punktepaare sind z. B. der Höhenschnittpunkt und der Mittelpunkt des Umkreises, ferner der Schwerpunkt und der Grebe'sche Punkt. Die reciproken Punkte aller Symmetriepunkte der ersten Dimension liegen auf einer Hyperbel, welche durch die Eckpunkte des Dreiecks und den Mittelpunkt des Inkreises geht. — In der zweiten Abhandlung beweist der Verf. den Satz, dass die Fusspunkte der von zwei isogonal entsprechenden Punkten auf die Seiten des Dreiecks gefällten Normalen auf einem Kreise liegen.

Schl.

---

E. Hain. Uebungsaufgaben. Grunert Arch. LIX. 93-98.

Zu beweisende Sätze über Dreiecke, in welchen eine Seite entweder das arithmetische oder geometrische oder harmonische Mittel der beiden andern ist, ferner über Transversalen, welche die Seiten eines Dreiecks in drei gleiche Theile theilen.

Schl.

---

F. Gelin. Cas remarquable d'inégalité de deux triangles. N. C. M. II. 338-340.

Dreiecke, deren Seiten resp. $(a, aq, aq^2)(aq, aq^2, aq^3)$ sind,

wo $q$, von 1 verschieden, zwischen $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ und $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ liegt, haben 2 gleiche Seiten und 3, cyclisch vertauschte, gleiche Winkel.

Mn. (O.)

---

A. Martin. Rational right angled triangles nearly isosceles. Analyst III. 47-50.

Die Seiten eines rationalen rechtwinkligen Dreiecks können nicht gleich sein, aber sie können um nur die Einheit verschieden sein. Der Verfasser giebt eine Methode, um eine Reihe von Dreiecken zu bilden, deren Seiten sich um die Einheit unterscheiden, und rechnet die Werthe der Katheten und der Hypotenuse eines solchen Dreiecks aus, die Werthe enthalten 62 Stellen. Die Katheten sind 105...440, 105...441, die Hypotenuse 149...009.

Glr. (C.)

---

L. Schlegel. Elementär Behandling af en Maximumsopgave. Zeuthen Tidsskr. (3) VI. 82-84.

Die Aufgabe ist, das grösste gleichschenklige Dreieck zu bestimmen, dessen Seiten durch drei feste Punkte hindurchgehen. Die Höhe des gesuchten Dreiecks wird gefunden, indem man auf einer der Geraden, die zwei der gegebenen Punkte verbindet, ein gleichschenkliges Dreieck verzeichnet und den dritten festen Punkt mit den gegenüber liegenden Ecken verbindet.

Gm.

---

M. Miksić. Das Drei- und Viereck in Verbindung mit den arithmetischen und geometrischen Reihen. Casopis V. (Böhmisch).

Betrachtet man die Mitten der Seiten eines Dreiecks, resp. Vierecks, als Ecken eines neuen Drei-, resp. Vierecks, und fährt man in dieser Ableitung neuer Figuren fort, so erhält man eine Reihe von Drei- und Vierecken, deren Flächeninhalt eine geometrische Progression mit dem Quotienten $\frac{1}{4}$, resp. $\frac{1}{2}$ bilden. Der

Verfasser betrachtet diese Flächeninhalte, ihre Summen, ihre Producte und die Logarithmen ihrer Producte. W.

---

P. BUSSCHOP. Problème de géométrie. N. C. M. II. 83-84.

Man soll ein Quadrat so in 8 Theile zerlegen, dass dieselben, passend vereinigt, 2 Quadrate bilden, von denen das eine doppelt so gross als das andere, oder 3, deren Inhalte sich verhalten wie: 2 : 3 : 4. Mn. (O.)

---

G. H. DARWIN. A geometrical puzzle. Messenger (2) VI. 87.

Ein Quadrat, auf welchem 64 gleiche Quadrate gezeichnet sind (Schachbrett), wird in 4 Stücke getheilt. Diese 4 Stücke können scheinbar so zusammengelegt werden, dass sie ein Rechteck von $5 \times 13$ Quadraten bilden, und wir sehen so 64 gleiche Quadrate in 65 transformirt. Dies wird erläutert (siehe F. d. M. I. 263). Glr. (O.)

---

P. MANSION. Simple proof of a geometrical theorem by determinants. Messenger (2) V. 154.

Elementarer Beweis des Satzes: Wenn eine Secante die Seiten *AaS*, *BbS* eines vollständigen Vierecks *Aa SbBI* in $\alpha$ und $\beta$ schneidet, und wenn die Linien *Ab* und *Ba* sich in *I*, $A\beta$, $B\alpha$ in *J*, $a\beta$ und $b\alpha$ in *K* schneiden, so liegen die Punkte *IJK* in gerader Linie. Glr. (O.)

---

P. MANSION. On the complete quadrilateral. Messenger (2) V. 189.

Einfacher Beweis einer Eigenschaft des vollständigen Vierseits mit Hülfe von Determinanten. Glr. (O.)

---

Weitere Aufgaben und Lehrsätze über das Dreieck und Viereck von S. Watson, R. Tucker, H. Murphy, S. Tebay, Ch. Ladd, R. F. Davis, N. Sarkar, H. G. Day, Wolstenholme, J. J. Walker, L. W. Jones, H. T. Gerrans, E. Rutter, J. L. McKenzie, W. J. C. Miller, A. B. Evans, S. A. Renshaw, R. W. Genese, M. Lallement, Moret-Blanc, Wisselink, Ch. Richard finden sich Educ. Times XXV. 41, 44, 55, 63, 68, 78. 84, 104, 105; XXVI. 24, 69, 76, 92, 98, 109; Nouv. Ann. (2) XV. 330, 367, 372, 383.

O.

---

W. Hillhouse. Trisection of an angle. Analyst III. 151-152.

Angenäherte geometrische Construction. Glr. (O.)

---

P. J. Vervaet. Beitrag zur Auflösung ebener Dreiecke. Casopis V. (Böhmisch.)

Es wird eine ganze Reihe eleganter Relationen zwischen den Seiten, Winkeln, Höhen, den Radien des um- und eingeschriebenen Kreises sowie dem Flächeninhalt eines ebenen Dreiecks abgeleitet. W.

---

A. Cayley. On a system of equations, connected with Malfatti's problem. Proc. L. M. S. VII. 38-42

Behandlung des Gleichungssystems:

$$\begin{cases} by^2+cz^2-2fyz-a(bc-f^2)=0 \\ cz^2+ax^2-2gzx-b(ca-g^2)=0 \\ ax^2+by^2-2hxy-c(ab-h^2)=0, \end{cases}$$

wo die Constanten $a, b, c, f, g, h$ durch die Relation:

$$abc-af^2-bg^2-ch^2+2fgh=0$$

mit einander verbunden sind. Scht.

---

Ed. Liebrecht. Eine geometrische Aufgabe. Grunert Arch. LIX. 445-448; LX. 99-100.

Eine analytische Behandlung der aus den Anwendungen der elliptischen Functionen bekannten Aufgabe: Einem gegebenen Kreise ein Dreieck so einzuschreiben, dass es zugleich einem zweiten gegebenen Kreise umgeschrieben ist. Auf dem vom Verf. gewählten Wege werden auch die beiden Fälle, wenn die Kreise einander schneiden oder ganz getrennt liegen, erledigt.

Schl.

---

Barisien. Démonstration des formules proposées par M. Desboves. Nouv. Ann. (2) XV. 160-165.

Beweis folgenden Satzes:

Sind $R$, $r$, $r'$, $r''$, $r'''$ resp. die Radien des einem Dreieck $ABC$ umgeschriebenen, des eingeschriebenen Kreises, und der drei äusseren Berührungskreise, und sind $x$, $y$, $z$ die Radien der drei Kreise, welche von innen den umgeschriebenen Kreis berühren und resp. den Winkeln $A$, $B$, $C$ eingeschrieben sind, so hat man

$$(1)\quad x=\frac{4Rr}{r''+r'''},\quad y=\frac{4Rr}{r'''+r'},\quad z=\frac{4Rr}{r'+r''}$$

$$(2)\quad 4r=2(x+y+z)-\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\right)$$

$$(3)\quad \frac{1}{2R}+\frac{2}{r}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

$$(4)\quad \frac{r'}{2Rr}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\ \text{etc.}$$

Mz.

---

Lampe. Das Apollonische Tactionsproblem. Pr. Ohlau.

Eine Bearbeitung des genannten Problems zum Zwecke der Erweiterung des geometrischen Unterrichts in der Prima unter Berücksichtigung der neueren Methoden. B. K.

---

H. T. Gerrans, H. Murphy, A. B. Evans. Solutions of a question (4882). Educ. Times XXV. 35.

Es sei $OA$ das Loth vom Mittelpunkt $O$ eines Kreises auf eine ausserhalb desselben liegende Gerade $Ab$, $BP$ eine Tangente an den Kreis im Punkte $P$, die $CA$ in $B$ schneidet. Verbindet man $AB$ und verlängert bis zum Schnittpunkt $D$ mit einem Radius, parallel $CA$ und geht $DE$ parallel $OA$, zieht man endlich $OB$ und $OQ$, senkrecht dazu, so gehen die Tangente $BP$ und die Geraden $DE$, $OQ$ durch denselben Punkt. O.

---

Boset & J. Neuberg. Théorème de géométrie. N. C. M. II. 273, 391.

Beweis der bekannten Relation zwischen dem Radius $R$ des umschriebenen Kreises eines Dreiecks mit den Seiten $a$, $b$, $c$ und den Radien $r$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ der ein- und der angeschriebenen Kreise. Man geht aus von $a^2 = (\alpha+r)(\beta+\gamma)$, $\alpha+\beta+\gamma = 4R+r$.
Mn. (O.)

---

R. Tucker. Solution of a question (5058). Educ. Times XXVI. 68-69.

Ueber den Diagonalen $2G_1$, $2G_2$, $2G_3$ eines einem Kreise eingeschriebenen Vierseits als Durchmessern sind Kreise construirt. Die diesen gemeinsame Sehne $C$ hat eine Länge gegeben durch

$$C^2 = 2(G_1^2+G_2^2+G_3^2)-G_1^2G_2^2G_3^2(G_1^{-4}+G_2^{-4}+G_3^{-4}).$$
O.

---

J. H. Turrell. Solution of a problem. Analyst III. 57-58.

Das gelöste Problem ist: Drei Kreise berühren einander von aussen. Zu finden die Radien von 3 Kreisen, welche in den von den ersten eingeschlossenen Raum beschrieben sind und von denen jeder 2 andere und 2 der gegebenen Kreise berührt.
Glr. (O.)

---

PAUL & MARÉCHAL. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 286-287.

Die Summe der Potenzen eines Punktes in Bezug auf die über den Seiten eines Vierseits beschriebenen Kreise ist gleich dem Vierfachen der Potenz desselben Punktes in Beziehung auf den Kreis, der die Verbindungslinie der Mitten der Diagonalen zum Durchmesser hat. O.

---

Weitere Aufgaben und Lehrsätze über den Kreis von S. FORDE, C. LEUDESDORF, A. B. EVANS, H. MURPHY finden sich Educ. Times XXVI. 103, 105, 106.

O.

---

A. GERMAN. Das irreguläre Siebeneck des Ulmer Mathematikers Joh. Faulhaber. Pr. Ulm.

Die ersten Seiten der Abhandlung enthalten einen interessanten historischen Ueberblick über das Leben und die Schriften des in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts zu Ulm lebenden angesehenen Mathematikers Johann Faulhaber. Aus seinem bedeutendsten Werke, der Ingenieurschule, Ulm 1630 Thl. I. p. 168 ist die Aufgabe über das Siebeneck, welche den Gegenstand der Abhandlung bildet, entnommen. Die Seiten eines irregulären einem Kreise einbeschriebenen Siebenecks sind in bestimmten Maasszahlen gegeben. Daraus sollen der Radius und die Winkel berechnet werden. Nach seiner Gewohnheit hat Faulhaber über die Lösung nur die kurze Andeutung gegeben, dass er die Aufgabe durch die Logarithmen auf eine besondere neue Manier gar schön resolviret habe. In neuerer Zeit haben Möbius und Günther den Gegenstand wieder aufgenommen und auf verschiedenartigem Wege die Lösung gesucht (vergleiche hierzu Crelle's J. III. p. 5, und die Sitzungsberichte der physik.-medicin. Societät zu Erlangen, 9. März 1874). Die vom Verf. gefundene Methode einer näherungsweisen Berechnung entspricht allen Anforderungen und giebt Resultate, welche die

von Faulhaber berechneten an Genauigkeit erheblich übertreffen. Schl.

---

G. Dostor. Les polygones rayonnés et les polygones étoilés. Grunert Arch. LIX. 375-387.

Eine Reihe elementarer Sätze über die Winkel, Seiten und Flächen der regulären Strahlen- und Sternpolygone. Schl.

---

W. Poezl. Lehrsatz. Bayr. Bl. XII. 218.

Elementarer Beweis eines bekannten Theorems von den Isoperimetern. Gr.

---

G. Holzmüller. Elementare Behandlung der Cycloiden. Schlömilch Z. XXI. 128-130.

Mz.

---

E. Lucas. Sur l'emploi dans la géométrie d'un nouveau principe des signes. N. C. M. II. 384-391.

Verschiedene Festsetzungen, um den Sinn der positiven Richtungen von Geraden in der Ebene und im Raum zu fixiren, der Art, dass man leicht die verschiedenen von 2 Geraden gebildeten Winkel unterscheiden kann, ebenso ihre inneren und äusseren Halbirenden etc. Die Note bezieht sich sowohl auf reine, wie auf analytische Geometrie. Mn. (O.)

---

A. Cayley. Theorem in trigonometry. Messenger (2) V. 164.

Wenn $A+B+C+F+G+H=0$, so ist

$$\begin{vmatrix} \sin(A+F)\sin(B+F)\sin(C+F), & \cos F, & \sin F \\ \sin(A+G)\sin(B+G)\sin(C+G), & \cos G, & \sin G \\ \sin(A+H)\sin(B+H)\sin(C+H), & \cos H, & \sin H \end{vmatrix} = 0.$$

Glr. (O.)

---

H. W. Harris. Solution of a question (4787). Educ. Times XXVI. 86-87.

Beweis, dass

$$3\left\{\frac{\sin^2(\theta-\alpha)}{\sin^2(\alpha-\beta)\sin^2(\alpha-\gamma)}+\frac{\sin^2(\theta-\beta)}{\sin^2(\beta-\alpha)\sin^2(\beta-\gamma)}+\frac{\sin^2(\theta-\gamma)}{\sin^2(\gamma-\alpha)\sin^2(\gamma-\beta)}\right\}$$

$$\cdot\left\{\frac{\sin^5(\theta-\alpha)}{\sin^5(\alpha-\beta)\sin^5(\alpha-\gamma)}+\frac{\sin^5(\theta-\beta)}{\sin^5(\beta-\alpha)\sin^5(\beta-\gamma)}+\frac{\sin^5(\theta-\gamma)}{\sin^5(\gamma-\alpha)\sin^5(\gamma-\beta)}\right\}$$

$$=5\left\{\frac{\sin^3(\theta-\alpha)}{\sin^3(\alpha-\beta)\sin^3(\alpha-\gamma)}+\frac{\sin^3(\theta-\beta)}{\sin^3(\beta-\alpha)\sin^3(\beta-\gamma)}+\frac{\sin^3(\theta-\gamma)}{\sin^3(\gamma-\alpha)\sin^3(\gamma-\beta)}\right\},$$

$$\left\{\frac{\sin^4(\theta-\alpha)}{\sin^4(\alpha-\beta)\sin^4(\alpha-\gamma)}+\frac{\sin^4(\theta-\beta)}{\sin^4(\beta-\alpha)\sin^4(\beta-\gamma)}+\frac{\sin^4(\theta-\gamma)}{\sin^4(\gamma-\alpha)\sin^4(\gamma-\beta)}\right\}$$

$$=\frac{30}{7}\left\{\frac{\sin^7(\theta-\alpha)}{\sin^7(\alpha-\beta)\sin^7(\alpha-\gamma)}+\frac{\sin^7(\theta-\beta)}{\sin^7(\beta-\alpha)\sin^7(\beta-\gamma)}+\frac{\sin^7(\theta-\gamma)}{\sin^7(\gamma-\alpha)\sin^7(\gamma-\beta)}\right\}.$$

O.

---

E. Catalan. Sur un produit de sinus. N. C. M. II. 214-217.

$$4m=\left[2^m\sin\frac{\pi}{2m}\cdot\sin\frac{2\pi}{2m}\cdots\frac{\sin(n-1)\pi}{2m}\right]^2.$$

Mn.

---

Pravaz. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 184-186.

In den Formeln zur Auflösung der geradlinigen Dreiecke kann man die Seiten $a$, $b$, $c$ durch

$$a\cos\alpha\cos 2\alpha\ldots\cos 2^{n-1}\alpha,\quad b\cos\beta\cos 2\beta\ldots\cos 2^{n-1}\beta,$$
$$c\cos\gamma\cos 2\gamma\ldots\cos 2^{n-1}\gamma,$$

und die Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ durch

$$p\pi\pm 2^n\alpha,\quad q\pi\pm 2^n\beta,\quad r\pi\pm 2^n\gamma$$

ersetzen. $n$ ist eine beliebige positive ganze Zahl, während $p, q, r$ zwar ebenfalls ganze Zahlen, aber ihrem Zeichen und Werth nach nicht willkürlich sind. O.

---

J. Plasil. Eine goniometrisch-physikalische Analogie. Casopis V. (Böhmisch).

Schreibt man in die Sextanten eines Kreises die Functionen sin, tg, sec, cosec, cotg, cos, so gelten von diesem Schema mehrere Sätze, die sich auf folgende drei reduciren lassen:

1. Das Product gegenüberliegender Functionen ist der Einheit gleich.
2. Das Product je zweier alternirenden Functionen gleicht der zwischen ihnen liegenden Function.
3. Das Product je dreier alternirenden Functionen gleicht der Einheit.

Analoge, sehr leicht auffindbare Sätze gelten nun in Bezug auf die sechs in gleicher Weise in einen Kreis eingeschriebenen prismatischen Hauptfarben, wobei natürlich der Einheit die weisse Farbe analog ist. W.

---

A. Paněk. Ueber einige trigonometrische Sätze. Casopis V. (Böhmisch).

W.

---

T. Merrick, J. O'Regan, A. W. Cave, Wolstenholme, R. Tucker, J. Hammond, S. A. Renshaw, J. W. Mulcaster. Solutions of a question (4977). Educ. Times XXVI. 39-40.

Wenn die Basis $BC$ eines Dreiecks $ABC$ durch $Q$ und $R$ in 3 gleiche Theile getheilt wird, so ist:

$$\sin BAR . \sin CAQ = 4 \sin BAQ . \sin CAR$$
$$(\operatorname{cotg} BAQ + \operatorname{cotg} QAR)(\operatorname{cotg} CAR + \operatorname{cotg} RAQ) = 4 \operatorname{cosec}^2 QAR.$$

O.

---

R. TUCKER and H. MURPHY. Solution of a question Educ. Times XXV. 18.

Bezeichnet man mit $r$ den Radius des umschriebenen Kreises eines Dreiecks, mit $d$ die Entfernung seines Mittelpunktes vom Schnittpunkt der Lothe und mit $\alpha, \beta, \gamma$ die Winkel desselben, so existirt die Relation

$$d^2 = r^2(1-8 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma).$$

O.

---

Weitere Lehrsätze und Aufgaben aus der Trigonometrie von H. BROCARD und AUBERT finden sich Nouv. Ann. (2) XV. 263, 318, 512.

O.

---

F. J. STUDNIČKA. Ableitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie aus einem Satze der Determinantentheorie. Prag. Ber. 1875. 1-9.

Bereits im Jahre 1829 hatte F. X. Moth in einer Schrift: „Die Lagrange'schen Relationen und ihre Anwendung zu einer neuen Entwickelung aller Gleichungen der sphärischen Trigonometrie", durch eine geschickte Verbindung von 11 Relationssystemen, die zuerst von Lagrange (Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires, Nouv. Mém. de l'Ac. de Berlin, 1773) eine grosse Menge der verschiedensten Formeln abgeleitet und so zusammengestellt, dass dann die einfache geometrische Interpretation derselben die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie unmittelbar liefert. Herr Studnicka erkannte in den meisten jener Formeln einfache Darstellungen oder Folgerungen des einen oder anderen Satzes aus der Determinantentheorie, und hat nun diese seit jener Zeit bedeutend

entwickelte Theorie benutzt, um direct die Ableitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie zu versuchen. M.

---

R. F. Davis, J. J. Walker, R. Tucker. Solutions of a question (4837). Educ. Times XXV. 63-64.

Zieht man durch die Ecken eines sphärischen Dreiecks Bogen, welche die Winkel $A$, $B$, $C$ halbiren und die gegenüberliegenden Seiten resp. in $D$, $E$, $F$ schneiden, so ist

$$\operatorname{tang} EDF = 2\,\frac{(\sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin B\sin C\cos a)^{\frac{1}{2}}}{1 + 2\cos A.}$$

O.

---

H. Brocard. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 183-184.

Beweis, dass die 4 einem sphärischen Dreieck ein- und angeschriebenen Kreise einen Kreis berühren. O.

---

C. G. Colson. Solution of a question (4683). Educ. Times XXV. 19-20.

Liegen 2 sphärische Dreiecke so, dass die Bogen, welche entsprechende Ecken verbinden, sich in einem Punkte schneiden, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einem grössten Kreise. O.

---

J. C. Penrose. An instrument for determining spherical triangles by mechanical action. Monthl. Not. XXXVI. 281-283.

Der beschriebene Apparat (von dem eine Zeichnung beigegeben ist) besteht aus 3 graduirten Flächen und einer freien Stange. Mit Hülfe davon können die gewöhnlichen Probleme der sphärischen Trigonometrie bestimmt werden durch blosse Ablesung, ohne Rechnung. Die gewöhnlichen Fälle bedürfen nur einer Operation, andere complicirte deren 2. Glr. (O.)

---

C. G. Colson. Proof of a proposition in spherical trigonometry. Messenger (2) V. 161-162.

Mit Hülfe von Quaternionen wird der Satz bewiesen, dass wenn 2 Diagonalen des vollständigen sphärischen Vierseits Quadranten sind, die dritte es ebenfalls ist. Glr. (O.)

---

F. E. Thieme. Untersuchungen über das sphärische Pascal'sche Sechseck und das sphärische Brianchon-sche Sechsseit. Grunert Arch. LX. 43-64.

Eine Uebertragung der vollständigen Figur des Pascal'schen Sechsecks und des Brianchon'schen Sechsseits auf die Kugeloberfläche. Der Begriff des sphärischen Pascal'schen Sechsecks wird hier jedoch in beschränkterem Sinne genommen, als es von Hesse (in den Vorlesungen über Raumgeometrie) geschehen ist. Während dieser sechs Punkte darunter versteht, welche auf dem Durchschnitt der Kugel mit einem beliebigen Kegel 2. Ordnung liegen, dessen Spitze mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammenfällt, bilden in der vorliegenden Arbeit sechs Punkte dann ein Pascal'sches Sechseck, wenn sie auf einem kleinen Kugelkreise liegen; der Kegel ist also speciell ein gerader Kreiskegel. — Die Untersuchung wird mit den Hülfsmitteln der sphärischen Trigonometrie geführt. B. K.

---

Künzer. Lösung einiger Aufgaben aus dem Gebiete der mathematischen Geographie. Pr. Strassburg i. P.

Der Verfasser meint, die Lösung von Aufgaben aus der mathematischen Geographie brauche die Kenntniss der sphärischen Trigonometrie nicht vorauszusetzen. Es gelingt ihm natürlich nur, den Namen „sphärische Trigonometrie“ zu umgehen; die Hauptformeln dieser Disciplin muss er theils als Einleitung, theils in den Aufgaben selbst ableiten. Die behandelten Aufgaben sind die gewöhnlichen: Kürzeste Entfernung zweier Orte auf der Erde. Länge eines Grades von einem Parallelkreis, Tagesbogen der

Sonne, Dämmerung, Sonnenuhren etc. Weder die Aufgaben selbst, noch die Art ihrer Behandlung bieten irgend etwas Bemerkenswerthes dar. Wn.

---

S. GÜNTHER. Ueber elementare Behandlung gewisser Punkte der mathematischen Geographie. Hoffmann Z. VII. 91-99.

Der erste Gegenstand ist die Berechnung der Tages- und Nachtbögen der Gestirne, wo die Anwendung sphärischer Trigonometrie ausgeschlossen wird. Dann handelt es sich um elementare Behandlung der Anziehung von Bergen zur Bestimmung der Dichtigkeit der Erde, namentlich um den gewöhnlich begangenen Fehler, welcher aus der Verlegung der anziehenden Masse in den Schwerpunkt und aus der Vernachlässigung gewisser Terme entspringt. Zuletzt wird eine elementare Erklärung der Nadirfluth gegeben. H.

---

C. MOSHAMMER. Zur Geometrie der Geraden. Schlömilch Z. XXI. 449.

Beweis, dass durch jeden Punkt des Raumes (im Allgemeinen) vier Strahlen gezogen werden können, welche mit zwei gegebenen Geraden $G$, $G'$ gleiche Winkel bilden und von $G$, $G'$ gleichen Abstand haben. Wn.

---

R. SCHMIDT. Ein Abschnitt aus dem stereometrischen Pensum der Obersecunda. Pr. Breslau.

Es wird die Lehre von den dreiseitigen Ecken behandelt, in welche jedoch eine Reihe von Sätzen über die Lage der Ebenen und Geraden eingeschaltet ist; die Stellung im Gesammtcursus erscheint daher hinsichtlich systematischer Ordnung nicht recht klar. Das Gegebene selbst ist correct, einfach und gut durchgearbeitet, die Discussion der Ecken vollständiger und sorgfältiger, als es sich gewöhnlich findet. H.

---

M. Azzarelli. Alcuni problemi sul tetraedro. Acc. P. d. N. L. XXIX. 126-217.

Mit einem ungewöhnlich grossen Aufwande von Rechnung behandelt der Verfasser eine Reihe von Aufgaben, welche das Tetraeder betreffen. Fällt man von einem Punkte Lothe auf die Tetraederflächen und verbindet die Fusspunkte zu einem neuen Tetraeder, so ist der Ort derjenigen Punkte, für welche das zugehörige Tetraeder einen constanten Inhalt hat, eine Fläche dritter Ordnung. Die darauf folgende Ableitung der Grundformel der sphärischen Trigonometrie (p. 136) ist falsch, insofern sie allgemein gelten soll; denn sie beruht auf der unrichtigen Annahme, dass es im Allgemeinen möglich sei, durch eine von zwei im Raume sich kreuzenden Geraden eine Ebene zu legen, welche senkrecht zur anderen ist. Es folgen Sätze über die Halbirungsebenen der Flächenwinkel, über die Winkel der Gegenkanten, über das Tetraeder mit rechtwinkligen Gegenkanten, Ausdrücke für Centrum und Radius der ein- und der umgeschriebenen Kugel als Functionen der Elemente des Tetraeders, endlich Schwerpunktsbestimmungen und einige daran sich anschliessende Aufgaben. B. K.

---

Aufgaben aus der Stereometrie von Moret-Blanc und Wisselink finden sich Nouv. Ann. (2) XV. 365-374. O.

---

G. Govi Del metodi proposti nel 1639 da Bonaventura Cavalieri. Atti Acc. R. Linc. (2) III. 173-178.

---

E. W. Hyde. Limits of the prismoidal formula. Analyst III. 113-116.

Der Verfasser betrachtet die Formel für das Volumen eines Körpers

$$V = \tfrac{1}{6}a(A_0 + 4A_{\frac{1}{2}a} + A_a),$$

wo $A_0$ der Schnitt durch die $YZ$-Ebene, $A_{\frac{1}{2}a}$ der durch die Ebene

$x = \frac{1}{2}a$ etc. ist. Indem er $z = \varphi(x, y)$ setzt und das Volumen durch Integration findet, bestimmt er, durch Vergleichung mit der obigen Formel, einige Formen von $\varphi$, für welche die Formel genau richtig ist, und andere, für welche sie es annähernd ist. In derselben Weise untersucht er die Formel von Weddle:

$$V = \tfrac{1}{20}a\,(A_0 + 5A_{\frac{1}{6}a} + A_{\frac{2}{6}a} + 6A_{\frac{3}{6}a} + A_{\frac{4}{6}a} + 5A_{\frac{5}{6}a} + A_a).$$

Glr. (O.)

---

E. Hess. Ueber die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Polyeder. Cassel, Th. Kay.

Herr Hess hatte schon früher in den Marb. Ber. von 1872 (F. d. M. IV. p. 245) über die möglichen Arten einiger gleicheckiger und einiger gleichflächiger Körper Untersuchungen angestellt, dann in den Marb. Ber. von 1874 (F. d. M. VI. p. 319) die gleicheckigen und gleichkantigen Polygone eingehend studirt, endlich im Jahre 1875 (F. d. M. VII. p. 308) den Begriff des regulären Körpers nach mehreren Richtungen erweitert, namentlich auch dahin, dass ein Körper, welcher sowohl gleicheckig wie auch gleichflächig ist, regulär heisse. Die vorliegende inhaltsreiche Schrift giebt nun die Erzeugung und die Eigenschaften der sämmtlichen Körper, welche im letztgenannten Sinne regulär und zugleich auch continuirlich und convex sind. Convex heisst ein Körper, dessen sämmtliche Flächen nur ausspringende ebene Winkel, und dessen sämmtliche Ecken nur ausspringende Flächenwinkel besitzen.

Ein Körper heisst gleicheckig resp. gleichflächig, wenn seine Ecken resp. Flächen sämmtlich einander gleich (congruent oder symmetrisch gleich) sind. Demnach existirt für jeden gleicheckigen Körper eine durch seine sämmtlichen Ecken gehende Kugel, für jeden gleichflächigen Körper eine seine sämmtlichen Flächen berührende Kugel. Die für die Vorstellung bequemste Gruppe von gleicheckigen resp. gleichflächigen Körpern (nämlich die erster Art, cf. das Folgende) hat schon Hessel (Marburg, Ehrhardt 1871, F. d. M. III. p. 248) behandelt. Fügt man zu den

gleicheckigen Körpern die beschränkende Bestimmung, dass die im Allgemeinen ja verschiedenen Flächen regulär sein sollen, oder zu den gleichflächigen Körpern, dass die Ecken regulär sein sollen, so erhält man die sogenannten halbregulären oder Archimedeischen Körper (Baltzer, Elemente, Stereom. § 7 und Meier Hirsch, Samml. geom. Aufg. II. p. 139).

Zu den gleicheckig-gleichflächigen Körpern gehören nun zunächst natürlich diejenigen Körper, welche sowohl zu der Hessel'schen Gruppe der gleicheckigen Körper, wie auch zu der Hessel'schen Gruppe der gleichflächigen Körper gehören. Beiden Gruppen gemeinsam ist aber ausser den 5 eigentlich regulären Körpern nur noch 1 Körper, welcher bei Hessel sägerandiges Tetraeder, in der Krystallographie rhombisches Sphenoid genannt ist. Dieser Körper entsteht aus dem rhombischen Oktaeder durch Erweiterung der abwechselnden Flächen; sein Netz bekommt man durch Verbindung der Mitten der Seiten eines im Allgemeinen ungleichseitigen Dreiecks. Ist letzteres speciell gleichschenklig, so entsteht das Netz des kronrandigen Tetraeders; ist es endlich gleichseitig, das Netz des eigentlich regulären Tetraeders.

Damit ist aber die Zahl aller möglichen gleicheckig-gleichflächigen Polyeder noch nicht erschöpft. Gerade so, wie zu dem gewöhnlichen regulären Fünfeck das reguläre Pentagramm als Fünfeck zweiter Art hinzutritt, so gesellen sich zu den erwähnten Polyedern noch Polyeder höherer Art. Die Definition der *Artzahl* bei einem Polyeder lässt sich kurz so aussprechen. Ein Polyeder ist $A^{ter}$ Art, wenn die Summe der Polarecken aller Ecken desselben $A$ Kugeln beträgt. Die Artzahl eines Polyeders bestimmt man u. A. durch folgende Construction. Man unterscheide zunächst bei jeder Fläche des Polyeders die beiden Halbräume, in welche sie den Raum zerspaltet als Innenseite und Aussenseite. Dann liegt ein beliebig zu wählender Punkt für gewisse $i$ Flächen auf der Innenseite, für gewisse $e$ Flächen auf der Aussenseite. Dann bestimme man auf jedem von den $i$ durch $P$ zu den $i$ Flächen gezogenen Lothen denjenigen von den beiden durch $P$ bestimmten Halbstrahlen, auf welchem der Fusspunkt liegt; von den durch $P$ zu jenen $e$ Flächen gezogenen

Lothen nehme man dagegen denjenigen Halbstrahl, auf welchem der Fusspunkt *nicht* liegt. Endlich verbinde man durch Ebenen immer zwei Halbstrahlen, welche zu zwei *solchen* Flächen senkrecht sind, die sich in einer Kante des Polyeders schneiden. So erhält man um $P$ als Scheitel zu jeder Ecke des Polyeders die Polarecke. Die so construirten Polarecken sämmtlicher Ecken bestimmen auf einer um $P$ beschriebenen Kugelfläche ein Netz von sphärischen Polygonen. Bedeckt dieses Netz die Kugelfläche $A$mal, so ist die Artzahl des Polyeders gleich $A$. Analog kann man die Artzahl eines ebenen Polygons oder einer Ecke bestimmen. Man kann die Artzahl $A$ eines Polyeders auch aus der Summe $\Sigma\alpha$ der Artzahlen sämmtlicher Ecken, der Summe $\Sigma a$ der Artzahlen sämmtlicher Flächen, und der Anzahl $K$ sämmtlicher Kanten berechnen. Dies geschieht durch die *erweiterte Euler'sche Formel:*

$$\Sigma\alpha + \Sigma a = K + 2 . A,$$

eine Formel, welche schon Wiener zur Bestimmung der Arten der Poinsot'schen Körper benutzt hat, und welche Herr Hess hier vervollständigt, indem er rechts vom Gleichheitszeichen die Summe $\Sigma b$ der überstumpfen ebenen Winkel hinzufügt.

Gemäss der eben gegebenen Definition der Artzahl, sind die eigentlich regulären Körper und das oben erwähnte sägerandige Tetraeder erster Art. Nach des Verfassers Untersuchungen existiren ausserdem *keine* gleicheckig-gleichflächigen Körper erster Art, wohl aber noch 12 und nicht mehr als 12 gleicheckig-gleichflächige Körper höherer Art, von welchen 4 die bekannten Poinsot'schen Körper sind, und die übrigen 8 Körper von Herrn Hess entdeckt sind. Er findet diese Körper und ihre Eigenschaften namentlich dadurch, dass er die Grenzflächen der bekannten, nur gleichflächigen Polyeder erster Art erweitert, und diejenigen Schnittpunkte dieser Ebenen aufsucht, welche auf einer Kugel so liegen, wie die Ecken eines gleicheckigen Polyeders erster Art. Es reicht aus, wenn man so das reguläre Pentagondodekaeder, das reguläre Ikosaeder und das sogenannte Triakontaeder behandelt. Die von den hinreichend verlängerten Ebenen jedes dieser 3 Hilfs-Körper gebildete Raumfigur wird dadurch

veranschaulicht, dass die Figur gezeichnet ist, welche entsteht, wenn man auf irgend einer Ebene dieses Körpers die Spuren aller übrigen Ebenen construirt.

Auf solche Weise gewinnt Herr Hess die Mittel, um bei seinen 8 neuen Körpern alle wünschenswerthen charakteristischen Zahlen und auch alle metrischen Verhältnisse aufzufinden. Eine auch nur kurz gefasste Beschreibung dieser Körper würde den hier gestatteten Raum überschreiten. Ueberdies hat Herr Hess selbst im Königsb. Repert. I. p. 229 eine solche Beschreibung gegeben. Schliesslich sei noch erwähnt, dass die vorliegende Schrift auch von Herrn Günther in Hoffm. Zeitschr. VIII. p. 225 ausführlich besprochen ist. Dort ist auch eine Figur für die Bestimmung der Artzahl eines ebenen Polygons gezeichnet.

Scht.

---

G. Dostor. Propriétés nouvelles des polyèdres réguliers convexes. Grunert Arch. LIX 50-58.

Es werden zwischen dem Radius $R$ der einem regulären convexen Polyeder umgeschriebenen Kugel, dem Radius $r$ der demselben eingeschriebenen und dem Radius $\varrho$ der die Kanten desselben berührenden Kugel, der Kantenlänge $a$, dem Volumen $V$, dem Neigungswinkel $2\alpha$ zweier angrenzenden Flächen durch elementare Betrachtungen eine Reihe von Gleichungen abgeleitet, von welchen wir, um von der Art derselben eine Vorstellung zu geben, hier einige anführen; es wird mit $N$ die Zahl der Flächen des Polyeders, mit $n$ die Seitenzahl einer jeden Fläche und mit $m$ die Zahl der in jeder Ecke zusammenstossenden Kanten bezeichnet:

$$r\sin\frac{\pi}{n} = \varrho\cos\frac{\pi}{m},\quad R\cos\frac{\pi}{n} = \varrho\sin\frac{\pi}{m},\quad \sin\alpha = \frac{\cos\frac{\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{n}},$$

$$2r = a\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\alpha,\quad 2R = a\operatorname{tg}\frac{\pi}{m}\operatorname{tg}\alpha,\quad 2\varrho = a\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{m}}\operatorname{tg}\alpha,$$

$$V = \frac{1}{24} Nna^3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} Nnr^3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

$$= \frac{1}{3} NnR^3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{m} \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{6} Nn\varrho^3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \sin 2\alpha \cos \alpha.$$

Abgeleitet werden diese Gleichungen durch elementare Betrachtungen, welche sich auf ein Tetraeder beziehen, das von einer beliebigen Ecke $A$ des Polyeders, dem Mittelpunkt $J$ einer durch $A$ gehenden Kante, dem Mittelpunkt $c$ einer der beiden durch diese Kante gehenden Flächen und dem Mittelpunkt $O$ des ganzen Polyeders gebildet wird. Die den 5 regulären convexen Polyedern entsprechenden bestimmten Werthe für $n$, $m$, $N$ werden in diese Gleichungen eingesetzt und dadurch die meist bekannten specielleren, den einzelnen Polyedern zukommenden Relationen erhalten.

Schz.

---

B. Niewenglowski. Sur un théorème de Jacques Bernoulli. Nouv. Ann. (2) XV. 127-129.

Es wird auf elementare Weise der Satz bewiesen: Hat man einen schiefen Kegel mit Kreisbasis, legt dann durch die Gerade, welche die Spitze des Kegels mit dem Mittelpunkt der Basis verbindet, die zur Basis senkrechte Ebene und führt einen beliebigen ebenen Schnitt durch den Kegel, dessen Ebene aber zur vorigen Ebene senkrecht sein muss — wie im Beweise ausdrücklich vorausgesetzt wird — so ist das latus rectum $\left(\frac{2b^2}{a}\right)$ dieses Schnittes dem Durchmesser desjenigen Kreises gleich, der der Basis parallel ist und von der Kegelspitze denselben Abstand, wie der geführte Schnitt, hat.

Mz.

---

— —. Om Winkler-Tredeling ved Objelp af Passer. Zeuthen Tidsskr. (3) VI. 84-85.

Uebersetzung eines Artikels von Lucas in Catalan's Nouvelle Corresp. Mathém. 1876. (siehe p. 344).

Gm.

---

E. LUCAS. De la trisection de l'angle à l'aide du compas. Nouv. Ann. (2) XV. 8-9; N. C. M. II. 14-15.

Descartes spricht in einem Briefe an Mersenne von der Theilung des Kreises in siebenundzwanzig Theile mit Hülfe eines Cylinders. Herr Lucas giebt in der vorliegenden Notiz eine Construction, wie man mit Hülfe des Cirkels auf einem Cylinder die Dreitheilung eines Winkels vollziehen kann, und verificirt seine Lösung (siehe F. d. M. VII. 350). O.

---

## Capitel 4.

## Darstellende Geometrie.

M. KUCHYNKA. Ueber die wissenschaftlichen Grundlagen der Zeichenkunst von ihrem Ursprung bis zur Mitte des 15ten Jahrhunderts. Casopis V. (Böhmisch.)

W.

---

J. KREUSZEL. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Brünn, Karafirt.

---

F. SCHÜRMANN. Unterricht in der Projectionslehre. Iserlohn.

---

CHR. SCHERLING. Grundzüge der axonometrischen und schiefen Parallelprojection. Pr. Lübeck. Sep. Leipzig.

Der Verfasser will eine Axonometrie ohne trigonometrische Entwickelung geben und sucht dies nach dem Vorgange von Staudigl (Axonometrie und schiefe Parallelprojection, Wien 1875) durch Drehung zu erreichen. Zunächst wird schon das Object durch die bekannte Drehung um eine verticale Axe in die Lage versetzt gedacht, dass die horizontalen Hauptdimensionen ($x$-Axe,

$y$-Axe) zur Aufrisssebene schräg sind; darauf wird das Object um eine zur Kreuzrissebene normale Axe gedreht; Herr Scherling dreht das System der Grund- und Kreuzrissebene, womit doch aber nichts erzielt wird. Etwas Neues will der Verfasser nicht bringen; ich erlaube mir ihn auf die nicht ganz präcise Fassung der Sätze in § 6 und 12 hinzuweisen. Sm.

---

G. Hauck. Grundzüge einer allgemeinen axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective. Schlömilch Z. XXI. 81-99.

G. Hauck. Axonometrische Theorie der perspectivischen und projectivischen Collineation im Raume. Schlömilch Z. XXI. 402-426.

In dem ersten Aufsatze wird ein perspectiv darzustellendes Object durch die auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem $O, x\, y\, z$ bezogenen Coordinaten seiner Punkte gegeben. Die Bilder der drei positiven Axen seien die 3 Geraden $\omega$, $\xi\eta\zeta$, welche die Winkel $\omega_{12}$, $\omega_{23}$, $\omega_{31}$ oder $\xi\omega\eta$ etc. bilden. Sind $G_1$, $G_2$, $G_3$ die Gegenpunkte der Axen, d. h. die Punkte auf denselben, deren Bilder unendlich fern sind, und $F_1$, $F_2$, $F_3$ die Fluchtpunkte, d. h. die Bilder der unendlich fernen Punkte der Axen, so werden die 3 Gegenstrecken $OG_i = g_i$, die 3 Fluchtstrecken $\omega F_i = f_i$ und die 3 Winkel $\omega_{ik}$ als die Grundconstanten eingeführt, hingegen die 3 Coordinaten des Auges $A$ und die 3 Axenabschnitte der Tafel als die 6 Orientirungsconstanten. Jene werden durch diese ausgedrückt, und darauf ein Verfahren gezeigt, wie mit Hilfe von Reductionsmasstäben aus den wahren Coordinaten eines Punktes die Bilder derselben und mit Hilfe dieser und der Reductionsconstanten das Bild des Punktes selbst construirt wird. Durch Elimination der Orientirungsconstanten ergeben sich Relationen zwischen den Grundconstanten, welche ausdrücken, dass die Summe der drei $\omega_{ik}$ 360° ist und die Dreiecke $G_1\, G_2\, G_3$ und $F_1\, F_2\, F_3$ ähnlich sind. Construirt man aus den 3 Grössen $\sqrt{g_i^2+g_k^2}$ als Seiten ein Dreieck, so geben die Verbindungslinien

eines beliebigen Punktes der Ebene desselben mit den Ecken die drei Winkel $\omega_{ik}$ und sind den Fluchtstrecken proportional. Zwei Fälle werden ferner betrachtet: 1) die drei Fluchtstrecken und zwei (oder drei) Winkel $\omega_{ik}$, sowie das Verhältniss $\lambda = AO.A\omega$, sind gegeben, und ausführlicher 2) die sechs $g_i$, $f_i$ sind gegeben. Für $\lambda^2$ ergiebt sich eine quadratische Gleichung, woraus sich die den Werthen der $g_i$, $f_i$ gesetzen Schranken ergeben; ferner werden Ausdrücke für die $\omega_{ik}$, für die Coordinaten $a_i$ von $A$, die Axenabschnitte der Tafel ($m_i = (1-\lambda)g_i$), für die Augdistanz $\delta$, d. i. das Loth aus $A$ auf die Tafel, für die Coordinaten des Hauptpunktes $H$ (des Fusspunktes dieses Lothes) ermittelt, der sich als Höhenpunkt von $F_1$ $F_2$ $F_3$ ergiebt.

Den Schluss bilden specielle Fälle, die sich durch besondere Lage des Auges zur Tafel, sowie durch den Uebergang zur Parallelprojection ergeben.

Im zweiten Aufsatze werden die früheren Untersuchungen auf die perspective und projective (d. h. allgemeine) Collineation im Raume ausgedehnt. Bei der ersteren (Reliefperspective) sind Orientirungsconstanten die 3 Coordinaten $a_i$ des Collineationscentrums $A$, die 3 Axenabschnitte $m_i$ der Collineationsebene und das Verhältniss $q$ der Axenabschnitte der zu derselben parallelen Fluchtebene — welche der unendlich fernen des Objectsystems im Bilde entspricht — zu den $m_i$. Durch diese werden wieder die Flucht- und Gegenstrecken, sowie die Winkel $\omega_{ik}$ des Dreikants $\Omega\xi\eta\zeta$, in welches das Coordinatenaxen-Dreikant $O, xyz$ übergeht, ferner die Augdistanz und die Coordinaten des Augpunktes (Loth aus $A$ auf die Fluchtebene und Fusspunkt desselben) ausgedrückt. Doch ist nicht präcisirt, was unter diesen Axendreikanten gemeint ist, ob nur die der positiven, wie wahrscheinlich, oder die der ganzen Axen, sowie, welches die positiven Coordinatenaxen im Object- und im Bildsystem sind, da dies nicht selbstverständlich ist, indem z. B., wenn $G_1$ auf der positiven $x$-Axe liegt, die eine halbe $\xi$-Axe aus $OG_1$, die andere aus dem Reste der positiven und der ganzen negativen $x$-Axe hervorgeht; es scheint, dass im Objectraume die die $G_i$ enthaltenden Halbaxen und im Bildraume die aus der $OG_i$ hervorgehenden die

positiven sein sollen. Ferner scheinen die Begriffe der Gleichstimmigkeit und Ungleichstimmigkeit nicht klargestellt; Referent kann sich von der Richtigkeit der Sätze auf S. 407 nicht überzeugen; der Verfasser hat nicht an den Fall gedacht, dass ein Punkt und die Collineationsebene auf verschiedenen Seiten der Gegenebene liegen, oder ihn wenigstens nicht ausgeschlossen. Es giebt stets gleichstimmige entsprechende Figuren und ungleichstimmige bei derselben Collineation. Auch hier sind die Dreiecke $F_1 F_2 F_3$ $G_1 G_2 G_3$ ähnlich; die Formeln und Constructionen sind, mit geringen Modificationen, dieselben, wie bei der Planperspective ($q = 1$).

Der Verfasser geht nun zur allgemeinen (projectiven) Collineation über, führt die für die Construction, aber nicht für die analytische Behandlung geeigneten „axonometrischen Coordinaten“ ein, welche wohl die Cartesischen als speciellen Fall liefern, jedoch zu ihnen nicht in linearer Beziehung stehen, giebt die Möbius'sche Construction des einem 6ten Punkte entsprechenden Punktes, wenn 5 Paare entsprechender Punkte gegeben sind, und zeigt, dass die Aehnlichkeit des Gegen- und des Fluchtpunktdreiecks zweier entsprechender Dreistrahle z. B. $O, x\, y\, z$; $\Omega, \xi \eta \zeta$ genügt, damit die beiden Systeme in perspective Lage gebracht werden können, und wie dies geschieht, wenn die beiden Dreiecke und ein Paar entsprechender Punkte (z. B. $O$; $\Omega$) bekannt sind. Die ausführliche Behandlung der am Ende von § 12 nur berührten Aufgabe, zu zwei allgemein collinearen Systemen ein mit beiden perspectiv collineares zu construiren, wäre erwünscht gewesen. Es folgt die Transformation der axonometrischen Coordinaten in coaxiale Cartesische, die Ermittelung des Grundconstantensystems, durch welches ein Ellipsoid in eine Kugel transformirt wird; sodann die Berechnung der Grundconstanten $q$, $g_i$, $f_i$ durch die Coefficienten der drei Gleichungen, vermittelst welcher die Coordinaten $x$, $y$, $z$ eines Punktes des Originalsystems durch die Coordinaten des entsprechenden Punktes in Bezug auf ein beliebiges ebenfalls rechtwinkliges System $X$, $Y$, $Z$ ausgedrückt werden, wobei sich die $q$, $g_i$, $f_i$ auf das Coordinatensystem $O$, $x$, $y$, $z$ und dessen Transformation beziehen; was in

Bezug auf die Gleich- und Ungleichstimmigkeit gesagt ist, dürfte wohl zu verbessern sein. Den Schluss bilden die Specialisirung auf ebene Systeme und die Vergleichung der axonometrischen Coordinaten mit den Chasles'schen und Fiedler'schen.

Sm.

---

Booth, J. J. Walker. Solution of a question (4952). Educ. Times XXV. 87-88.

Von einem gegebenen Punkt wird ein Loth auf eine gegebene Gerade gefällt. Punkt und Gerade werden orthogonal auf eine Ebene projicirt, welche den Winkel $\theta$ mit der Ebene bildet, die Punkt und Gerade enthält, und von der Projection des Punktes ein Loth auf die Projection der Geraden gefällt. Dann ist das Verhältniss dieser Lothe unabhängig von der Lage des Punktes.

O.

---

K. Klekler. Neue Methode zur Bestimmung der wahren Grösse des Neigungswinkels zweier durch ihre Spuren gegebenen Ebenen. Hoffmann Z. VII. 286-288.

Mit Anwendung des Satzes, dass 2 projectivische Strahlenbüschel congruent sind, wenn irgend 2 rechtwinkligen Strahlenpaaren des einen Büchels 2 solche im zweiten entsprechen, lässt sich leicht ein dem gesuchten Neigungswinkelbüschel congruentes Strahlenbüschel construiren. Den Mittelpunkt findet man als Durchschnitt zweier Kreise. Von ihm aus gehen dann die Schenkel des zu bestimmenden Winkels nach den Schnittpunkten der gegebenen Spuren mit der Axe.

H.

---

R. Müller. Beziehungen zwischen Meridian- und Contourcurve orthogonal dargestellter Rotationsflächen. Schlömilch Z. XXI. 265-278.

Durch die von Herrn Niemtschik (Wiener Berichte 1866), sowie von Herrn Burmester (Theorie und Darstellung der Beleuchtung, Leipzig 1875, S. 114) angegebenen Constructionen der Contouren orthogonal dargestellter Rotationsflächen werden die

Punkte dieser Contouren, d. i. der Normalschnitte der auf der Grundriss- bez. Aufrissebene senkrechten Tangentencylinder solcher Flächen in bestimmter Weise den Punkten ihrer Meridiancurve zugeordnet. Irgend ein Punkt der Meridianebene beschreibt nun bei der Rotation einen Kreis, dessen Projection in der Grundriss- und Aufrissebene je eine Ellipse ist. Umgekehrt kann ein beliebiger Punkt der Grundrissebene als Projection jedes Punktes der in ihm errichteten Senkrechten betrachtet werden, und alle diese Punkte bestimmen nach der Rotation um die gegebene Axe auf der Meridianebene eine Hyperbel; also entspricht jedem Punkt der Grundriss- oder Aufrissebene eine Hyperbel in der Meridianebene, und jedem Punkt der letzteren eine Ellipse in den ersteren.

Der Herr Verfasser erkennt hierin einen speciellen Fall der von Plücker (Anal.-geom. Entwickelungen Bd. II. 251) und Lie (Ueber Complexe etc. Clebsch. Ann. Bd. V.) dargestellten räumlichen Reciprocität und gelangt so unter anderen zu folgendem Satz: Hat man in der Meridian- und Grundrissebene zwei einander zugeordnete Curven $\sigma$ und $\Sigma$, so entspricht den Punkten von $\sigma$ ein Ellipsencomplex, welcher $\Sigma$ umhüllt, und den Punkten von $\Sigma$ ein Hyperbelcomplex, von welchem $\sigma$ umhüllt wird.

Ohne die allgemeinen Beziehungen dieser Curven weiter zu verfolgen, bestimmt der Herr Verfasser darauf unter Benutzung der oben bezeichneten Constructionen in einigen einfachen Fällen analytisch die Gleichung der Contourcurve. Schz.

---

R. Niemtschik. Ueber die Construction der Umhüllungsflächen variabler Kugeln. Wien. Ber. 1876.

Es wird die Umhüllungsfläche von Kugeln dargestellt, deren Mittelpunkte in einer Ebene liegen und zwei in dieser Ebene befindliche Kreise, den einen von aussen, den anderen von innen berühren; die Selbstschattengrenze dieser Fläche wird construirt. Die Mittelpunkte dieser Kugeln liegen alle auf einer Ellipse, deren Brennpunkte die Mittelpunkte jener beiden Kreise sind, und deren grosse Axe gleich der Summe ihrer Radien ist. Daran

schliesst sich die Darstellung der Umhüllungsflächen, welche durch eine Kugel erzeugt werden, deren Mittelpunkt auf einem Kreise oder auf einer Schraubenlinie sich fortbewegt, während ihr Radius gleichmässig bis zur Null abnimmt. Schz.

---

A. Studnička. Der Toulmin'sche Ellipsograph. Casopis V. (Böhmisch).

Nach dem Englischen im Sc. Americ. J. W.

---

## Capitel 5.

## Neuere synthetische Geometrie.

### A. Ebene Gebilde.

Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie. Zweiter Theil. Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projectivische Eigenschaften, bearbeitet von H. Schröter. Zweite Auflage. Leipzig, Teubner.

Von diesem Buche, das auf Grund von Universitäts-Vorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Steiner's bearbeitet, 1867 in erster Auflage erschien und bald auch in's Französische übertragen wurde, liegt uns die zweite Auflage vor. Im Wesentlichen ist es unverändert geblieben; doch weist es zahlreiche Verbesserungen, Zusätze, mehr Citate, einige ausführlichere oder veränderte Beweise auf; vor allem aber unterscheidet es sich von der ersten Auflage durch die Hinzufügung von Aufgaben und Sätzen zu den drei ersten Abschnitten, worin Herr Schröter Steiner gefolgt ist, der ja auch seiner systematischen Entwickelung einen derartigen Anhang gegeben und andere zahlreiche Aufgaben und Lehrsätze im Crelle'schen Journale veröffentlicht hat. Wenn auch anzunehmen ist, dass diese Steiner-Schröter'schen Vorlesungen von der ersten Auflage her allgemein bekannt sind, so

scheint es doch bei einem Werke von dieser Bedeutung nicht überflüssig, ein Referat hier zu geben, zumal die erste Auflage vor der Zeit erschienen ist, von der ab die Besprechungen im Jahrbuche geschehen.

Im ersten Abschnitte (projective Beziehung gerader Punktreihen und ebener Strahlbüschel auf einander) werden die ersten Principien aus der systematischen Entwickelung gegeben, jedoch mit Berücksichtigung des Möbius'schen Richtungs- und Drehungs-Sinnes; es sind ferner hinzugefügt die Beziehungen zwischen den 24 Werthen des Doppelverhältnisses, die Bestimmung der doppelten Systeme entsprechender gleicher Strecken, bez. Winkel bei projectiven Punktreihen oder Strahlbüscheln, eine ausführliche Behandlung der Involution mit der Ermittlung des gemeinsamen Paars zweier Involutionen auf demselben Träger. Der Schluss bringt specielle Fälle: ausgeartete Projectivitäten, projectiv-ähnliche und projectiv-gleiche Reihen, projectiv-gleiche Büschel, die bei perspectiver Lage zum Begriffe der unendlich fernen Geraden $G_\infty$ der Ebene führen, endlich die Schnittinvolution der $G_\infty$ mit einer circularen Strahlinvolution, welche den Begriff der unendlich fernen Kreispunkte liefert, die also in dieser Auflage schon hier eingeführt werden.

Der zweite Abschnitt behandelt den Kegelschnitt als Erzeugniss projectiver Gebilde: die beiden dualen Erzeugungen und die Identität des Erzeugnisses werden besprochen; Pascal's und Brianchon's Sätze folgen mit einer ausführlichen Betrachtung der Figur des Hexagramma mysticum, theils im Texte, theils in den Aufgaben. Das Verhalten zur $G_\infty$ giebt die Eintheilung in Ellipse, Parabel, Hyperbel nebst Kriterien, wie die erzeugenden Gebilde liegen müssen, um sie zu erzeugen, wobei auch die Specialfälle des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel berücksichtigt werden. Es folgt die Betrachtung der einem Kegelschnitte umgeschriebenen Vierseite und eingeschriebenen Vierecke; das Auftreten der Involution wird direct aus der Erzeugung abgeleitet: sie führt zu den Polareigenschaften und speciell zu den Eigenschaften der Durchmesser, Axen, Brennpunkte; die metrischen Relationen sind noch etwas ausführlicher behandelt als

früher. Neu aufgenommen ist das Normalenproblem; den Schluss bildet eine Construction des Krümmungscentrums.

Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit den beiden dualen Gebilden eines Büschels und einer Schaar von Kegelschnitten; es werden je drei Erzeugungsweisen behandelt, von denen die letzte auch vollständig imaginäre — durch Involution definirte — Grundpunkte, bez. Grundtangenten ermöglicht. Bei jeder wird die Involutionseigenschaft des Büschels oder der Schaar nachgewiesen, die zu verschiedenen Constructionen führt. Der Büschel der gleichseitigen Hyperbeln um ein Dreieck, die Schaar der ein Dreieck tangirenden Parabeln findet besondere Berücksichtigung. Der Untersuchung der Vertheilung der verschiedenen Kegelschnitte in einem Büschel (einer Schaar) folgen die Polar-Eigenschaften, insbesondere wird der Ort der Mittelpunkte betrachtet. Darauf wird der interessante Fall von drei conjugirten Kegelschnittbüscheln besprochen, sodann mehrere Specialfälle: der Büschel (oder die Schaar) sich doppelt berührender Kegelschnitte, die Schaar confocaler Kegelschnitte, endlich auch die „gemischten Systeme von Kegelschnitten“, welche 3, 2, 1 Punkte und 1, 2, 3 Tangenten gemein haben.

Es folgt eine ausführliche Discussion der Realität der 4 gemeinsamen Punkte und Tangenten zweier Kegelschnitte; am Schluss dieses Abschnittes findet sich die Betrachtung harmonisch zugeordneter Kegelschnitte, d. h. solcher 4 Kegelschnitte, von denen jeder seine eigene Polarfigur in Bezug auf die drei andern ist; die 4 Basen, in Bezug auf welche zwei gegebene Kegelschnitte zu einander polar sind, bilden ebenfalls eine solche Gruppe. Hier tritt der imaginäre Kegelschnitt auf und erfordert eine Erweiterung des Begriffs Kegelschnitt.

Diese geschieht im vierten Abschnitte. Die Polareigenschaften des Kegelschnitts werden unabhängig von demselben betrachtet und liefern ein stets reelles Gebilde, das Involutionsnetz oder Polarsystem, das, je nachdem es Involutionen mit reellen Doppelpunkten enthält oder nicht, einen reellen oder imaginären (besser wohl wegen der reellen analytischen Gleichung: reell-imaginären) Kegelschnitt vertritt: den Kern (die

Ordnungscurve nach Staudt) des Polarsystems. Für ein solches System werden mehrere Constructionen aus einfachen, doppelten und dreifachen Bedingungen (einfache: gegeben ein Paar conjugirte Punkte oder Geraden, doppelte: Pol und Polare oder eine Involution conjugirter Elemente gegeben, dreifache: gegeben ein Tripel conjugirter Elemente) mitgetheilt, insbesondere der allgemeinste Fall der Construction aus 5 Paaren conjugirter Punkte; zu den linearen Lösungen der früheren Auflage sind noch einige vom zweiten Grade gefügt. Hieran schliesst sich für diese allgemeinere Grundlage die Theorie der Durchmesser, Axen, Brennpunkte.

Zwei Polarsysteme führen zur Verallgemeinerung des Büschels und der Schaar von Kegelschnitten, unter die jetzt auch imaginäre aufgenommen sind; drei Polarsysteme zu den dualen Figuren des Kegelschnitt-Netzes und -Gewebes mit ihren Hesse'schen (Tripel-) und Cayley'schen Curven. In diesem Paragraphen ist am meisten verändert worden; z. B. ist der Begriff der conischen Polare eines Punktes der Tripelcurve eines Netzes eingeführt worden, die Untersuchung der Lage und Realität der Wendepunkte dieser Curve aufgenommen, der Zusammenhang des Netzes und des Gewebes, die aus denselben drei Polarsystemen (Kegelschnitten) abgeleitet sind, besprochen insbesondere die Identität der Cayley'schen Curve des einen mit der Hesse'schen des andern (vgl. die Abh. von Schröter, Clebsch. Ann. V. VI.). Endlich werden noch die 3 Paare Punkte betrachtet, welche in Bezug auf 4 Kegelschnitte conjugirt sind (vergl. des Referenten Flächen 3[ter] Ordnung §38. 40; Siebeck, Brioschi Ann. (2) II. 65, sowie St. Smith Proc. L. M. S. II. 92; Rosanes, Clebsch Ann. VI. 294).

Eine Bemerkung kann Referent nicht unterdrücken: die besonders durch Reye eingeführte Bezeichnungsweise der Punkte und Geraden, die nun doch ziemlich verbreitet ist, ist in diesem Buche nicht benutzt; dies erschwert denen, die sich an dieselbe gewöhnt haben, das Studium desselben etwas; die begonnene Veränderung ferner der Namen hätten wir gern z. B. auch noch auf „Strahl- und Punkt-System“, „Asymptoten-Strahlen und -Punkte“ ausgedehnt gesehen, die wohl weniger gebraucht werden und weniger prägnant sind

als „Involution“ und „Doppelstrahl oder- Punkt“; zumal „System“ insbesondere schon alles mögliche bedeutet. Sm.

---

W. Gallenkamp. Lehrgang der synthetischen Geometrie (in der Oberprima der Friedrichs-Werderschen Gewerbeschule). Pr. Berlin.

Es kommt dem Herrn Verfasser darauf an, die Grundbegriffe der synthetischen Geometrie in der Weise darzustellen, wie sie für Schüler geeignet ist, die bisher nur an metrische Betrachtungen gewöhnt waren, nun aber in die Auffassungsweise der Geometrie der Lage eingeführt werden sollen. Dem entsprechend wird zunächst in der Einleitung die projectivische Relation zwar durch analytische Betrachtungen dargestellt, aber nur vorläufig, um aus der metrischen Auffassungsweise in die synthetische überzuführen.

Die eigentliche Abhandlung bewegt sich fast ausschliesslich auf dem Gebiete der Geometrie der Lage, und nimmt nach von Staudt's Vorgange ihren Ausgang von der Betrachtung harmonischer Elemente ohne metrische Relationen und von der auf sie gegründeten Definition der Projectivität, wie sie von Staudt für reelle Gebilde aufgestellt hat. Im Anschluss daran wird die projectivische Erzeugung der Curven zweiter Ordnung und derjenigen zweiter Klasse, der Nachweis der Identität beider Gebilde, sowie die Eintheilung in Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln und die Eigenschaft der Asymptoten behandelt. Dann werden die polaren Eigenschaften der Kegelschnitte mit metrischer Anwendung auf conjugirte Durchmesser betrachtet. Hieran reiht sich die Untersuchung involutorischer Eigenschaften der Büschel von Kegelschnitten, sowie eine durch involutorische Betrachtungen gewonnene Definition der Brennpunkte, durch welche bekannte Focaleigenschaften der Kegelschnitte gewonnen werden. In einem Schlusscapitel werden die Regelflächen in ihrer doppelten projectivischen Erzeugungsweise betrachtet. Hiermit bricht die Arbeit aus Raummangel ab, doch wird kurz darauf hingewiesen, dass

den Abschluss des Pensums die synthetische Erzeugung beliebiger Flächen zweiten Grades bildet.

Diese Inhaltsangabe wird erkennen lassen, dass in der That die grundlegenden Betrachtungen der synthetischen Geometrie in der Arbeit zusammengefasst sind. Die Auswahl des Stoffes und die knappe, aber durchaus klare Darstellung sind dem pädagogischen Zwecke entsprechend. A.

---

J. Hablützel. Lehrbuch der synthetischen Geometrie. 2 Bde. Leipzig. Mentzel.

---

G. Battaglini. Sulla geometria projettiva. Battaglini G. XIV. 110-139.

Reproduction der Arbeit, die in den Rend. di Napoli XIV. veröffentlicht war, und über welche bereits F. d. M. VII. p. 359 berichtet ist. Jg. (O.)

---

G. Jung. Intorno alla dimostrazione di un teorema sui poli e polari nella „Geometria projettiva" del Prof. L. Cremona. Battaglini G. XIV. 139-144.

Diese kurze Note erhebt keinen Anspruch auf wissenschaftliche Bedeutung, da sie lediglich einen didactischen Zweck hat. Jg. (O.)

---

H. Schröter. Zur Construction eines äquianharmonischen Systems. Clebsch Ann. X. 420-430.

Wenn auf einer Geraden $L$ eine cyclische Projectivität hergestellt wird, in der die Punkte $a$, $b$, $c$ den Punkten $b$, $c$, $a$ entsprechen, so handelt es sich darum, die Involution zu finden, deren Doppelelemente $i, i_1$ die vereinigten Elemente der beiden Punktreihen sind. Auch die Elemente $b, c$ können conjugirt imaginär sein, so dass sie durch eine Involution repräsentirt werden, deren Doppelpunkte sie sind. Die Construction ist

folgende: $'\alpha$ sei der conjugirte Punkt von $a$ in dieser letzten Involution, $x\xi$ ein beliebiges Paar derselben; man suche $p$ so, dass $(a\alpha\xi p) = -1$, ferner $\mathfrak{x}$ so, dass $(ap\xi\mathfrak{x}) = -1$, so sind die Doppelelemente der durch $a\alpha$, $x\mathfrak{x}$ bestimmten Involution die gesuchten Punkte $i, i_1$. Es folgt der Beweis des Satzes, dass, je nachdem $b, c$ reell oder conjugirt imaginär sind, $i, i_1$ conjugirt imaginär oder reell sind, sodann die Construction von $b, c$, wenn $a, i, i_1$ gegeben sind; wobei sich zeigt, dass, wenn $i, i_1$ die vereinigten Elemente der cyclischen Projectivität: $abc \overline{\wedge}\, bca$ sind und $(ii_1\, a\alpha) = -1$, $b, c$ die vereinigten Elemente von $\alpha ii_1 \overline{\wedge}\, ii_1\alpha$ sind. Zum Schlusse wird noch gezeigt, dass die beiden Doppelverhältnisse $(abci)$ und $(abci_1)$ die imaginären cubischen Wurzeln der negativen Einheit sind, also $i$ und $i_1$ zu $abc$ äquianharmonisch liegen (vergl. Steiner-Schröter's Vorlesungen 2. Aufl. p. 61—63. 81. 83).

Die Punkte $i, i_1$ bilden die Hesse'sche Form (2ten Grades) der binären cubischen Form, welche die Punkte $a, b, c$ darstellt; wir haben also im Obigen einen rein geometrischen Beweis des Satzes in Clebsch, Binäre Formen § 38. Sm.

---

K. Rudel. Perspectivische Dreiecke. Bayr. Bl XII. 214-217.

Der Verfasser giebt eine Anzahl geometrischer Uebungen an, welche sich an den von ihm ausführlich bewiesenen Doppelsatz von zwei perspectivisch liegenden Dreiecken anknüpfen lassen. Neues beizubringen war im Hinblick auf die umfassenden Untersuchungen von Rosanes und Schröter im 2. Bande der „Math. Ann.“ nicht wohl möglich. Gr.

---

L. Saltel. Généralisation du théorème de Desargues. Bull. de Belg. (2) XLI. 596.

Es seien $(O_1\, O_2 \ldots O_m)(M_1\, M_2 \ldots M_n)(N_1\, N_2 \ldots N_n)$ die Schnittpunkte einer Geraden mit den ebenen Curven

$$S_m + \lambda S_n = 0,\ S_m = 0,\ S_n = 0,$$

die resp. von den Ordnungen $m$ und $n$, $n \leq m$, sind, und $\lambda$ ein

variabler Parameter. Dann hat man für jeden der Punkte $O$

$$\frac{OM_1 . OM_2 \ldots OM_m}{ON_1 . ON_2 \ldots ON_m} = \text{constant.}$$

Mn. (O.)

---

MENDTHAL. Beiträge zur Lösung einiger bekannter geometrischer Aufgaben. Grunert Arch. LIX. 39-50.

Es handelt sich zunächst um die Lösung folgender Aufgabe: In der Ebene eines Kreises sind beliebig viele Punkte gegeben, man soll ein in den Kreis beschriebenes Vieleck zeichnen, in dessen Seiten je einer der gegebenen Punkte liegt. Nachdem der Verfasser zuerst den speciellen Fall eines Dreiecks erledigt hat, wobei die drei gegebenen Punkte beliebig innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegen, behandelt er darauf die allgemeine Aufgabe. Die angewendete interessante Methode ergiebt sich aus einer Art von Projection, welche der Verfasser als harmonische Projection bezeichnet. Betrachtet man den Pol einer Geraden als Projectionscentrum, die Gerade selbst als Projectionsaxe, so kann von den beiden Durchschnittspunkten einer durch den Pol gehenden Sekante mit dem Kreise der eine als harmonisches Bild des andern angesehen werden. Mit dieser Betrachtungsweise lassen sich viele geometrische Sätze, z. B. der Pascal'sche Satz über das Sechseck, elementar beweisen. Ebenso leicht ergiebt sich die Lösung der Aufgabe: In ein gegebenes Dreieck ein anderes einzuschreiben, dessen Seiten je einen gegebenen Punkt enthalten, und die Lösung der entsprechenden allgemeinen Aufgabe für das Vieleck. Schl.

---

C. TAYLOR. The right circular cone. Messenger (2) V. 189-190.

Die Haupteigenschaften des Hülfskreises eines Kegelschnittes werden geometrisch aus den Eigenschaften des geraden Kreiskegels hergeleitet. Glr. (O.)

---

E. Schilke. Die Newton'sche Erzeugung der Kegelschnitte. Diss. Göttingen.

---

C. le Paige. Note sur l'Essai sur les coniques. N. C. M. II. 9-14.

Das Essai von Pascal enthält Untersuchungen, die dem Satze von Carnot und dem von Chasles über das anharmonische Verhältniss von 3 Punkten eines Kegelschnitts äquivalent sind.

Mn. (O.)

---

F. August. Ueber den Zusammenhang gewisser Sätze, welche sich auf geschlossene Reihen geometrischer Gebilde beziehen. Grunert Arch. LIX. 1-17.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5 B. p. 370.

---

G. Halphen. Sur une proposition générale de la théorie des coniques. C. R LXXXIII. 791-793.

Beweis und Anwendungen des Satzes: Wenn zwei Kegelschnitte derselben Ebene in einer projectivischen Beziehung zu einander stehen, die von keiner andern Figur abhängt, so besteht die dual entsprechende Beziehung zwischen denselben Kegelschnitten, wenn man sie miteinander vertauscht.

So ist z. B. das Doppelverhältniss der vier Schnittpunkte beider Kegelschnitte, wenn man dasselbe auf dem ersten Kegelschnitt berechnet, gleich dem Doppelverhältnisse der vier gemeinsamen Tangenten, wenn man dies für den zweiten Kegelschnitt bestimmt.

Der Satz gilt allgemeiner für zwei Gebilde zweiter Ordnung von beliebigen Dimensionen. Lth.

---

E. Ruffini. Di alcune teoremi riferibili alla polarità reciproca delle coniche. Rend. di Bol. 1876 50-61; Mem. di Bol. (3) VI. 383-394.

---

M. Greiner. Pol und Polare des Dreiecks. Grunert Arch. LIX. 351-375.

Der Verfasser geht von dem bekannten Satze aus, dass jedem Punkte der Ebene in Bezug auf ein festes Dreieck eine bestimmte Gerade, seine Harmonikale, und jeder Geraden ein bestimmter Punkt, ihr harmonischer Pol, entspricht. Zu diesen beiden polaren Gebilden zieht er noch ein drittes in Betrachtung, den Polarkegelschnitt eines Punktes in Bezug auf das Dreieck. Dreht sich nämlich eine Gerade um einen festen Punkt, so beschreiben die entsprechenden Polpunkte einen dem Dreiecke umschriebenen Kegelschnitt. Die Dreieckspolare eines Punktes ist nun zugleich seine Polare bezüglich des Kegelschnittes, so dass die Verbindungslinien des Punktes mit den Schnittpunkten seiner Dreieckspolaren und seines Polkegelschnitts Tangenten an diesen sind. Liegt der Punkt auf einer Dreiecksseite, so zerfällt der Polkegelschnitt in ein Linienpaar, und zwar besteht dasselbe aus der den Punkt enthaltenden Dreieckseite und der Verbindungslinie des auf derselben Seite liegenden vierten harmonischen Punktes mit der gegenüberliegenden Ecke. Den Eckpunkten des Dreiecks selbst entsprechen als Polkegelschnitte die durch sie gehenden Seitenpaare. Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so umhüllen seine Dreieckspolaren einen dem Dreieck einbeschriebenen Kegelschnitt, und seine entsprechenden Polkegelschnitte bilden ein Kegelschnittbüschel, welches die Ecken des Dreiecks und den Pol der gegebenen Geraden zu Grundpunkten hat. Die sämmtlichen Umhüllungskegelschnitte, welche den Strahlen eines Büschels entsprechen, berühren ausser den Seiten des Dreiecks auch noch die Polare des Büschelmittelpunktes. Nach diesen allgemeinen gegenseitigen Beziehungen der Polgebilde wendet sich der Verfasser zu den speciellen Fällen in der Lage derselben. Er beweist hierüber unter anderen noch folgende Sätze: Der einem Dreiecke umschriebene Kegelschnitt vom kleinsten Inhalte hat den Schwerpunkt des Dreiecks zum Mittelpunkt; für jede durch den Schwerpunkt gehende Gerade ist der Umhüllungskegelschnitt eine Parabel. Sämmtlichen Punkten der Polare des Höhendurchschnittspunktes entsprechen gleichseitige Hyperbeln als Polkegel-

schnitte, und alle gleichseitigen Hyperbeln, die einem Dreiecke umschrieben sind, gehen sämmtlich noch durch einen vierten Punkt, nämlich durch den Höhenschnittpunkt des Dreiecks. Die Ableitung dieser Sätze ist durch kurze und übersichtliche Rechnungen mit Anwendung homogener Coordinaten erfolgt.

Schl.

---

Em. Cuber. Das Problem der um- und eingeschriebenen Polygone bei Kegelschnittslinien. Prag. Ber. 1875. 156-168.

Der Herr Verfasser denkt sich zwei Rotationskegel mit gemeinsamer Axe und gemeinsamem Scheitel durch eine zur Axe senkrechte Ebene geschnitten. Unter der Annahme, dass das Verhältniss der Radien der so erhaltenen concentrischen Kreise $1 : \cos\frac{\pi}{n}$ sei, giebt es eine Schaar regulärer $n$-ecke, welche dem einen dieser Kreise ein- und dem andern umgeschrieben sind. Wird diese Figur aus dem Scheitel der beiden Kegel auf eine beliebige andere Ebene projicirt, so erhält man in dieser zwei ähnlich liegende Kegelschnitte und eine Schaar von $n$-ecken, welche dem einen ein- und dem anderen umgeschrieben sind. Es werden nun durch Uebertragung bekannter Eigenschaften regulärer Polygone auf ihre Projectionen die bekannten Sätze über ein- und umgeschriebene Polygone für diese specielle Lage der Kegelschnitte abgeleitet.

Anstatt der Rotationskegel werden Rotations-Cylinder benutzt; und ausgehend von einer derartigen Figur leitet der Herr Verfasser schliesslich folgenden Satz ab: Verbindet man die Eckpunkte eines der Polygone mit einem der Brennpunkte der äusseren Ellipse, so ist die Summe dieser Radienvectoren für jede Lage des Polygons dieselbe und gleich der so vielfachen grossen Halbaxe der äusseren Ellipse als das Polygon Seiten hat. (Dieser Satz drückt keineswegs eine allgemeine Eigenschaft der einem Kegelschnitt ein- und einem anderen umgeschriebenen Polygone aus; denn er hört auf zu gelten, sobald die Kegelschnitte nicht mehr einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben;

er gilt aber andererseits von jedem beliebigen einer Ellipse eingeschriebenen Polygone grader Seitenzahl, welches die Eigenschaft hat, dass die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken sämmtlich durch den Mittelpunkt der Ellipse gehen, auch wenn die Polygonseiten nicht Tangenten eines zweiten Kegelschnittes sind; denn die Summe der Radienvectoren nach den Endpunkten eines Durchmessers ist stets gleich der grossen Axe. Anm. des Referenten). Schz.

---

C. Pelz. Beiträge zur Construction der Kegelschnitte aus Punkten und Tangenten durch Collineation.
Prag. Ber. 1875 117-135.

Die Eigenschaft, dass zwei in einer Ebene liegende Kegelschnitte im Allgemeinen durch jede gemeinschaftliche Secante als Collineations-Axe oder durch jeden Schnittpunkt zweier gemeinschaftlicher Tangenten als Collineations-Centrum als collinear verwandt auf einander bezogen werden können, wird auch hier zur Construction eines durch gegebene Punkte und Tangenten bestimmten Kegelschnitts verwerthet. Es wird dabei der zu zeichnende Kegelschnitt als collinear verwandt zu einem Kreise betrachtet, welchen man durch beliebige zwei der gegebenen Punkte oder zwei beliebige der gegebenen Tangenten berührend beschreibt. Es wird auf diese Weise die Construction ausgeführt in den Fällen, wenn von dem zu zeichnenden Kegelschnitte 5 Punkte, 5 Tangenten, 4 Punkte und eine Tangente, 4 Tangenten und ein Punkt gegeben sind. Betreffs der Einzelheiten dieser Constructionen verweisen wir jedoch auf die Abhandlung selbst, umsomehr, als der Herr Verfasser dieselben wohl als nützliche Anwendung der Collineation empfiehlt, indess selbst hervorhebt, dass sie sowohl in Einfachheit als Anwendbarkeit den bekannten Constructionen der neueren Geometrie nachstehen. Schz.

---

C. Pelz. Ueber die Axenbestimmung der Kegelschnitte.
Wien. Ber. 1876.

Die in Bezug auf einen Kegelschnitt $\Sigma$ zu den Strahlen eines Strahlbüschels $p$ in seiner Ebene conjugirten und rechtwinkeligen

Geraden umhüllen eine Parabel $\Pi$, welche ausserdem auch die Axen von $\Sigma$ und die beiden Normalstrahlen $H, H_1$ der durch $p$ mit $\Sigma$ bestimmten Strahleninvolution zu Tangenten hat. Diese Parabel, welche von dem Herrn Verfasser schon in früheren Abhandlungen zur Construction der Axen von Centralprojectionen des Kreises und der Flächen zweiten Grades (siehe F. d. M. IV. p. 263) diente, wird hier zur Construction der Axen von Kegelschnitten verwendet, zu deren Bestimmung zwei Tangenten, deren Berührungspunkte und noch eine beliebige weitere Bedingung gegeben sind. Bezeichnen nämlich $T_1$, $T_2$ die beiden gegebenen Tangenten, $t_1, t_2$ ihre Berührungspunkte, $p$ ihren Schnittpunkt, $d$ den Halbirungspunkt der Strecke $t_1 t_2$, so sind die Axen der dadurch bestimmten Schaar sich doppelt berührender Kegelschnitte sämmtlich Tangenten an diese Parabel $\Pi$, deren Directrix die Gerade $pd$ und deren Brennpunkt $\pi$ der vierte harmonische Punkt zu den Punkten $t_1, t_2, p$ in dem durch diese drei Punkte gelegten Kreise ist. Ist dieser ermittelt, so sind, wenn ausserdem der Mittelpunkt $m$ des gesuchten Kegelschnittes gegeben ist, durch die Halbirungslinien der Winkel $pm\pi$ die Lagen der Axen gefunden. Ein beliebiger durch $p$ und $\pi$ gehender Kreis ferner, welcher seinen Mittelpunkt auf einer der gefundenen Axen hat, schneidet die andere in den Brennpunkten, woraus sich auf bekannte Weise die Länge der Axen ergiebt. In der 54 Seiten füllenden Abhandlung wird ausserdem eine Reihe von Aufgaben behandelt, um zu zeigen, dass die Axenbestimmung eines durch irgend welche Bedingungen bestimmten Kegelschnittes auf den angeführten speciellen Fall zurückgeführt werden kann; so wird z. B. die Construction durchgeführt, wenn von dem fraglichen Kegelschnitt 3 reelle und 2 imaginäre Punkte, 3 theils reelle, theils imaginäre Punkte oder Tangenten oder ein Tripel conjugirter Punkte und der Mittelpunkt, oder 2 Paar Pol und Polare und ein Punkt gegeben sind. In allen Constructionen zeigt sich, dass zur Ermittelung der Axen des zu bestimmenden Kegelschnittes die Kenntniss von einem Paar Pol und Polare nebst der Punktinvolution auf der letzteren erforderlich ist. Schz.

---

C. SEIDKLIN. Bevis for Delabars Konstruktion af en Ellipsen Axer. Zeuthen Tidsskr. (3) VI. 63-64.

Geometrischer Beweis für die von Chasles und Delabar gegebenen Constructionen der Achsen einer Ellipse, von welcher ein Paar conjugirter Diameter gegeben sind. Gm.

---

R. F. DAVIS, A. J. P. SHEPHERD. Solution of a question (4804). Educ. Times XXV. 74.

Wenn ein Paar gegenüberliegender Seiten eines einem gegebenen Kegelschnitt umschriebenen Vierecks fest sind, so schneiden sich die Diagonalen auf einer Geraden. O.

---

L. THUILLIER. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 555.

Man zieht an 2 concentrische Ellipsen eine gemeinsame Tangente und verbindet die Berührungspunkte mit dem Mittelpunkt. Dann bilden diese beiden Geraden und die gemeinsamen Sehnen, die durch den Mittelpunkt gehen, harmonische Strahlen. O.

---

H. MILINOWSKI. Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven dritter Ordnung. Schlömilch Z. XXI. 427-441.

Im ersten Theile (allgemeine Eigenschaften) wird die Identität der durch verschiedene Erzeugungsweisen entstehenden ebenen Curven 3ter Ordnung nachgewiesen; im zweiten Theil hingegen, der dem Referenten der werthvollere zu sein scheint, wird eine selbstständige Polarentheorie für die Curven 3ter Ordnung entwickelt.

Aus der Erzeugung der Curve durch Strahl- und Kegelschnittbüschel hatte schon Schröter (Steiner'sche Vorlesungen 2. Th. 2. Aufl. p. 508) für den Scheitel des ersteren, also für einen Curvenpunkt $M$ die erste oder conische Polare abgeleitet, als Ort der vierten harmonischen dem $M$ zugeordneten auf allen Strahlen durch $M$ zu den 3 Schnittpunkten (sie entsteht durch

den Strahlbüschel $M$ und den dem projectiven Büschel der Polaren von $M$ in Bezug auf den erzeugenden Kegelschnittbüschel), und gezeigt, dass — unter Auffassung der Curve als Tripelcurve eines Netzes — die Polare eines Punktes nach der conischen Polare seines conjugirten identisch ist mit der Polare des letzteren nach der conischen Polare des ersteren. Milinowski will diesen Satz für zwei beliébige Punkte der Curve beweisen, aber sein Beweis enthält ein Versehen, jedoch lässt sich ein richtiger Beweis sehr leicht finden. Er zeigt darauf, dass die conischen Polaren $A^2$, $B^2$, $C^2$ der 3 Schnitte $A$, $B$, $C$ der Curve mit einer Geraden einem Büschel angehören, und die Gerade heisst dann die zweite oder grade Polare jedes der 4 Grundpunkte desselben. Durch das Entsprechen von $A^2$, $B^2$, $C^2$ und $A$, $B$, $C$ werden dieser Büschel und die Punktreihe projectiv; sind nun $P^2$, $Q^2$ die zwei weiteren Punkten $P$, $Q$ der Geraden entsprechenden Curven, so wird bewiesen, dass die Polare von $P$ nach $Q^2$ mit der von $Q$ nach $P^2$ identisch ist; sodann, dass die einem Punkte $P$ als Punkt der verschiedenen Strahlen seines Büschels entsprechende Curve stets derselbe Kegelschnitt $P^2$ ist, der nun als conische Polare von $P$ bezeichnet wird. Sonst heben wir noch die Beweise hervor, dass die gerade Polare von $P$ zugleich die Polare nach $P^2$ ist, dass, wenn die conische Polare von $Q$ ein Geradenpaar mit dem Doppelpunkt $\mathfrak{Q}$ ist, auch $Q$ der Doppelpunkt der conischen Polare von $\mathfrak{Q}$ ist, endlich, dass die conischen Polaren eines Punktes für alle Curven eines Büschels 3ter Ordnung ebenfalls einen Büschel bilden. Freilich enthält dieser Beweis dreimal den Druckfehler $l$ statt $g$. Sm.

---

R. Townsend. Solution of a question (4869). Educ. Times XXV. 27.

Es seien $A$ und $B$ 2 gegebene Inflexionspunkte einer Curve dritten Grades. Zieht man durch einen gegebenen Punkt $P$ die Gerade $AP$, welche die Curve in 2 schneidet, ferner $B2$, welche in 3, $P3$, welche in 4, $A4$, welche in 5, $B5$, welche in $Q$ die Curve schneidet, so ist $PQ$ Tangente an die Curve. O.

---

A. MANNHEIM. Nouvelles propriétés de quelques courbes. Bull. S. M. F. IV. 158-159.

---

## B. Räumliche Gebilde.

A. MANNHEIM. Construction pour un point de la courbe d'intersection de deux surfaces du centre de la sphère osculatrice de cette courbe. C. R. LXXXIII. 1040-1042.

Die Lösung des vorliegenden Problems hängt ab von den Gliedern dritter Ordnung; sie wird von Herrn Mannheim durch rein geometrische Betrachtungen gewonnen, welche er bereits früher bei anderen Problemen, die durch die Glieder jener Ordnung bedingt sind, mit Erfolg angewendet hat, und welche seiner Zeit in diesen Berichten gekennzeichnet worden sind. Die Construction, welche Herr Mannheim giebt, ist folgende:

Die beiden Flächen $S$ und $S'$ mögen sich in der Curve $(a)$ schneiden und $a$ sei ein Punkt dieser Curve. Die Oskulationsebene in $a$ bedingt mit $S$ und $S'$ zwei Schnittcurven und deren Evoluten haben die Krümmungscentra $\gamma$ und $\gamma'$. Senkrecht zur Osculationsebene ziehe man durch $\gamma$ und $\gamma'$ zwei Gerade, diese treffen die Ebenen, welche durch die Tangente an $(a)$ senkrecht zu $S$ und $S'$ gelegt sind, bezüglich in den Punkten $c$ und $c'$. Denkt man nunmehr eine Ebene normal zu $(a)$ in dem Punkte $a$, so wird diese durch die Verbindungsgerade von $c$ und $c'$ in dem Centrum der gesuchten Kugel geschnitten. Schn.

---

H. G. ZEUTHEN. Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques. Clebsch Ann. X. 446-546.

Gewöhnliche Singularitäten einer algebraischen Fläche sind solche, die bei einer allgemeinen Ordnungs- oder Klassenfläche, d. h. bei einer durch eine allgemeine Gleichung in Punkt- oder Ebenen-Coordinaten dargestellten Fläche auftreten. Die Relationen

zwischen diesen hat Salmon (Transactions of the R. Irish Academy Bd. 23 p. 485; die beiden ersten Aufl. der Raumgeometrie oder die erste Aufl. der Fiedler'schen Bearbeitung) gegeben, bis auf eine. Diese hat dann Cayley hinzugefügt, sowie auch noch einige andere Singularitäten mit in die Betrachtung genommen: die conischen und biplanaren Doppelpunkte (uninodes und binodes), die pinch-points und close-points, welche auftreten, sobald die Fläche eine Doppel- oder Rückkehrcurve besitzt, die off-points und gewisse Punkte of unexplained singularity und die dualen Ebenen (Philos. Transact. Bd. 154 p. 201, Bd. 162 p. 83; Salmon's Raumgeom. 3. Aufl. p. 526. 539; deutsche Bearb. 2. Aufl. Bd. II. p. 587. 605).

Zeuthen (welcher schon die Correctionen des zweiten Aufsatzes der Philos. Transactions veranlasst hat) nimmt wenigstens direct die beiden letzten Singularitäten nicht, statt dessen aber schon in dem Aufsatze Clebsch Ann. IV. 1 conische Punkte der Fläche von höherem Grade der Vielfachheit auf, jedoch dort ohne den Beweis für die Coefficienten, welche er ihnen in den Relationen ertheilt, zu geben. In einem Zusatze in demselben Band der Ann. p. 636 äussert er schon einige Bedenken über gewisse Glieder der Formeln. Sodann hat er in einer Note (Clebsch Ann. IX. 321) noch eine besondere Klasse von doppelten Punkten mit einer einzigen (doppelten) Berührungsebene, welche die dualen Eigenschaften des Berührungspunktes hat, in die Betrachtung gezogen: Doppel- und Rückkehrpunkte der Doppel- und der Rückkehrpunkte und gegenseitige auf ihnen nicht singuläre Schnittpunkte beider Curven; so dass so, mit dem Range $a$, 6 Singularitäten Zahlen sind, die ihren dualen gleich sind.

Die vorliegende umfangreiche Arbeit zerfällt nun in 14 Abschnitte. Der erste bringt eine Aufzählung der betrachteten Singularitäten in dualer Gegenüberstellung, der zweite dann die Formeln. Ausser den Plücker'schen Formeln zwischen den Singularitäten eines $n$-fachen conischen Punktes, den 6 Formeln $a = a'$ etc. hat Zeuthen es vorzugsweise mit 14 Formeln (6) bis (19) zu thun, von denen 13 durch Dualisirung zu (6') bis (18') führen, während in (19) die beiden Seiten dual sind: (19) setzt er an

Stelle der neuen Cayley'schen, wie überhaupt — abgesehen von den revidirten Coefficienten und neu hinzugetretenen Gliedern — seine Formeln nicht ganz den Salmon-Cayley'schen entsprechen, sondern zum Theil andere Combinationen sind und auch selbst noch wieder zu einfacheren combinirt werden.

Im dritten Abschnitte leitet er (6) bis (12) ab durch Betrachtung der ebenen Schnitte, bez. der die Doppel- oder Cuspidalcurve aus einem Punkte projicirenden Kegel, (13) bis (18) — welche mit $a(n-2)$, $b(n-2)$, $c(n-2)$, $a(n-2)(n-3)$ u. s. f. beginnen — hingegen vermittelst einer Correspondenz von Punkten auf den Geraden durch einen festen Punkt, die die Fläche tangiren oder die Doppel- oder Cuspidalcurve treffen. (19) ergiebt sich dadurch, dass in den Punkten der Cuspidalcurve, in denen die Berührungsebene der Fläche mit der Osculationsebene dieser Curve identisch ist, diese Tangentialebene die duale Eigenschaft hat. Wie die Coincidenzen der Correspondenzen durch die höheren Singularitäten entstehen oder wie sie in diesem letzten Fall die Zahl der Punkte vermindern, und mit welchen numerischen Coefficienten sie dazu auftreten, wird erst in der folgenden Betrachtung gezeigt. Es mag jedoch hier auch aut die Entwickelung der Singularitäten-Relationen aufmerksam gemacht werden, welche Zeuthen schon früher in dem Aufsatze über Systeme von ebenen Curven (Abhandlungen der dänischen Akademie 5. Ser. Bd. 10. IV. S. 345) gegeben hat, wo er die Schnitte der Fläche mit den Ebenen eines Büschels aus einem Punkte projicirte.

Im nächsten Abschnitte wird schon für einige einfachere besondere Lagen der Spitze der Tangentialkegel und dabei auftretende höhere Singularitäten untersucht. Dazu hat Zeuthen in demselben Band der Ann. S. 210 eine Note über Singularitäten der ebenen Curven voraufgeschickt, in der er nach dem Vorgang von Cayley (Quart J. VII. 212) die sogenannten Plücker'schen Aequivalenten einer höheren Singularität ermittelt. Aus diesen sucht er dann hier stets die mit anderen direct zu erkennenden Eigenschaften sich vertragenden aus. Dies wird für die schwierigeren „ausserordentlichen“ Singularitäten der Fläche, die in den

folgenden Abschnitten betrachtet werden, fortgesetzt, und damit neben dem eigentlichen Ziele der Ermittelung der Coefficienten in den numerischen Formeln eine viel vollständigere Kenntniss dieser Singularitäten gewonnen. So bringt zunächst der fünfte Abschnitt eine eingehende Untersuchung der pinch-points auf der Doppelcurve, derjenigen Punkte dieser Curve, deren beide Tangentialebenen sich vereinigen (bisher Rückkehr- oder Cuspidalpunkte in Deutschland genannt und am meisten bekannt). Bei einem solchen Punkte $J$ werden z. B. die verschiedenen Geraden und Ebenen durch ihn studirt, und deren Schnitte. Bekannt ist, dass es in der Berührungsebene von $J$ durch $J$ eine ausgezeichnete Gerade giebt, so beschaffen, dass alle durch sie gehenden Ebenen die Fläche in $J$ tangiren. Zeuthen findet, dass zwei von ihnen stationär berühren, studirt ferner das Verhalten der parabolischen Curve, der Developpablen der stationären Berührungsebenen und ihrer Rückkehrcurve bei $J$; untersucht die Tangentialkegel aus dem Punkte $J$, aus einem Punkte der ausgezeichneten Geraden oder der Berührungsebene von $J$ oder einer der beiden stationären Ebenen durch die erstere und dabei je die Singularität der nach $J$ gehenden Kante. Im sechsten Abschnitte werden die close-points betrachtet, diejenigen Punkte der Rückkehrcurve, bei denen ein beliebiger durchgelegter ebener Schnitt statt einer Spitze eine Berührung zweier Zweige hat; sodann in den beiden nächsten Abschnitten die biplanaren und uniplanaren Punkte, das sind die Doppelpunkte der Fläche, deren Tangentenkegel aus zwei verschiedenen, bez. identischen Ebenen besteht. Darauf folgt die Betrachtung der osculirenden Ebenen, d. h. der Ebenen, welche in einem einfachen Punkte tangiren, der aber für den Schnitt ein dreifacher Punkt ist, und welche bis jetzt noch nicht genauer untersucht waren.

Bis hierher ist jeder betrachteten Singularität die duale, deren Eigenschaften das Gesetz der Dualität ergab, gleich nachgeschickt. Nun folgen zwei Abschnitte (X und XI), welche eine sehr eingehende Studie über die $n$-fachen conischen Punkte bringen. Es wird hier angenommen, dass der Tangentenkegel $n^{\text{ter}}$ Ordnung ausser $y$ Doppel- und $z$ Rückkehrkanten, die die

Doppel-, bez. Rückkehrcurve berühren, noch $\eta$ andere Doppel- und $\zeta$ andere Rückkehrkanten habe. Hier wird die Spitze des Tangentialkegels gelegt in einen beliebigen Punkt, auf den Tangentenkegel des $n$-fachen Punktes, in diesen selbst, auf eine der $\eta$ oder $\zeta$ Geraden, in eine der längs derselben oder eine der stationär den Tangentenkegel berührenden Ebenen. Die duale Singularität der längs einer Curve $n'^{\text{ter}}$ Classe berührenden $n'$-fachen Ebene erfährt, weil bei ihr manche Verhältnisse anschaulicher auftreten, im nächsten Abschnitte eine theilweise selbstständige Behandlung.

Bei diesen Betrachtungen stellt sich heraus, dass gewisse Singularitäten „de définition ponctuel“ solche „de définition tangentiel“ oder umgekehrt involviren. Eine clos-plane z. B. liefert in ihrem einen singulären Punkt und eine bipunktuelle Ebene (zum biplanaren Punkte dual) in ihren beiden singulären Punkten vierfache Punkte der Cuspidalcurve; oder die Schnittpunkte zweier der $\eta'$ Doppeltangenten oder zweier der $\zeta'$ Wendetangenten der im Abschnitte XII. betrachteten $n'$-fachen Berührungsebene sind dreifache bez. vierfache Punkte der Doppelcurve. Cayley hat den Einfluss dieser durch andere Singularitäten inducirten Singularitäten nicht übersehen, aber nicht klar erkannt, und sie eben als Punkte oder Ebenen „of unexplained singularity“ in einigen Formeln eingeführt.

Der Abschnitt XIII. bringt dann Anwendungen, zunächst auf die cubische Fläche, bei der jedoch einige Relationen Modificationen erheischen; die mit einem biplanaren Punkte verbundenen Singularitäten waren von Cayley noch nicht berücksichtigt und deshalb weichen einige seiner Angaben, in seinem grossen Aufsatze on Cubic Surfaces (Philos. Transact. Bd. 159. S. 235), der dem ersten obigen folgt, von denen Zeuthen's ab. Weitere Anwendungen geschehen auf die Fläche $4^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem doppelten oder cuspidalen Kegelschnitte, mit einem biplanaren Punkte, mit einem conischen Punkte, bei dem $n = 3$, $\eta = 1$ oder $n = 3$, $\zeta = 1$ ist.

Der letzte Abschnitt, der mehr als Anhang zu betrachten, bringt, wie der Verfasser selbst sagt, eine noch etwas leger gemachte

Vervollständigung der schon Math. Ann. IV. 635 gegebenen Formel für das Geschlecht $p$ einer Fläche. Sm.

---

A. Voss. Die Curve vierpunktiger Berührung auf einer algebraischen Fläche. Clebsch Ann. IX. 483-486.

In einer früheren Arbeit (Math. Ann. VIII. 91) hatte der Verfasser die Ordnung $S$ der genannten Curve auf der durch den Schnitt dreier allgemeinen Complexe sich ergebenden Regelfläche bestimmt; er bestimmt sie jetzt für eine beliebige Fläche, die mit einer Doppelcurve ($d^{ter}$ Ordnung) und einer Rückkehrcurve ($r^{ter}$ Ordnung) behaftet ist, ähnlich wie dies der Referent (Crelle's J. Bd. 72 S. 354) für eine von diesen Singularitäten freie Fläche gethan, mit Hilfe der Fläche der Haupttangenten längs eines ebenen Schnittes: $S = n(11n-24)-22d-27r$, cf. Cayley, der diese Curve die Flecnodalcurve nennt, Philos. Transactions Bd. 159 S. 215. Auch für windschiefe Regelflächen, bei denen der Umstand, dass die die Curve sonst einschneidende Fläche in die gegebene Fläche und eine andere zerfällt, zu einer weitläufigen analytischen Untersuchung führt, erhält man auf diese Weise, wenn die Fläche eine $\delta$-fache Leitlinie und $r$ Rückkehrerzeugende hat,

$$S = 5n + 12(p-1) - \delta - 3r.$$

Sm.

---

F. August. Ueber den Zusammenhang gewisser Sätze, welche sich auf geschlossene Reihen geometrischer Gebilde beziehen. Grunert Arch. LIX. 1-17.

Der Zusammenhang der Poncelet'schen Sätze über ein- und umgeschriebene Polygone (Traité des propriétés proj. p. 316) und der Steiner'schen Sätze über geschlossene Reihen einander berührender Kreise und Kugeln (Crelle J. Bd. I. p. 254, Bd. II. p. 192), sowie derjenigen über die Polygone bei Curven dritten Grades (Crelle J. Bd. XXXII. p. 182) ist analytisch dadurch erkennbar, dass ihre Nachweisung auf das Additionstheorem der

elliptischen Integrale erster Gattung führt, wie Jacobi (Crelle J. Bd. III.) und Clebsch (Crelle J. Bd. LXIII.) dargethan haben. Der Herr Verfasser sucht nun den Zusammenhang dieser Sätze auf geometrische Weise klarzulegen, indem er zeigt, dass dieselben aus einem allgemeineren Satze durch passende Projection sich ableiten lassen. Dabei ergeben sich zugleich einige weitere analoge Sätze für räumliche Gebilde. Der erwähnte Satz (im Wesentlichen auch ausgesprochen von Herrn Küpper in Prag Abh. Bd. VI. vgl. F. d. M. VI. p. 363. Anm. des Referenten) lautet:

Wenn man einer ebenen Curve dritten Grades $C_3$ ein veränderliches $2n$-eck einschreibt, dessen Seiten alle bis auf eine als dritte Schnittpunkte mit der Curve je einen festen Punkt haben, also ebene Strahlbüschel beschreiben, so hat auch die letzte Seite als dritten Schnittpunkt mit der Curve einen festen Punkt, dessen Lage man constructiv aus derjenigen der übrigen bestimmen kann, ohne das veränderliche $2n$-eck selbst zu construiren.

Lässt man die festen Punkte abwechselnd mit zwei derselben $\lambda$ und $\mu$ zusammenfallen bis auf den letzten, der durch die übrigen bestimmt ist, so führt die Beantwortung der Frage, wie $\lambda$ und $\mu$ liegen müssen, damit dieser letzte feste Punkt mit $\mu$ zusammenfalle, auf die eigentlichen Steiner'schen Polygone.

Wird eine Raumcurve $R_4$ erster Art (d. i. der Schnitt zweier Flächen zweiten Grades) aus irgend einem ihrer Punkte $\pi$ auf eine beliebige Ebene $e$, welche nicht durch $\pi$ geht, projicirt, so ist ihre Projection eine ebene Curve $C_3$. Der vorige Satz für die $C_3$ führt sonach zu folgendem für die $R_4$: Wenn jede der Seiten eines veränderlichen einer Raumcurve $R_4$ eingeschriebenen $2n$-ecks bis auf eine einer Secantenschaar angehört, also ein Hyperboloid beschreibt, so ist dasselbe mit der letzten Seite der Fall; und zu dem specielleren: Wenn sich auf einem Hyperboloid eine Raumcurve $R_4$ befindet von der Beschaffenheit, dass ihr ein geschlossenes $2n$-eck eingeschrieben werden kann, dessen Seiten abwechselnd je einer der beiden Schaaren von Generatrices des Hyperboloides angehören, so lassen sich derselben $R_4$ unzählige geschlossene $2n$-ecke derselben Art einschreiben.

Wählt man als Projectionspol $\pi$ den Scheitel eines der vier

Kegel, welche durch $R_4$ hindurchgehen, und als Projectionsebene $e$ die durch die Scheitel der drei anderen Kegel bestimmte Ebene, so ist die Projection von $R_4$ ein Kegelschnitt $K_2$, die Projection einer Secantenschaar von $R_4$ sind die Tangenten eines Kegelschnittes $L_2$, welcher durch die 4 Schnittpunkte von $e$ mit $R_4$ hindurchgeht, und zugleich der Berührungskegelschnitt des Tangentenkegels von $\pi$ an die Fläche $f_2$ ist, welcher die Secantenschaar angehört; so erhält man den Poncelet'schen Satz: „Wenn sich in einer Ebene $e$ ein Kegelschnittbüschel befindet, und einem ihm angehörigen Kegelschnitt ein veränderliches $2n$-eck eingeschrieben ist, dessen Seiten bis auf eine je einen der Kegelschnitte des Büschels umhüllen, so umhüllt auch die letzte einen Kegelschnitt des Büschels;" aus welchem sich der bekanntere Satz über die einem Kegelschnitt ein- und einem anderen umgeschriebenen Polygone ergiebt.

Denkt man sich anderseits ein beliebiges $K_2$ umgeschriebenes und $L_2$ eingeschriebenes Polygon auf eine durch $R_4$ gehende Fläche $f_2$ projicirt, so folgt: Wenn sich auf einer Fläche $f_2$ eine Raumcurve $R_4$ befindet von der Art, dass in einer der vier Schaaren von ebenen Schnitten der Fläche, welche die $R_4$ doppelt berühren, eine geschlossene Reihe von $n$ Schnitten besteht, deren jeder die beiden Nachbarschnitte berührt, so bleibt die Reihe geschlossen, wie man auch den ersten Schnitt der Schaar wählt. Die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte jedes Kegelschnittes mit $R_4$, sowie die gemeinsame Tangente je zweier einander berührender Schnitte einer Schaar schneiden sich in dem Punkte $\pi$, durch welchen die Ebenen der betrachteten Schaar von Schnitten hindurchgehen.

Durch Projection der zuletzt erhaltenen Figur auf eine beliebige andere Ebene ergeben sich Sätze über geschlossene Reihen von Kegelschnitten, welche eine ebene Curve vierten Grades mit zwei Doppelpunkten, die auch durch zwei Kegelschnitte ersetzt werden kann, oder eine Curve dritten Grades doppelt berühren, und welche den Steiner'schen Satz über die Kreisreihen als besonderen Fall enthalten. Schz.

H. Picquet. Sur un nouveau mode de génération des surfaces du troisième degré. Bull. S. M. F. IV. 128-148.

H. Picquet. Des sections paraboliques et équilatères dans les surfaces du troisième degrè. Bull. S. M. F. IV. 153-156.

Der Verf. beschäftigt sich zuerst mit der dritten Steiner'schen Erzeugungsweise der Flächen 3[ter] Ordnung (Crelle's J. Bd. LIII. p. 134), nach der sie das Erzeugniss der Berührungskegelschnitte der aus einem Punkte $P$ den Flächen eines Büschels 2[ter] Ordnung (mit der Grundcurve $B_4$) umschriebenen Tangentialkegel ist, welche Erzeugungsweise von Cremona und, was Picquet nicht erwähnt, vom Referenten in ihren Preisschriften (Crelle's J. Bd. LXVIII. p. 1; Synth. Untersuchungen über die Flächen 3[ter] Ordnung. Leipzig 1867 Cap. I) behandelt ist. Er zeigt, wie Cremona, dass jede Fläche 3[ter] Ordnung so erzeugt werden kann; auch dass der Kegel $PB_4$ die Fläche tangirt, hat Cremona p. 100 schon gesagt. Die Strahlen durch $P$ schneiden die Fläche in zwei weiteren Punkten, die in Bezug auf alle Flächen des Büschels conjugirt sind; so dass, wenn die cubische Fläche nach Hirst's quadratischer Inversion in Bezug auf $P$ und irgend eine Büschelfläche $S_2$ transformirt wird, sie sich reproducirt.

Er nimmt darauf ein lineares System 4[ter] Stufe von Flächen 2[ter] Ordnung an und construirt in jeder der Ebenen eines Büschels je die Curve 2[ter] Klasse, welche den aus fünf Constituenten des Systems ausgeschnittenen Curven 2[ter] Ordnung und deshalb allen übrigen, wie Picquet mit St. Smith (Proc. London Math. Soc. II. 94), ohne diesen zu nennen, sagt, „harmonisch“ eingeschrieben ist. Wenn nämlich die Tangentialgleichung einer Curve 2[ter] Klasse

$$CA\alpha^2 + B\beta^2 + \gamma^2 + 2F\beta\gamma + 2G\gamma\alpha + 2H\alpha\beta = 0$$

und die Punktgleichung einer Curve 2[ter] Ordnung

$$ax^2 + \cdots + 2fyz + \cdots = 0$$

ist, so ist die erste der zweiten harmonisch eingeschrieben, wenn

$$Aa + \cdots + 2Ff + \cdots = 0.$$

Rosanes nennt (Clebsch Ann. VI. 268; Borchardt's Journal

LXXVI. S. 312) Kegelschnitte in dieser Beziehung conjugirt, in Clebsch-Lindemann's Vorlesungen (I. 295, 385) heissen sie in vereinigter Lage. Reye, der sich mit dieser — auf Flächen und beliebige Grade verallgemeinerten — Frage analytisch in Borchardt's Journal Bd. LXXVIII., LXXIX., LXXXII. beschäftigt, die Kegelschnittbeziehung aber in der neuen Auflage seiner Geometrie der Lage I. p. 196 rein geometrisch untersucht, sagt, die Curve $2^{ter}$ Klasse ruhe auf der $2^{ten}$ Ordnung, und diese stütze jene, und jede sei zu der anderen apolar. Schon früher haben Faure (Nouv. Ann. XIX. S. 234) und Salmon (Kegelschnitte Art. 351) die Beziehung studirt, sowie Picquet selbst, der im vorliegenden Aufsatze nur sich citirt, 1872 in seiner Étude sur les systèmes pontuels et tangentiels des sections coniques.

Die von Picquet in den Büschelebenen construirten Kegelschnitte erzeugen nun, wie er analytisch nachweist, im Allgemeinen eine Fläche $8^{ter}$ Ordnung. Haben aber die Flächen des Systems 5 Punkte gemein, so entsteht eine cubische Fläche, auf der die Büschelaxe $g$ liegt und die 5 Puukte die Schnittpunkte der 5 die $g$ treffenden Geradenpaare sind. Für den Fall, dass die $F^3$ den unendlich fernen Kugelkreis enthält, beweist er den Umkehrungssatz, und überträgt ihn durch Collineation auf den allgemeinen Fall:

Wenn man durch die Schnittpunkte der 5 Geradenpaare einer cubischen Fläche, die einer Geraden $g$ derselben begegnen, alle Flächen $2^{ten}$ Grades legt, so sind die Schnitte der Ebenen durch $g$ mit der Fläche $3^{ter}$ Ordnung den Schnitten mit jenen Flächen harmonisch eingeschrieben; woraus sich ergiebt, dass jene 5 Punkte ein den Kegelschnitten auf der cubischen Fläche in den Ebenen durch $g$ conjugirtes Fünfeck (Polfünfeck, wie Reye sagt) bilden. Der einfache Beweis für diesen letzten Satz, der leicht zu finden ist, führt auch zu einem directen Beweise des Umkehrungssatzes.

Im zweiten Aufsatze zeigt Herr Picquet, dass es unter den Kegelschnitten der cubischen Fläche in den Ebenen durch eine Gerade derselben 4 Parabeln und 3 gleichseitige Hyperbeln — die man wohl nicht blos sections équilatères nennen kann —

giebt (cf. des Referenten Aufsatz Math. Ann. IV. 259), und dass die Ebenen der letzteren den Kegel 3ter Classe berühren, den die cyclischen Ebenen aller Kegel 2ten Grades umhüllen, welche die 4 aus einem beliebigen Punkt auf $g$ parallel zu den 4 Parabelaxen gezogenen Geraden enthalten. Sm.

---

H. Picquet. Rectification. Bull. S. M. F. IV. 156-157.

Herr Fiedler hat gewisse Sätze über die directen Kugeln von Flächen 2ten Grades Herrn Townsend zugeschrieben (Salmon-Fiedler, Raumg. I. 2. Aufl. p. 266, Literaturnachw. No. 37); Picquet reclamirt sie als von ihm zuerst gefunden (Bull. Soc. philomath. II. 196). Sm.

---

Benno Klein. Ueber die geradlinigen Flächen dritter Ordnung und deren Abbildung auf eine Ebene. Diss. Strassburg.

Zu Grunde gelegt wird die Erzeugung durch eine Punktreihe und einen ihr projectiven Kegelschnitt, aus der die duale Erzeugung abgeleitet wird. Es wird dann gezeigt, wie ein Nullsystem entsteht, in dem jedem Punkte der Fläche eine Berührungsebene entspricht, welche durch die den Punkt enthaltende Erzeugende geht, so dass alle Erzeugenden Leitstrahlen des Nullsystems sind.

Der zweite Theil behandelt die schon durch Clebsch, Cremona, Reye bekannte Abbildung der Fläche auf eine Ebene $\varepsilon$. Diese ist hier durch die doppelte Leitgerade $d$ gelegt und das Bild eines Punktes ist der Schnitt der von ihm ausgehenden, zwei feste Erzeugenden treffenden Geraden. Die einfache Leitgerade $e$ wird nur in einen Punkt $O'$, die doppelte hingegen in eine Involution auf $d' = d$ abgebildet, in welcher die gepaarten Punkte Bilder des nämlichen Punktes sind, insofern derselbe zu der einen oder der andern der sich in ihm treffenden Erzeugenden gehört; die Bilder der Erzeugenden bilden eine mit dieser

perspective Involution um $O'$. Die Doppelpunkte $S'$, $S'_1$ auf $d'$ sind die Bilder der Cuspidalpunkte $S$, $S_1$; also $O'S'$, $O'S'_1$ die Bilder der singulären Erzeugenden. Die übrigen Geraden der Ebene $\varepsilon$ sind die Bilder der Kegelschnitte in den Berührungsebenen der Fläche $G^3$ und insofern bezeichnet sie Herr Klein auch als die Bilder dieser Berührungsebenen. Jedes Nullsystem bildet sich in ein Polarsystem ab, dessen Ordnungscurve die $O'S'$, $O'S'_1$ in $S'S'_1$ tangirt. Für die ebenen Schnitte $C^{1\cdot 3}$ der $G^3$ wird folgender Satz gewonnen: Durch je zwei Punkte der Fläche geht ein Kegelschnitt derselben; werden nun mit zwei festen Punkten von $C^{1\cdot 3}$ alle übrigen durch je zwei Kegelschnitte verbunden, so entstehen 2 Kegel 2ten Grades, deren Ebenenbüschel (2ter Ordnung) projectiv sind.

Die ebenen Curven bilden sich in Kegelschnitte durch $O'$ ab, alle Curven in den Ebenen durch eine Gerade $g$ in einen Kegelschnittbüschel, dessen drei weitere Grundpunkte $A'$ $B'$ $C'$ die Bilder der Schnitte $gG^3$ sind, und als Bilder von $g$ bezeichnet werden können; den Curven in den 3 Berührungsebenen durch $g$ entsprechen die 3 Geradenpaare und zwar den Kegelschnitten, die Geraden $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, welche schon oben als Bilder der 3 Ebenen bezeichnet werden und nun die schon durch $A'$, $B'$, $C'$, insofern dies die Bilder ihrer Schnittpunkte mit $G^3$ sind, abgebildete $g$ gewissermassen noch im dualen Sinn abbilden, insofern sie die Bilder ihrer Berührungsebenen sind.

Darauf werden die Raumcurven 3ter und 4ter Ordnung, welche durch den Schnitt mit einer $F^2$ entstehen, sowie die Schnitte $(G^3, F^n)$ und ihre Bilder besprochen; insbesondere die Berührungscurven der von einem Punkte der $G^3$ oder von einem beliebigen Punkte gelegten Tangentialkegel, im letzteren Falle auch der fernere Schnitt des Kegels mit der Fläche, dessen Bild von den Geraden eingehüllt wird, in welche sich die Tangentialebenen des Kegels abbilden.

Endlich wird, durch rein geometrische Betrachtung, der bis jetzt diese Curven wenig zugänglich gewesen sind, gezeigt, dass die Haupttangentencurven sich sehr einfach abbilden, nämlich in die Ordnungscurven der obigen Polarsysteme.

Gerade die Construction der Nullsysteme, der ihnen entsprechenden Polarsysteme und ihre Beziehung zu den Haupttangentencurven sind, wie der Verfasser selbst sagt, wohl noch nicht bemerkt und bilden den interessantesten Theil der Arbeit. Im letzten Theile wird der bekannte Cayley'sche Specialfall mit zwei vereinigten Leitgeraden besprochen.

Sm.

---

K. Moshammer. Zur Geometrie ähnlicher Systeme und einer Fläche dritter Ordnung. Wien. Ber. LXXIV. 131-147.

Bei zwei ähnlichen räumlichen Systemen (in allgemeiner Lage) giebt es eine sich selbst entsprechende Gerade (Axe), durch Rotation um welche die Systeme in perspective Lage gebracht werden können, einen sich selbst entsprechenden Punkt, der auf ihr liegt, und den Herr Moshammer Aehnlichkeitscentrum nennt, und eine sich selbst entsprechende Ebene, in diesem Punkte zur Axe normal. Der Verfasser zeigt die Construction dieser Elemente bei zwei beliebigen ähnlichen Systemen $S$, $S'$ und beweist, dass wenn $e$, $e'$ zwei homologe Ebenen derselben sind und $S'$ um die Gerade $e$, $e'$ gedreht wird, das Centrum einen zur Ebene $e$ normalen Kreis, die Axe eine Regelfläche $3^{ten}$ Grades erzeugt. Die Fälle der gleichstimmigen und ungleichstimmigen (entgegengesetzten) Aehnlichkeit werden fortwährend getrennt behandelt.

Schliesslich wird noch der Specialfall der entgegengesetzt congruenten (symmetrischen) Systeme erledigt, wo die Construction der sich selbst entsprechenden Elemente sich vereinfacht, bei der Drehung um $ee'$ an Stelle des Kreises und der Regelfläche $3^{ten}$ Grades eine Gerade und der Tangentenbüschel einer Parabel tritt.

Sm.

---

Appell. Sur une classe particulière de courbes gauches unicursales du quatrième ordre. C. R. LXXXIII. 1209-1211.

(Auszug ohne Beweis.)

Herr Appell suchte für die Raumcurve 4ter Ordnung zweiter Species die Bedingung, wann sie in einem Nullsysteme liegt, so dass jedem ihrer Punkte seine Schmiegungsebene entspricht (oder, wie Herr Appell, der nur Chasles (C. R. 16. S. 1420) zu kennen scheint, sagt, wann es eine Schraubenbewegung giebt, bei der jeder Punkt der Curve sich normal zur Schmiegung bewegt); die Curve muss dann zwei osculirende Tangenten haben (welchen Specialfall Cayley Quart. J. VIII. 105 zuerst bemerkt hat); die Coordinaten ihrer Punkte lassen sich als Functionen von $\lambda$ so darstellen, dass $\lambda^2$ durchweg fehlt; man vergleiche jedoch hierzu Salmon-Fiedler Geom. des Raumes, 2. Aufl. II. Bd. No. 92. Durch diese Curve wird dann jedem Elemente des Raums ein gleichartiges „conjugirt" und ist auch dessen conjugirtes, z. B. eine Schmiegungsebene und die in ihrem vierten Schnittpunkte osculirende Ebene sind conjugirt. Es giebt ein zweites Nullsystem, wo jedem Punkt der Curve die conjugirte Ebene seiner Schmiegungsebene entspricht; mit Hilfe beider Systeme werden die conjugirten Elemente construirt. Nach Salmon-Fiedler's Raumgeom. 2. Aufl. II. Bd. Literatur-Nachw. und Zusätze No. 36 hat sich Cremona schon mit diesen Fragen beschäftigt.

Sm.

---

H. Picquet. Sur une surface remarquable du huitième degré. Bull. S. M. F. IV. 45-59.

Wenn ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung und ein Punkt $P$ gegeben ist, so giebt es Ebenen, welche durch $P$ gehen und das Flächenbüschel in einem Curvenbüschel schneiden, dessen gemeinsames Polardreieck einem Kreise umschrieben ist, der seinen Mittelpunkt in $P$ hat. Alle Ebenen dieser Art umhüllen einen Kegel 2ter Ordnung und die in ihnen gelegenen Kreise erzeugen eine Fläche 8ter Ordnung. Dieselbe Fläche findet sich wenn man in einer linearen 7-fach unendlichen Schaar von Flächen 2ter Klasse diejenigen sucht, welche in Kreise degeneriren, deren Mittelpunkte in $P$ liegen; dann liegen alle diese Kreise auf der fraglichen Fläche. Die Fläche hat den unendlich fernen

Kugelkreis zur Rückkehrcurve und besitzt noch eine Doppelcurve 12ter Ordnung, von der 6 Aeste durch P gehen.

Diese und andere Eigenschaften der Fläche, deren Anführung zu weit führen würde, werden in der Abhandlung auf einem vorwiegend geometrischen Wege bewiesen. Lth.

---

## C. Abzählende Geometrie.

M. Chasles. Théorèmes relatifs au déplacement d'une figure plane dont deux points glissent sur deux courbes d'ordre et de classe quelconques. C. R. LXXXII. 431-437. I.

M. Chasles. Théorèmes relatifs à des couples de segments rectilignes, ayant un rapport constant. C. R. LXXXIII. 97-101. II.

M. Chasles. Théorèmes relatifs à des courbes d'ordre et de classe quelconques, dans lesquels on considère des couples de segments rectilignes, ayant un produit constant. C. R. LXXXII. 1399-1405. III.

M. Chasles. Lieux géométriques et courbes enveloppes satisfaisant à des conditions de produit constant de deux segments variables. Généralisation de quelques théorèmes exprimés en rayons vecteurs. C. R. LXXXII. 1463-1469. IV.

M. Chasles. Théorèmes relatifs à des systèmes de trois segments ayants un produit constant. C. R. LXXXIII. 589-594. V.

M. Chasles. Rectification d'une erreur qui entache des théorèmes sur les systèmes de deux ou trois segments faisant un produit constant. C. R. LXXXIII. 641-647. VI.

M. Chasles. Théorèmes relatifs à des courbes d'ordre et de classe quelconques, dans lesquels on considère des couples de segments rectilignes faisant une longueur constante. Exemples de la variété de solutions différentes que fournit, dans chaque question, le principe de correspondance. C. R. LXXXIII. 467-473. VII.

M. Chasles. Théorèmes relatifs à des couples de segments faisant une longueur constante. C. R. LXXXIII. 495-501. VIII.

M. Chasles. Nouveaux théorèmes relatifs aux couples de segments faisant une longueur constante. C. R. LXXXIII. 519-524. IX.

M. Chasles. Théorèmes relatifs à des systèmes de trois segments formant une longueur constante. C. R. LXXXIII. 757-763. X.

M. Chasles. Théorèmes relatifs à des systèmes de trois segments faisant une longueur constante. C. R. LXXXIII. 867-873. XI.

M. Chasles. Théorèmes relatifs à des couples de segments faisant une longueur constante, pris l'un sur une tangente d'une courbe, et l'autre sur une normale d'une autre courbe, les deux courbes étant d'ordre et de classe quelconques. C. R. LXXXIII. 1123-1129. XII.

M. Chasles. Théorèmes concernant des couples de segments pris l'un sur une tangente d'une courbe et l'autre sur une oblique d'une autre courbe, et faisant ensemble une longueur constante, les courbes étant d'ordre et de classe quelconques. C. R. LXXXIII. 1195-1201. XIII.

Die vorliegenden 13 Abhandlungen bestimmen wieder mit Hilfe des Correspondenzprincips Hunderte von Gradzahlen, deren jede sich auf einen Punktort oder einen Strahlenort bezieht, und als Function der Ordnungen und der Klassen gegebener Plancurven erscheint. Die Art und Weise der Verwebung des ge-

suchten Ortes mit den gegebenen Curven ist meist aus den Titeln der Abhandlungen zu ersehen. Nachdem Herr Chasles nämlich im Jahre 1875 verschiedene Fragen behandelt hatte, welche auf Systeme zweier *gleicher* Curven-Segmente Bezug nahmen (5 Abh. in C. R. LXXXI., über welche F. d. M VII. p. 403 referirt ist), dann zu dem Fragengebiete übergegangen war, wo von einem constanten *Verhältniss* zweier Curvensegmente die Rede ist (C. R. LXXXI. p. 1221), vervollständigt er hier zunächst in Abhandlung II. das letztgenannte Fragengebiet, behandelt dann in den Abhandlungen III., IV., V., VI die Fragen, welche das *Product* zweier oder dreier Curvensegmente constant sein lassen, und betrachtet endlich in den Abhandlungen VII., VIII., IX., X., XI., XII., XIII. diejenigen Fälle, wo die *Summe* von zwei oder drei auf Tangenten, Normalen oder obliques (das sind Strahlen, welche mit Curventangenten in deren Berührungspunkte einen gegebenen Winkel bilden) gemessenen Strecken constant ist.

Die Abhandlung I. schliesst sich an die in C. R. LXXX. p. 346 publicirte Abhandlung an, über welche Herr Klein F. d. M. VII. p, 396 referirt hat. Die hier behandelten Fragen beziehen sich jedoch auf die augenblicklichen *Rotationscentra* bei einer mit ihren Endpunkten auf zwei gegebenen Curven gleitenden Strecke.

Zur weiteren Ausbildung der abzählenden Geometrie tragen diese 13 Abhandlungen insofern bei, als in ihnen, wie auch schon in früheren Abhandlungen des Verfassers durch Bezugnahme auf den unendlich fernen Kugelkreis, metrische Bedingungen (z. B. Rechtwinkligkeit, Constanz einer Entfernung) eingeführt werden, statt der bisher fast ausschliesslich berücksichtigten projectivischen Bedingungen. Scht.

---

L. Saltel. Applications de la loi de décomposition. Bull. de Belg. (2) XL. 586-617.

E. Catalan. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XLII. 483-486.

Die Arbeit beschäftigt sich mit Fragen, deren hauptsäch-

lichste sind: Zu finden die Ordnung des Orts der Punkte, von denen man an eine Curve der Ordnung $m$, der Klasse $n$, Tangenten ziehen kann, welche gleich der Entfernung dieses Punktes von einem festen Punkte sind. Zu finden die Ordnung des Orts der Punkte, von denen man an 2 Curven von den Ordnungen $m_1\, m_2$, den Klassen $n_1\, n_2$ gleiche Tangenten ziehen kann. Dieselben Fragen für Normalen. Bei jedem dieser Probleme zerfällt der Ort in 2 andere, deren Ordnung der Verfasser bestimmt. Die Resultate stimmen mit denen von Chasles (vergl. das voranstehende Referat) überein. Der Verfasser giebt dann noch folgenden Satz: Die Ordnung des Orts des Punktes $M$, von dem man an $k$ allgemeinste Curven der Ordnung $m_1, m_2, \dots m_k$ und der Klasse $n_1, n_2, \dots n_k$ Tangenten ziehen kann, deren Quadratsumme constant ist, ist

$$2n_1\, n_2 \dots n_k\left(1+\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}+\cdots+\frac{m_k}{n_k}\right).$$

Ist die Quadratsumme der Normalen constant, so ist die Ordnung des Orts

$$2(m_1+n_1)\,(m_2+n_2)\dots(m_k+n_k).$$

Endlich beweist der Verfasser in einem Zusatz, dass das Zerlegungsgesetz es möglich macht, ebenso gut Fragen, die sich auf specielle Fälle beziehen, zu lösen, als die, wo nur die allgemeinsten Functionen variabeler Parameter vorkommen.

Mn. (O.)

---

L. Saltel. Nouvelle méthode pour déterminer l'ordre d'un lieu géométrique défini par des conditions algébriques. Bull. de Belg. (2) XLII. 300-333.

F. Folie. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XLII. 253-254.

1) Auseinandersetzung der Methode, die bereits nach den Arbeiten C. R. LXXX. 1064-1067, LXXXI. 1047-1050 in den F. d. M. VII. p. 392 besprochen. Anwendungen des Princips zur Bestimmung der Zahl der Lösungen von mehreren Gleichungen, die Null

und Nichtnull, aber endlich sind, speciell Zahl von Punkten, die zwei Curven oder drei Flächen gemeinsam sind und in endlicher Entfernung liegen. Wenn zwei Curven (drei Flächen) von den Ordnungen $n_1, n_2$ ($n_n$), welche die allgemeinsten ihrer Art sind, einen Punkt $O$ gemeinsam haben, so ist die Zahl der mit $O$ verschmolzenen Punkte gleich dem Produkt der Grade der Vielfachheit dieses Punktes. Anwendung auf die Bestimmung eines durch algebraische Bedingungen definirten Ortes. 2) Anwendungen specielleren Charakters. Man hat in einer Ebene drei allgemeinste Curven von den Ordnungen $m_1, m_2, m_3$. Man verlangt die Ordnung des Ortes eines solchen Punktes $M$, dass wenn man von diesem Punkte an jede der 3 Curven Tangenten (Normalen) zieht, es wenigstens 3 giebt, die resp. zu jeder der Curven gehören, für welche die Summe der Quadrate ihrer Längen constant ist. Mn. (O.)

---

L. Saltel. Détermination, par le principe de correspondance analytique, de l'ordre d'un lieu géométrique défini par des conditions algébriques. C. R. LXXXII. 63-66.

L. Saltel. Rectification à une communication précédente, sur la détermination, par ... etc. C. R LXXXIII. 529-532.

Der Verfasser erörtert eine Methode, nach welcher man die gemeinsamen Schnittpunkte zweier algebraischen Curven findet, zwischen deren Coefficienten noch Relationen bestehen, und wonach sich namentlich die Vielfachheit der unwesentlichen Lösungen des Problems erkennen lässt. Die aufgestellten Regeln erläutert er an einem Beispiel, das in der 2[ten] Note näher ausgeführt wird. Was sich Allgemeines über die vorliegende Aufgabe sagen lässt, und wie man in jedem gegebenen Fall am zweckmässigsten verfährt, ersieht man aus den Arbeiten von Zeuthen und Anderen, die dem Verfasser nicht bekannt zu sein scheinen. Siehe auch das vorige Referat. Bl.

L. Saltel. Détermination, par la méthode de correspondance analytique, du degré de la courbe ou surface enveloppe d'une courbe ou d'une surface donnée. C. R. LXXXIII. 608-611.

L. Saltel. Détermination, par la methode de correspondance de l'ordre de la surface enveloppe d'une surface dont l'équation renferme $n$ paramètres liés entre eux seulemént par $n-2$ relations. C. R. LXXXIII. 894-896.

Bl.

---

L. Saltel. Sur le principe de correspondance et le moyen qu'il offre de lever quelques difficultés dans les solutions analytiques. C. R. LXXXII. 324-326.

Der Verfasser beweist einen von Chasles gegebenen Satz über den Grad der Parallelcurve zu einer gegebenen Curve, und verfolgt an der Hand des Correspondenzprincips den Gang der analytischen Lösung des Problems. Bl.

---

L. Saltel. Influence des points multiples sur le degré de la courbe de rebroussement de la polaire réciproque d'une surface donnée. Fontenay le Comte. Sarret. 1875.

Ein vielfacher Punkt von der Ordnung $p$ verringert den Grad der Rückkehrcurve auf $4m(m-1)(m-2)-p(p-1)(4p-5)$, wenn die ursprüngliche Fläche die Ordnung $m$ hat.

Mn. (O.)

---

G. Fouret. Nombre des points de contact des courbes algébriques ou transcendantes avec une courbe algébrique. C. R. LXXXII. 1328-1331.

Neuer Beweis des von Chasles gefundenen, mehrfach bewiesenen, von Fouret selbst auf Systeme transcendenter Curven ausgedehnten Satzes, dass eine Curve $C$ $m^{\text{ter}}$ Ordnung $n^{\text{ter}}$ Klasse

von den Curven eines Systems $(\mu, \nu)$

$$n.\mu+m.\nu$$

Male berührt wird. Bei diesem Beweise erhält man das fernere Resultat, dass die Zahl der Punkte, welche in einen singulären Punkt der Curve $C$ fallen, $\mu$ mal so gross ist, als die Zahl, um welche dieser singuläre Punkt die Klasse der Curven vermindert.

Scht.

---

G. Fouret. Du contact des surfaces d'un implexe avec une surface algébrique. C. R. LXXXII. 1497-1500.

Der Verfasser fügt zu seinen Anzahlen über Berührung bei zweistufigen Flächensystemen (C. R. LXXIX. p. 467 und 689, LXXX. p. 805, siehe F. d. M. VII. p. 391) das folgende Resultat, sowie das ihm dualistisch entsprechende. Bezeichnet $\vartheta$, resp. $\varphi$ bei einem zweistufigen Flächensysteme die Bedingung, dass eine Fläche des Systems eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte, resp. in einer gegebenen Tangentialebene berührt, so bilden die Berührungspunkte dieser Fläche mit einer gegebenen Fläche $F$ ($m^{\text{ter}}$ Ordnung, $n^{\text{ter}}$ Klasse) eine Curve, welche auf jeder gegebenen Ebene

$$n.\vartheta+m.\varphi$$

Punkte besitzt. Diese und viele ähnliche Resultate sind specielle Fälle der vom Referenten in den Gött. Nachr. (Juli 1877) aufgestellten Charakteristikenformeln für den Strahlbüschel insofern, als jede Fläche ein zweistufiges System von Strahlbüscheln erzeugt, deren jeder aus einer Tangentialebene der Fläche und deren Berührungspunkte besteht. Scht.

---

G. Fouret. Du nombre des branches de courbes d'un système $(\mu, \nu)$, qui coupent une courbe algébrique donnée sous un angle de grandeur donnée, ou dont les bissectrices aient une direction donnée. C. R. LXXXIII. 633-636.

Die im Titel genannte Zahl ist gleich

$$(m+n).\mu+m.\nu,$$

wo $m$ die Ordnung, $n$ die Klasse der gegebenen algebraischen Curve bezeichnet. Diese Zahl war schon früher von Jonquières (C. R. LVIII. p. 535) für den Fall bestimmt, dass das gegebene System ein System *algebraischer* Curven ist, und vom Verfasser selbst (Bull. S. M. F. II. p. 81) auf den Fall ausgedehnt, dass dieses System *transcendente* Curven enthalte. Die frühere Bestimmung hatte jedoch die Voraussetzung, dass die gegebene Curve $m^{\text{ter}}$ Ordnung keine Punkt-Singularitäten besitze, das heisst, $m(m-1)^{\text{ter}}$ Klasse sei. Von dieser Beschränkung ist die vorliegende Bestimmung frei. Bemerkenswerth ist, dass Herr Fouret sein Resultat durch Specialisirung des folgenden, viel allgemeineren Resultates findet. Wenn in einer Ebene drei Systeme $(\mu, \nu)$, $(\mu', \nu')$, $(\mu'', \nu'')$ von algebraischen oder transcendenten Curven, und eine algebraische Curve $U_m^n$ ($m^{\text{ter}}$ Ordnung $n^{\text{ter}}$ Klasse) gegeben ist, so giebt es auf dieser Curve

$$(m+n).\mu\mu'\mu''+m.(\mu'\mu''\nu+\mu''\mu\nu'+\mu\mu'\nu'')$$

Punkte $A$ von solcher Beschaffenheit, dass durch $A$ drei den drei gegebenen Systemen angehörige Curven gehen, deren drei Tangenten in $A$ mit der in $A$ berührenden Tangente von $U_m^n$ 4 Strahlen bilden, welche ein gegebenes Doppelverhältniss $\lambda$ besitzen. Scht.

---

G. Fouret. Formule symbolique donnant le degré du lieu des points dont les distances à des courbes algébriques données vérifient une relation donnée.
C. R. LXXXIII. 603-605.

Mit Hülfe der bekannten Formel $n\mu+m\nu$ für die Zahl derjenigen Curven eines Systems $(\mu, \nu)$, welche eine Curve $m^{\text{ter}}$ Ordnung $n^{\text{ter}}$ Klasse berühren, bestimmt der Verfasser den Grad des Orts aller Punkte $A$, welche die folgende Bedingung erfüllen. $A$ soll von $k$ gegebenen Curven (mit den Ordnungen $m_1, m_2, \dots m_k$ und den Klassen $n_1, \dots n_k$) $k$ auf beliebigen Normalen gemessene Abstände $\varrho_1, \dots \varrho_k$ haben, so dass diese

$k$ Strecken eine gegebene algebraische Gleichung

$$F(\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_k) = 0$$

erfüllen. Die gesuchte Zahl ergiebt sich aus dem Producte

$$(dm_1 + pn_1)(dm_2 + pn_2) \dots (dm_k + pn_k),$$

sobald man die Multiplikation der $k$ Summen ausführt, und dann für jedes der $k+1$ Symbole $p^\gamma d^{k-\gamma}$ diejenige Zahl einsetzt, welche sich für den Grad des Ortes von $A$ ergiebt, wenn man statt der $k$ gegebenen Curven $\gamma$ gegebene Punkte und $k-\gamma$ gegebene Gerade substituirt. Ist z. B.

$$F \equiv \varrho_1 - \varrho_2 = 0,$$

so ergiebt sich

$$p^2 = 1,\ pd = 2,\ d^2 = 2,$$

weil der Ort der von zwei Punkten, der von einem Punkte und einem Strahle, der von zwei Strahlen gleichweit entfernten Punkte bezüglich eine Gerade, eine Parabel, ein Strahlenpaar ist. Man erhält daher, dass ein Punkt, welcher von zwei gegebenen Curven $(m_1, n_1)$ und $(m_2, n_2)$ immer denselben Abstand behält, eine Curve von der Ordnung

$$2m_1 m_2 + 2(m_1 n_2 + n_1 m_2) + n_1 n_2$$

beschreibt. Scht.

---

G. Halphén. Sur les ordres et les classes de certains lieux géométriques. C. R. LXXXIII. 705-707.

Herr Fouret hatte in den C. R. LXXXIII. p. 605 (siehe p. 386) eine Formel abgeleitet für die Ordnung eines von einem Punkte beschriebenen Ortes, dessen Entfernungen von gegebenen Curven durch eine gegebene Gleichung mit einander verbunden sind. Diese Formel verallgemeinert der Verfasser. Sind nämlich $k$ algebraische Relationen zwischen den Coordinaten von $k$ Punkten $l_1, l_2, \dots l_k$ und $k$ Strahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ gegeben, und ausserdem auch $k$ Curven $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_k$, so kann man nach der Zahl fragen, welche angiebt, wie oft jedes Paar $(l_i \lambda_i)$ aus einem Punkte der mit gleichem Index behafteten Curve $\varphi_i$ und der Tangente in diesem Punkte besteht. Diese Zahl stellt der Verfasser dar, indem er die symbolische Schreib-

weise für Bedingungen anwendet. Bei der Ableitung benutzt Herr Halphén sehr geschickt die bekannte Formel „$\mu . n + \nu . m$" in folgender Fassung: Ein Clebsch'scher Connex, das heisst, ein in fester Ebene liegendes dreistufiges System von Gebilden, deren jedes aus Punkt und Strahl besteht, enthält $\mu . n + \nu . m$ Gebilde, deren jedes aus Punkt und Tangente einer Curve $(m, n)$ besteht, wenn $\mu$ die Klasse, $\nu$ die Ordnung des Connexes bedeutet. Diese Formel ist ein specieller Fall einer der inzwischen vom Referenten in den Gött. Nachrichten (Juli 1877) mitgetheilten erweiterten Bezout'schen Formeln, welche die Zahl der gemeinsamen Elemente zweier gegebener Systeme von Gebilden $\Gamma$ darstellen für die Fälle, wo $\Gamma$ ein aus Punkten, Strahlen und Ebenen zusammengesetztes Gebilde ist. Scht.

---

G. HALPHÉN. Sur les caractéristiques des systèmes de coniques. C. R. LXXXIII. 537-538.

G. HALPHÉN. Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre. C. R. LXXXIII. 886-888.

A. HURWITZ und H. SCHUBERT. Ueber den Chasles'schen Satz $\alpha\mu + \beta\nu$. Gött. Nachr. 1876. 503.

L. SALTEL. Sur la formule indiquant le nombre d'un système $(\mu, \nu)$ satisfaisant à une cinquième condition. Bull. de Belg. (2) LXII. 617-624.

Die 4 Mittheilungen beziehen sich auf die Gültigkeit, den Beweis und die Art der Auffassung der bekannten Charakteristikenformel $\alpha\mu + \beta\nu$ bei Kegelschnitten. Man verstehe mit dem Referenten unter Charakteristikenformel eines Gebildes $\Gamma$ im weiteren Sinne jede Formel, welche die Zahl $x$ derjenigen Gebilde $\Gamma$, die zweien gegebenen Systemen von Gebilden $\Gamma$ gemeinsam sind, als Summe der mit Coefficienten multiplicirten Producte je zweier Zahlen (Charakteristiken) darstellt, von denen immer die eine nur auf das eine System, die andere nur auf das andere System zu beziehen ist; gleichviel ob eine solche

Zahl angiebt, wieviel nicht-ausgeartete Gebilde des Systems eine gewisse räumliche Bedingung erfüllen, oder angiebt, wieviel irgendwie ausgeartete Gebilde im Systeme vorhanden sind resp. eine gewisse Bedingung erfüllen. Ist nun speciell $\Gamma$ ein Kegelschnitt in fester Ebene, das eine System einstufig, also das andere vierstufig, so handelt es sich im wesentlichen darum, ob es immer ausreicht, wenn zur Darstellung der Zahl $x$ jedem Systeme zwei Charakteristiken entnommen werden, oder ob in gewissen speciellen Fällen drei Charakteristiken nöthig sind. Eine eingehende Besprechung dieses Gegenstandes wird erst am Platze sein, wenn die ausführliche Abhandlung des Herrn Halphén erschienen ist. Ein Literatur-Verzeichniss über diesen Gegenstand gab Referent schon im VII. Bande der F. d. M. p. 406 und 407. Scht.

---

L. Saltel. Sur la formule indiquant le nombre des coniques d'un système $(\mu, \nu)$ satisfaisant à une cinquième condition. Bull. de Belg. (2) XLII. 617-624.

F. Folie. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XLII. 486-487.

Ungenauigkeiten in den Chasles'schen Formeln aus der Theorie der Charakteristiken. Siehe auch oben.

Mn. (O.)

---

G. Halphén. Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré. Bull. S. M. F. IV. 59-85.

In dieser Arbeit giebt der Verfasser eine Bestimmung der Anzahl derjenigen Punkte einer ebenen Curve, in welchen ein Kegelschnitt sechspunktig oder eine Curve 3ter Ordnung mehr als neunpunktig berühren kann, indem er dabei die gegebene Curve mit beliebigen Singularitäten behaftet annimmt.

Mit Zuhilfenahme der Reihenentwickelungen, die in der Nähe eines singulären Punktes einer Curve gelten, gelangt Halphén zu

dem allgemeinen Satze: Seien $m$, $c$ Ordnung und Klasse einer Curve, $N$ die Gesammtzahl der Zweige dieser Curve, welche mit ihren Tangenten Berührungen haben, deren Ordnungen von Eins verschieden sind; sei endlich $(4+l)$ die Ordnung der Berührung eines Zweigs mit seinem osculirenden Kegelschnitt in einem Punkte, in dem diese Ordnung von 4 verschieden und die Berührung mit der Tangente von der ersten Ordnung ist; dann hat man

$$\Sigma l = 3(c-2m+N).$$

Für Curven ohne Singularitäten ergiebt sich hieraus die von Cayley und Painvin schon gefundene Zahl $m(12m-27)$. (Vgl. Cayley, Phil. Trans. 1865; Painvin C. R. LXXXVIII.). Hat die Curve nur gewöhnliche Singularitäten, und zwar $r$ Rückkehrpunkte, so ist die Zahl der Sechsberührungspunkte (points sextactiques) gleich $12c-15m+9r$.

Für die Anzahl der Punkte, in welchen eine mehr als neunpunktige Berührung mit Curven 3ter Ordnung stattfinden kann, gelangt Halphén ebenfalls zu einem allgemeinen Ausdruck, den wir seiner Complication wegen nicht anführen wollen. Für eine Curve ohne Singularitäten ist diese Zahl $= 15m(3m-7)$, und für eine Curve mit den gewöhnlichen Singularitäten findet sie sich

$$= 15(c-2m+i+2r)-4r-5i;$$

wobei $r$ dieselbe Bedeutung hat wie oben, und $i$ die Anzahl der Wendepunkte ist. Lth.

---

H. G. Zeuthen. Note sur les singularités des courbes planes. Clebsch Ann. X. 210-220.

Neue Beweise der Cayley'schen Sätze über die Zurückführung einer Singularität auf Doppel- und Rückkehrpunkte und die reciproken Singularitäten. Ferner wird der Zusammenhang zwischen den Werthen dieser Zahlen für besondere Curven eines gewissen Bedingungen unterworfenen Systems und den für die allgemeinen Curven näher untersucht. Am Schlusse werden die Cayley'schen Zahlen ermittelt für den Fall eines vierfachen

Punktes mit einer einzigen Tangente, welche die Curve in sechs zusammenfallenden Punkten trifft. St.

---

G. Halphén. Sur une série de courbes analogues aux dévelopées. Liouville J. (3) II. 87-144.

In der Theorie der singulären Punkte spielt, wie der Verfasser wohl zuerst bemerkt hat, eine grosse Rolle folgende Reihe von rationalen Zahlen. Nimmt man einen Curvenpunkt als Anfangspunkt der linearen Coordinaten $x$, $y$ und die Tangente eines Curvenzweiges als Axe $y = 0$, so ergiebt sich für denselben eine Entwickelung nach steigenden Potenzen von $x^{\frac{1}{Q}}$, welche mit einem Gliede beginnt, dessen Exponent, in reducirter Form mit $\frac{p}{q}$ bezeichnet, die Einheit übersteigt. Bringt man alle Exponenten auf die reducirte Form, so sei $m_1$ der erste Exponent nach $\frac{p}{q}$, dessen Nenner weder $q$ noch einem Divisor von $q$ gleich sei. Man kann daher setzen

$$m_1 = \frac{p}{q} + \frac{p_1}{qq_1} \qquad (q_1 > 1).$$

Von den Exponenten der folgenden Glieder sei $m_2$ der kleinste, dessen Nenner weder $qq_1$ noch einem Theiler dieser Zahl gleich sei. Man setze wieder

$$m_2 = \frac{p}{q} + \frac{p_1}{qq_1} + \frac{p_2}{qq_1 q_2} \qquad (q_2 > 1).$$

u. s. f. Auf diese Weise erhält man eine endliche Anzahl ($s$) Exponenten, deren letzter den Nenner $Q$ haben muss. Bringt man sie auf die Form

$$m_k = \frac{p}{q} + \frac{p_1}{qq_1} + \cdots + \frac{p_k}{qq_1 \cdots q_k} \qquad (k = 1, 2 \ldots s),$$

so heissen die in reducirter Form vorausgesetzten Brüche

$$\frac{p}{q}, \quad \frac{p_1}{q_1} \cdots \frac{p_s}{q_s},$$

deren Nenner das Product $Q$ liefern, die charakteristischen Zahlen des betrachteten Curvenzweiges.

Bezeichnet man den Zweig kurz mit

$$y = \left(\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \dots \frac{p_s}{q_s}\right)(x),$$

so ergiebt sich für die umgekehrte Reihe die Form

$$x = \left(\frac{q}{p}, \frac{p_1}{q_1}, \dots \frac{p_s}{q_s}\right)(y),$$

aus welcher Formel die Wichtigkeit der eingeführten Zahlen am besten hervorgeht.

Hauptsächlich durch diese Formel gelingt der Beweis des folgenden Satzes: Man leite aus einer gegebenen Curve $S$ eine neue $S^1$ dadurch her, dass man zu jedem Punkte $m$ die Polare in Beziehung auf einen Kegelschnitt $C = 0$ construirt und ihren Schnittpunkt $m'$ mit der Tangente von $S$ in $m$ betrachtet. Man kann nun $C = 0$ so annehmen, dass, nachdem diese Transformation eine ganz bestimmte Anzahl von Malen angewendet worden ist, alle transformirten Curven nur mehr lineare Zweige besitzen, d. i. überall $Q = 1$ ist. Und zwar muss der Kegelschnitt $C$ so gewählt werden, dass er $S$ nur in einfachen Punkten schneidet, ohne sie zu berühren und dass auch die gemeinsamen Tangenten von $C$ und $S$ nur einfache Tangenten der letzteren seien.

Die genannte Zahl selbst ergiebt sich nach folgendem Satze: „Die nothwendige und hinreichende Anzahl von Transformationen, welche einen Curvenzweig in einen linearen verwandeln, ist gleich der Summe der Theilnenner der den characteristischen Zahlen gleichen Kettenbrüche, ausgenommen den letzten Theilnenner der letzten Zahl".

§ III. der vorliegenden Abhandlung beschäftigt sich mit der Bestimmung der Ordnung und Classe der abgeleiteten Curven $S^1, S^2 \dots$ Es ergiebt sich, dass, wenn für jede Abbildung die Kegelschnitte $C$ in der oben angegebenen Weise gewählt werden, Klasse $c$ und Ordnung $m$ durch folgende Formeln bestimmt werden:

$$c_{k+i} = 3^i c_k, \quad m_{k+i} = m_k + \frac{3^i - 1}{2} c_k.$$

Hier bezeichnet $S^k$ die erste Curve der Reihe, welche nur noch lineare Zweige besitzt.

Die vorstehenden Sätze verlieren ihre Gültigkeit, wenn der Kegelschnitt in zwei Gerade zerfällt. Dieser Fall (vgl. § IV.) gewinnt dadurch an Interesse, dass die transformirten Curven $S^1, S^2 \dots$ reciprok der Reihe der abgewickelten Curven von $S$ entsprechen. Nun bleiben für jeden nicht-linearen Zweig der Curve $S$ die characteristischen Zahlen von $\frac{p_1}{q_1}$ an sicher ungeändert. Nach einer gewissen Anzahl von Transformationen entspringen alle singulären Zweige vom Durchschnittspunkte der beiden Geraden oder wenigstens von Punkten derselben. Ordnung und Classe der abgeleiteten Curven bilden arithmetische Progressionen von derselben Differenz. St.

---

R. Sturm. Zur Theorie algebraischer Flächen. Clebsch Ann. IX. 573-575.

Der Verfasser hatte schon früher (Clebsch Ann. VI. p. 241 und VII. p. 567; Referate F. d. M. V. p. 325 und VI. p. 399) Anzahlen bestimmt, welche sich auf die Fusspunktscurven, Normalen und Normalebenen allgemeiner Flächen beziehen. Dabei hatte er namentlich auch gefunden, dass bei einer Fläche $F$ ($n^{ter}$ Ordnung, $r^{ten}$ Ranges, $m^{ter}$ Classe), welche in jeder gegebenen Ebene $\alpha$ Wendetangenten besitzt, und $\sigma$ Wendetangenten durch jeden gegebenen Punkt schickt, die Ordnung der Krümmungsmittelpunktsfläche gleich

$$3n+3m+\alpha+\sigma,$$

und ihre Classe gleich

$$n+m+\alpha+\sigma$$

ist. Hier setzt der Verfasser diese Untersuchungen fort, und geht namentlich auf die in der abzählenden Geometrie noch nicht behandelten Tangenten der auf $F$ liegenden Krümmungslinien ein. Diese Tangenten bilden auf $F$ ein zweistufiges System (Strahlsystem oder Congruenz) welches auf jede gegebene Ebene

$$n+r+\alpha$$

Strahlen wirft, und durch jeden gegebenen Punkt

$$m+r+\sigma$$

Strahlen schickt. Von den Krümmungslinien selbst vermuthet der Verfasser mit Andern, dass sie im allgemeinen transcendent seien.

Scht.

---

S. ROBERTS. Further note on the motion of a plane under certain conditions. Proc. L. M. S. VII. 216-225.

Der Verfasser betrachtet hier die beiden Fälle: 1) dass ein Punkt der bewegten Ebene eine bestimmte Curve durchlaufen soll, während eine Gerade eine bestimmte Curve umhüllt, 2) dass zwei Gerade der Ebene zwei feste Curven umhüllen. In beiden Fällen werden die Singularitäten der Bahncurve eines beliebigen Punktes und in einigen Beispielen deren Gleichungen angegeben.

Kln.

---

G. FOURET. Intégration géométrique de l'équation aux dérivées partielles

$$L(px+qy-z)-Mp-Nq+R=0,$$

dans laquelle $L$, $M$, $N$, $R$ désignent des fonctions linéaires de $x$, $y$, $z$. C. R. LXXXIII. 794-797.

Der Verfasser giebt der Differentialgleichung dadurch eine geometrische Bedeutung, dass er an die allgemeinen Gebilde anknüpft, die er Implexe nennt (F. d. M. VI. p. 395, VII. p. 391); der einfachste Fall derselben liegt hier vor. Uebrigens sind die Integralflächen, wie der Verfasser angiebt, keine anderen als diejenigen, welche Lie und der Referent in den C. R. LXX. p. 1222, 1275 als Flächen $V$ betrachtet haben.

Kln.

---

G. HALPHEN. Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et sur les questions analogues dans l'espace. Liouville J. (3) II. 257-291, 371-411.

Man kennt die Methoden, deren sich der Verfasser bedient, um die Durchschnittspunkte von Curven zu zählen, welche gemeinsame vielfache Punkte haben. Auf derartige Aufgaben kommt das hier behandelte Problem zurück, sobald man die Differentialquotienten der Differentialgleichung durch die partiellen Differentialquotienten der Curvengleichung ersetzt. Im Allgemeinen wird die Zahl der brauchbaren Punkte durch einen Ausdruck gegeben, der in zwei Zahlenreihen bilinear ist: die Zahlen der ersten Reihe hängen nur von der Curve, die der zweiten Reihe nur von der Differentialgleichung ab. Besonders wichtig sind dem Verfasser solche Differentialgleichungen, welche ihre Bedeutung bei beliebigen Collineationen behalten. Er zeigt, dass in der Ebene nur eine Differentialgleichung 2ter Ordnung dieser Art besteht: $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, keine von der 3ten Ordnung. Des Weiteren untersucht er insbesondere diejenige Differentialgleichung, welche aussagt, dass sechs consecutive Punkte sich auf einem Kegelschnitte befinden, sowie eine andere, welche bedingt, dass durch 9 consecutive Punkte ein ganzer Büschel von Curven 3ter Ordnung geht. Die auf beliebig viele Variable bezüglichen Probleme, welche zum Schluss betrachtet werden, sind viel einfacher: sie entsprechen z. B. der Bestimmung der parabolischen Curve oder der Curve vierpunktiger Berührung einer allgemeinen Ordnungsfläche. Kln.

---

R. Sturm. Das Problem der Collineation. Clebsch Ann. X. 117-137

R. Sturm. On correlative pencils. Proc. L. M. S. VII. 175-194

Der Verfasser hatte in früheren Abhandlungen (Clebsch Ann. I. p. 533 und VI. p. 513) das in fester Ebene gelegene Punktepaar und das im Raume gelegene Strahlenpaar gewissen Bedingungen der Projectivität unterworfen, und war dabei zu interessanten Abzählungsresultaten gelangt, deren wichtigste Referent nicht kürzer und anschaulicher aussprechen kann, als es der Verfasser selbst thut in Königsb. Repert. I. p. 388:

1) „Es sind in zwei (identischen oder verschiedenen) Ebenen zwei Gruppen von je $\sigma$ Punkten gegeben, die einander zugeordnet sind, es sollen solche Paare von associirten Punkten gefunden werden, aus denen die homologen Punkte der Gruppen durch entsprechende Strahlen projectiver Strahlbüschel projicirt werden. Je nachdem $\sigma = 3, 4, 5, 6, 7$ ist, ist jedem Punkte der einen Ebene jeder der andern; eine Curve 2ter Ordnung; ein einziger Punkt associirt, der eine Curve 5ter Ordnung durchläuft, wenn jener eine Gerade durchläuft; bilden die Punkte jeder Ebene, welche associirte besitzen, eine Curve 3ter Ordnung; existiren drei Paare associirter Punkte".

2) „Es sind in zwei Räumen $\sigma$ Paare zugeordneter Punkte gegeben; es sollen solche Paare von associirten Strahlen bestimmt werden, aus denen zugeordnete Punkte durch entsprechende Ebenen projektiver Ebenenbüschel projicirt werden. Je nachdem $\sigma = 3, 4, 5, 6, 7$ ist, ist jeder Geraden jede Gerade; ein Reye'scher Complex 2ten Grades; das Sehnensystem einer cubischen Raumcurve; eine Regelschaar; eine einzige Gerade associirt. Je nachdem $\sigma = 8, 9, 10, 11$ ist, bilden die Geraden, welche associirte besitzen, einen Complex 4ten Grades; eine Congruenz 6ter Ordnung 10ter Classe; eine Regelfläche 20ten Grades; sind in der Anzahl 20 vorhanden".

An diese Untersuchungen schliesst sich die erste der vorliegenden Arbeiten eng an. Das hier behandelte Gebilde ist ein im Raume bewegliches Punktepaar $(p, q)$. Die beiden Punkte dieses Paares sind die Träger collinearer Strahlenbündel. Die Collineation ist bekanntlich eindeutig festgestellt, sobald ausser den beiden Trägern $p$ und $q$ 4 Strahlen durch $p$ und 4 ihnen entsprechende Strahlen durch $q$ gegeben sind. Diese 4 Strahlenpaare kann man sich dadurch festgestellt denken, dass zwei Gruppen von je 4 Punkten gegeben sind, durch welche sie gehen sollen. Sollen nun aber in den collinearen Bündeln $(4+\varrho)$ Paare von Strahlen sich entsprechen, und unterliegt jeder der $2\,(4+\varrho)$ Strahlen der zweifachen Bedingung, durch einen gegebenen Punkt zu gehen, so ist dadurch dem Punktepaare $(p, q)$ eine $2\varrho$-fache Bedingung auferlegt. Diese Bedingung heisse $B_{2\varrho}$. Da

nun das Punktepaar die Constantenzahl 6 hat, so giebt es immer eine endliche Anzahl von Punktepaaren $(p, q)$, welche die Bedingung $B_{2\varrho}$ und ausserdem eine $(6-2\varrho)$-fache Bedingung $C$ erfüllen.

Diese Anzahl hat nun der Verfasser namentlich für die Fälle bestimmt, wo die hinzutretende Bedingung $C$ für das Punktepaar eine Grundbedingung ist, d. h. darin besteht, dass Punkt $p$ oder $q$ oder $p$ und $q$ auf gegebenen Ebenen, auf gegebenen Geraden, oder in gegebenen Punkten liegen sollen. Specieller ergiebt sich:

1) Wenn das Punktepaar die Bedingung $B_2$ erfüllen soll, so giebt es 3 Punktepaare, welche ihren einen Punkt in einem gegebenen Punkte, ihren andern auf einer gegebenen Ebene besitzen, und 5 Punktepaare, welche ihre beiden Punkte auf zwei gegebenen Geraden besitzen.

2) Wenn das Punktepaar die Bedingung $B_4$ erfüllen soll, so giebt es 2 Punktepaare, welche ihren einen Punkt auf einer gegebenen Geraden besitzen, und 11 Punktepaare, welche jeden ihrer beiden Punkte auf einer gegebenen Ebene besitzen.

3) Die Bedingung $B_6$ wird durch 4 Punktepaare erfüllt.

4) Es giebt in jeder Ebene 11 Punkte, in denen die beiden Punkte eines die Bedingung $B_2$ erfüllenden Punktepaares coincidiren.

Die eben vom Referenten in seiner Terminologie angegebenen Zahlen können zugleich als die Gradzahlen gewisser Curven oder Flächen aufgefasst werden, deren specielles Verhalten zu den gegebenen Punktgruppen Herr Sturm genau untersucht.

Im Jahre 1874 hatte nun auch Herr Hirst die Bedingung des Ein-eindeutigen Entsprechens in die abzählende Geometrie eingeführt, indem er in seiner Abhandlung „On correlation of two planes“ (Proc. L. M. S. V. p. 40, Brioschi Ann. (2) VI. p. 260, Referat F. d. M. VI p. 347) zwei zugleich als Punktfelder und als Strahlenfelder aufgefasste Ebenen correlativ auf einander bezog, d. h. jedem Punkt der einen Ebene einen Strahl der andern Ebene und umgekehrt zuordnete. Verlangt man dann, dass ein gegebener Punkt der einen Ebene einem ge-

gebenen Strahle der andern Ebene entsprechen soll, so legt man dadurch der Correlation eine zweifache Bedingung auf; verlangt man dagegen nur, dass zwei in beiden Ebenen gegebene Punkte derartig zusammengehören, dass der entsprechende Strahl des einen Punktes durch den andern geht, oder, dass zwei in beiden Ebenen gegebene Strahlen derartig zusammengehören, dass der entsprechende Punkt des einen Strahls auf dem andern liegt, so legt man dadurch jedesmal der Correlation eine einfache Bedingung auf. In dieser Weise erwachsen also der Correlation eine zweifache und zwei einfache Bedingungen. Solche Bedingungen werden elementar genannt. Herr Hirst hatte nun alle möglichen Zahlen bestimmt, welche angeben, wieviel Correlationen durch gegebene elementare Bedingungen bestimmt sind, wo die Dimensionssumme der gegebenen Bedingungen immer gleich 8 sein muss. Im Jahre 1875 hatte dann Herr Hirst seine Untersuchungen auf den Raum ausgedehnt, und in den Proc. L. M. S. VI. p. 7 (F. d. M. VII. p. 374) angegeben, wie die analogen Zahlen zu berechnen sind, welche auf die durch 15 einfache Bedingungen bestimmte Correlation zweier Räume Bezug nehmen.

Von Einfluss auf die weiteren Untersuchungen Sturm's war nun nicht bloss die Verwandtschaft seiner Probleme mit den von Hirst behandelten Problemen, sondern namentlich auch die von Hirst zur Auffindung seiner Anzahlen angewendete Methode. Er findet nämlich seine Anzahlen aus den Anzahlen gewisser exceptioneller Correlationen, deren Anzahlen leichter zu ermitteln sind, als die Anzahlen der allgemeinen Correlationen, wendet also dieselbe Abzählungsmethode an, welche Chasles, Zeuthen und Referent angewandt haben, um die auf Plancurven und Flächen bezüglichen Anzahlen abzuleiten. Von den auf exceptionelle Correlationen bezüglichen Anzahlen, welche Herr Hirst bei seiner Behandlungsweise nöthig hatte, konnte er die einen aus Sturm's oben erwähnten Resultaten für die räumliche Projectivität entnehmen. Die andern mussten sich ergeben, wenn man das Problem der Bündel-Correlation löste. Dieses Problem nahm daher Herr Sturm in der zweiten der vorliegenden Abhandlungen in Angriff. Dasselbe kann man aussprechen, wie folgt:

„Gegeben sind in dem einen von zwei Räumen $k$ Punkte $A_i$, $l$ Gerade $a_i$, $m$ Punkte $\mathfrak{A}_i$, $n$ Gerade $\mathfrak{a}_i$; in dem andern, ihnen entsprechend, $k$ Gerade $b_i$, $l$ Punkte $B_i$, $m$ Punkte $\mathfrak{B}_i$, $n$ Gerade $\mathfrak{b}_i$. Man verlangt nun von zwei Punkten $A$, $B$, dass den $k$ Strahlen $AA_i$ die $k$ Ebenen $Bb_i$, den $l$ Ebenen $Aa_i$ die $l$ Strahlen $BB_i$ entsprechen, ferner, dass jeder der beiden Strahlen $A\mathfrak{A}_i$, $B\mathfrak{B}_i$ in der dem andern entsprechenden Ebene liegt, und dass jede der beiden Ebenen $A\mathfrak{a}_i$, $B\mathfrak{b}_i$ durch den der andern entsprechenden Strahl geht. Dadurch legt man dem Punktepaare $(A, B)$ eine $(2k+2l+m+n-8)$-fache Bedingung $(klmn)$ auf. Zu suchen sind alle Zahlen, welche angeben, wieviel Punktepaare die Bedingung $(klmn)$ und eine $(14-2k-2l-m-n)$-fache Grundbedingung erfüllen".

Dieses Problem löst Herr Sturm in den „Correlative pencils" für alle Fälle, wo $n = 0$ ist. Im Jahre 1877 folgte jedoch eine sehr umfangreiche Abhandlung in den Math. Ann. XII. p. 255, in welcher das ebengenannte Problem erschöpfend erledigt ist, und zugleich mit grossem Erfolge die Methode angewandt ist, durch welche man die Anzahlen für ein allgemeines Gebilde aus den Anzahlen der Ausartungen dieses Gebildes gewinnt. Die genauere Besprechung dieser Abhandlung, sowie der Abhandlung von Hirst in den Proc. L. M. S. VIII. p. 1 gehört jedoch erst in den nächsten Band dieses Jahrbuchs. Scht.

---

H. Schubert. Beiträge zur abzählenden Geometrie.
Clebsch Ann. X. 1-116.

Von der dänischen Academie der Wissenschaften war im Jahre 1873 als Preisaufgabe die Ausdehnung der Charakteristikentheorie auf die cubische Raumcurve gestellt worden. Im Januar 1875 wurde der Preis Herrn Schubert ertheilt. Aus der Preisschrift sind durch Erweiterung und Verallgemeinerung drei ausgedehnte Abhandlungen erwachsen, welche Schubert unter dem Titel: „Beiträge zur abzählenden Geometrie" zusammenfasste und von denen die erste die zu besprechende ist. Sie handelt über allgemeingültige Formeln und Vorstellungen der abzählen-

den Geometrie; die zweite, von welcher Schubert's Aufsätze in den Gött. Nachr. Mai 1874 und Mai 1875 Vorläufer gewesen sind, wird die fundamentalen Anzahlen und Ausartungen der cubischen Plancurve 0ten Geschlechts, die dritte aber die elf Ausartungen und die Elementarzahlen der cubischen Raumcurve behandeln.

Als Einleitung zu der ganzen Arbeit giebt der Verfasser einen historischen Ueberblick über die 3 Untersuchungsrichtungen, die sich an Chasles' Charakteristikentheorie angeschlossen haben: Erweiterung des Correspondenzprincips, des Satzes $\alpha\mu + \beta\nu$, Zurückführung der Zahlen von Curven eines Systems, welche gewisse Bedingungen zu erfüllen haben, auf die Zahlen der Ausartungen auch bei höhern Curven, sodann einen Bericht über die für die Lösung der eigentlichen Preisaufgabe nöthigen Vorarbeiten. Der erste Theil zerfällt in drei Abschnitte, von denen der erste: „Terminologie und Symbolik" betitelt ist.

Ist die Zahl der Individuen eines algebraischen Gebildes $\infty^c$ im Raume, so nennt Schubert $c$ die Constantenzahl desselben; eine Bedingung heisst $b$-fach, wenn sie durch $\infty^{c-b}$ Individuen überhaupt erfüllt werden kann. Sie wird dann in einem System $a^{ter}$ Stufe (d. h. mit $\infty^a$ Individuen) durch $\infty^{a-b}$, speciell in einem System $b^{ter}$ Stufe durch $\infty^0$, mithin eine endliche Zahl von Individuen erfüllt.

Diese endliche Zahl bleibt dieselbe, gleichgültig, wie die Gebilde, welche die Bedingung verursachen, liegen, so lange sie nur endlich bleibt. Dies Princip führt der Verfasser als Princip der speciellen Lage oder der Erhaltung der Anzahl ein. Indem er diese endliche Zahl selbst Bedingung nennt, kann er von Beziehungen zwischen und von Rechnen mit Bedingungen sprechen. Unter dem Producte ferner $b^{ter}$ Dimension von $\alpha$-, $\beta$-, $\gamma$-, ...fachen Bedingungen $(\alpha+\beta+\gamma+\cdots = b)$ versteht er mit Halphan die Zahl der Individuen eines Systems $b^{ter}$ Stufe, welche diesen Bedingungen zugleich genügen. Ist für ein System $b^{ter}$ Stufe eine $b$-fache Bedingung als lineare homogene Function von andern $b$-fachen Bedingungen darstellbar, so heisst diese Darstellung ein Modul jener Bedingung, und wenn es bei einem System $b^{ter}$ Stufe gelingt, auf eine Reihe von $b$-fachen Bedingungen alle

andern in dieser Weise zurückzuführen, so heissen jene die $b$-fachen Charakteristiken des Systems.

Gilt eine Relation zwischen $b$-fachen Bedingungen für jedes beliebige System $b^{\text{ter}}$ Stufe, so kann man sie mit einer beliebigen $b'$-fachen Bedingung ($b' \leqq c - b$) multipliciren; denn man kann diese $b'$-fache Bedingung als eine der das System definirenden annehmen, sie dann aus diesen ausscheiden, wodurch sich ein System $(b + b')^{\text{ter}}$ Stufe ergiebt, und sie zu den den Mitgliedern dieses Systems aufzuerlegenden hinzugesellen. Sind die Moduln zweier Bedingungen allgemein, d. h. für jedes System ihrer Dimension gültig, so kann man sie einfach nach den Regeln der Arithmetik multipliciren, um den Modul der aus ihnen zusammengesetzten Bedingung zu erhalten. Hierauf beruht die symbolische Multiplication von Bedingungen.

Es folgen dann, zum Theil behufs einer geeigneteren Terminologie, mehrere Definitionen: *Hauptelemente* (Punkt, Ebene, Strahl); Punkt-, Ebenen-Oerter $0^{\text{ter}}$ bis $3^{\text{ter}}$ Stufe, Strahlen-Oerter $0^{\text{ter}}$ bis $4^{\text{ter}}$ Stufe; *Grundgebilde* oder elementare Oerter (Punkt, Punktaxe = Punktreihe, Punktfeld, Punktraum; Ebene, Ebenenaxe = Ebenenbüschel, Ebenenbündel, Ebenenraum; Strahl, Strahlbüschel, Strahlenfeld und Strahlenbündel, Strahlenaxe [spec. lin. Complex], Strahlenraum); *Grundbedingungen* für Oerter, deren jede einem dieser Grundgebilde zugehört (z. B. die Punktaxen-Bedingung für einen Punktort $1^{\text{ter}}$ Stufe [Curve] ist die (einfache) Bedingung, dass ein Punkt der Curve zu einer gegebenen Punktaxe gehöre, also auf eine gegebene Gerade falle); *Gradzahl* eines Orts $a^{\text{ter}}$ Stufe d. i. die endliche Zahl der erzeugenden Elemente (von der Constantenzahl $c$), welche er mit dem aus demselben Elemente gebildeten Grundgebilde $(c-a)^{\text{ter}}$ Stufe gemein hat, so dass, weil es 2 Strahlengebilde $2^{\text{ter}}$ Stufe giebt, der Strahlenort $2^{\text{ter}}$ Stufe (Congruenz) zwei Gradzahlen hat: Bündelgrad, sonst Ordnung, und Feldgrad, sonst Klasse; *Plücker'sche Oerter* eines Gebildes.

Im zweiten Abschnitte werden allgemeine Formeln zwischen Grundbedingungen besprochen, zunächst zwischen denen eines einfachen Hauptelements. Als Beispiel heben wir die durch das

Princip der speciellen Lage erhaltene Relation zweiter Dimension

$$g^2 = g_e + g_p$$

hervor, worin $g$, $g_e$, $g_p$ die Bedingungen sind, dass eine Gerade einer Strahlenaxe, einem Strahlenfelde oder -Bündel angehöre (oder mit einer Geraden, Ebene oder einem Punkte incidire); also in jedem Strahlenort 2[ter] Stufe ist die Zahl der Geraden, welche zwei Gerade treffen, ($g^2 = gg$) gleich der Summe von Feld- und Bündelgrad. Sei $g$ selbst eine der definirenden Bedingungen des Strahlenorts, so dass nach Entfernung derselben ein Strahlenort 3[ter] Stufe (Complex) entsteht, dem nun noch die Bedingung $g$ auferlegt wird, so erhält man durch symbolische Multiplication (um diese so zu erläutern):

$$g^3 = g_e g + g_p g.$$

Ist $g_s$ die Bedingung, einem Strahlbüschel anzugehören, so ist

$$g_e g = g_p g = g_s,$$

also

$$g^3 = 2g_s;$$

demnach ist die Zahl der Geraden eines Complexes, welche 3 Gerade treffen, also einer Regelschaar angehören, doppelt so gross als der Grad des Complexes.

Es folgen dann Relationen zwischen den Grundbedingungen zweier incidenter Hauptelemente, darauf zwischen den Grundbedingungen eines Hauptelements und eines von ihm „getragenen" Orts. Für Punkt und Gerade, welche incident sind, hat man z. B. die Formel zweiter Dimension

$$cg = c_g + g_e;$$

d. h. in einem System von $\infty^2$ so vereinigten Hauptelementen ist die Zahl derjenigen, wo der Punkt mit einer Ebene und gleichzeitig die Gerade mit einer Geraden incidirt, gleich der Summe der Zahlen derer, wo der Punkt auf eine Gerade, und derer, wo die Gerade auf eine Ebene fällt.

Es ist nur zu bedauern, dass der Verfasser die Bezeichnung seiner Symbole nicht der schon ziemlich verbreiteten Bezeichnung der Hauptelemente (nach Reye) angepasst, sowie auch, dass er die doppelte Bedeutung von $c$ nicht vermieden und seine eigene Bezeichnung nicht festgehalten hat. Den Schluss des ersten

Abschnitts bilden als Beispiele einige für die späteren Theile nothwendigen Relationen.

Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit den aus zwei Hauptelementen gebildeten Paaren und deren Ausartungen.

Das Punktepaar, dessen Constantenzahl 6 ist, hat zu Plückerschen Oertern die beiden Punkte $c$, $d$ und die Verbindungsgerade $g$ – welche Buchstaben zugleich die einfachen Bedingungen bezeichnen, dass $c$ oder $d$ in einer Ebene liege, $g$ eine Gerade treffe. Es artet aus, wenn die Punkte in einen Punkt $b$ coincidiren, und die Coincidenz ist 1ter, 2ter, 3ter Gattung, je nachdem $\infty^0$, $\infty^1$, $\infty^2$ Gerade $g$ möglich sind, so dass in den beiden letzten Fällen Bedingungen 1ter, bez. 2ter Dimension von $g$ von selbst erfüllt werden können. In einem System 3ter Stufe von Punktepaaren wird die Zahl der Ausartungen 3ter, 2ter, 1ter Gattung $\infty^0$, $\infty^1$, $\infty^2$ sein. In einem Ebenenbüschel rufen die Punktepaare eines Systems 1ter Stufe eine Correspondenz hervor, welche zu

$$\text{(I.)} \qquad c+d-g=\varepsilon$$

führt, wo $\varepsilon$ die Zahl der Coincidenzen ist, die also gleich der Zahl der Paare ist, wo der eine Punkt mit einer gegebenen Ebene incidirt, plus der Zahl der Paare, wo es der andere thut, weniger der Zahl derer, wo die Verbindungsgerade eine gegebene Gerade trifft. Durch symbolische Multiplication und Anwendung der Relationen zwischen Bedingungen incidenter Hauptelemente ergeben sich Formeln bis zur 6ten Dimension; z. B.

$$\text{(II.)} \qquad c^2+cd+d^2-g_p=\varepsilon(g+b),$$

$$\text{(III.)} \qquad c^3+c^2d+cd^2+d^3=\varepsilon(g_p+bg+b^2),$$

von denen die letztere so zu interpretiren ist: Die Summe der Zahlen der Paare in einem Systeme 3ter Stufe, bei denen der erste Punkt in einen gegebenen Punkt (d. h. auf 3 Ebenen) fällt; bei denen der erste auf eine Gerade (2 Ebenen), der zweite zugleich auf eine Ebene fällt; das Umgekehrte vom zweiten Falle geschieht; bei denen der zweite Punkt in einen gegebenen fällt, ist gleich der Summe der Zahlen der Coincidenzen, bei denen die Verbindungsgerade einem Bündel angehört; bei denen sie mit einer Geraden und der Punkt zugleich mit einer Ebene incidirt;

bei denen der Punkt auf einer Geraden liegt. Hier können alle 3 Gattungen der Coincidenz vorkommen und, da $\varepsilon b^2$ nur von der ersten, $\varepsilon bg$ nur von den beiden ersten und allein $\varepsilon g_p$ von allen drei erfüllt werden kann, so zerlegt sich die rechte Seite in sechs Summanden.

Aus (II.) und (III.) erhält man die Correspondenzprincipien im Punktfeld und Punktraum, jedoch vollständiger als sie durch Salmon und Zeuthen gegeben sind. (Salmon-Fiedler, An. Geom. des Raumes 2. Aufl. II. Bd. No. 441-442; Zeuthen C. R. 1. Juni 1874).

Für das Strahlenpaar (Constantenzahl 8) sind Plücker'sche Oerter die beiden Strahlen $g$, $h$, welche Buchstaben zugleich für die einfache Bedingung, dass $g$ oder $h$ eine Gerade treffe, gebraucht werden, und der Strahlenort 2[ter] Stufe (Congruenz) der beide treffenden Geraden. Die einfache, bez. zweifache Bedingung, dass ein Strahl dieses Orts in einem gegebenen Büschel liege oder eine gegebene Gerade sei, sei $\beta$, $B$. Ausartungen sind hier zwei: die Coincidenz $\varepsilon$, deren Gerade $k$ sei, und das Schneidepaar $\sigma$, bei dem der Strahlenort in ein Strahlenfeld in der Ebene $\mu$ und einen Strahlenbündel um den Punkt $c$ zerfällt, welche Buchstaben $c$, $\mu$ zugleich die einfachen Bedingungen, dass $\mu$ mit einem Punkte, $c$ mit einer Ebene incidire, bezeichnen. Die Coincidenz kann 1[ter] bis 4[ter] Gattung sein, je nachdem sie $\infty^0$ bis $\infty^3$ Strahlenörter 2[ter] Stufe zulässt oder die Bedingung $\beta^0$ bis $\beta^3$ von selbst erfüllt. Erst in einem Systeme $\alpha$[ter] Stufe tritt eine Coincidenz $\alpha$[ter] Gattung auf. Aus früheren Betrachtungen ergiebt sich

$$B = \beta g - g^2 = \beta h - h^2,$$

die auch mit $\varepsilon, \sigma$ multiplicirt werden können; ferner unmittelbar:

$$\beta\sigma = \mu\sigma + c\sigma;$$

woraus hervorgeht, dass man ein mit $\sigma$ multiplicirtes $\beta$ jederzeit durch $\mu + c$ ersetzen kann, und umgekehrt. Weiter aus dem einfachen Correspondenzprincip, aus einer früheren Punktepaarformel, bez. dem Princip der speciellen Lage folgen:

$$g + h - \beta = \varepsilon$$

$$\beta = \sigma + \varepsilon$$

$$\beta^2 = B + g_e + h_e + c\sigma = B + g_p + h_p + \mu\sigma;$$

und daraus werden abgeleitet:

$$g_e + gh + h_e - \mu\sigma = k\varepsilon + \beta\varepsilon,$$
$$g_p + gh + h_p - c\sigma = k\varepsilon + \beta\varepsilon;$$
$$g_s + \tfrac{1}{2}g^2 h + \tfrac{1}{2}gh^2 + h_s + \tfrac{1}{2}(\mu - c)\sigma = \varepsilon(\beta^2 - \beta k + 2k^2);$$
$$G + g_s h + g_e h_e + g_p h_p + g h_s + H = \varepsilon(\beta^3 - 2\beta^2 k + \beta k^2),$$

worin $G, H$ bedeuten, dass $g$, bez. $h$ in eine gegebene Gerade falle.

Die vier letzten Formeln führen zu den Correspondenzprincipien im Strahlen-Felde, -Bündel, in der Strahlenaxe, im Strahlenraum, welche Schubert somit zu den älteren Correspondenzprincipien hinzufügt.

Es folgen dann Relationen zwischen Grundbedingungen des allgemeinen oder ausgearteten Strahlenpaars; darauf die Formeln für Paare aus ungleichartigen Hauptelementen.

Als Anwendung bringt dann der Verfasser

1) die Ermittelung der Fundamentalzahlen der linearen Congruenz,

2) Relationen zwischen den vom Referenten im Probleme der räumlichen Projectivität gefundenen Zahlen;

3) den Beweis der sogenannten Productensätze, d. h. der Sätze, welche aussagen, dass die Gradzahl des Orts, welcher zwei von demselben Elemente (Constantenzahl $c$) erzeugten Oertern gemein ist, aus deren Gradzahlen durch Multiplication sich ergiebt. Sind die Oerter $\alpha^{\text{ter}}$, bez. $\beta^{\text{ter}}$ Stufe, so entsteht durch Combinirung je eines Elements des einen mit einem des andern ein System $(\alpha + \beta)^{\text{ter}}$ Stufe von Paaren; die gemeinsamen Elemente bilden ein System von der Stufe $\alpha + \beta - c$, folglich sind sie Coincidenzen $c^{\text{ter}}$, d. h. höchster Gattung; solche von niedrigerer Gattung giebt es nicht. Wir wählen als Beispiel zwei Strahlenörter $2^{\text{ter}}$ Stufe, so benutzen wir die Strahlenpaar-Formel $4^{\text{ter}}$ Dimension (die letzte der oben mitgetheilten). Dieselbe reducirt sich auf

$$g_e h_e + g_p h_p = \varepsilon\beta^3,$$

wo $\beta^3$ von jeder der $\infty^0$ Coincidenzen erfüllt wird, und es ergiebt sich so ein einfacher Beweis des jüngsten dieser Sätze, des Satzes von Halphen, dass die Zahl der zwei Congruenzen gemeinsamen Geraden gleich der Summe der Producte der Feld-

grade und des der Bündelgrade ist; von welchem Schubert noch einen der symbolischen Bezeichnung entkleideten Beweis giebt.

In den anderen (Bézout'schen) Productensätzen kommt stets nur ein Product vor.

Mit Hülfe dieser Productensätze lässt sich jede einfache bis dreifache Punkt- oder Ebenenbedingung, jede einfache, dreifache, vierfache Strahlenbedingung durch die entsprechende Potenz von $c$, $\mu$, bez. $g$, multiplicirt mit einem Parameter, hingegen jede doppelte Strahlenbedingung $Z$ durch $\alpha g_e + \alpha' g_p$ ausdrücken, worin die Parameter $\alpha, \alpha'$ die Zahlen der Strahlen eines Feldes, bez. eines Bündels sind, die der $Z$ genügen: für die Hauptelemente ist also das Problem der Charakteristikentheorie, die Zurückführung aller Bedingungen auf eine begrenzte Anzahl, gelöst; für andere Gebilde wäre derselbe Weg einzuhalten.

4) Eine weitere sehr interessante Anwendung geschieht auf die Probleme über die Tangenten, welche eine allgemeine Fläche $n^{ter}$ Ordnung an einer oder mehreren Stellen zwei- oder mehrpunktig berühren. Aus den Berührungs- und den einfachen Schnittpunkten der Tangenten werden Punktepaare gebildet, und so in überaus einfacher Weise nicht bloss die von Salmon, Clebsch und dem Referenten behandelten Fälle erledigt, wo es sich um singuläre Tangenten von einfacher Unendlichkeit handelt, sondern auch die bisher vergeblich in Angriff genommenen oder noch nicht richtig gelösten Probleme gelöst, die endliche Zahl der Tangenten zu finden, welche die Fläche a) fünfpunktig, b) an einer Stelle vier-, an einer andern zweipunktig, c) an zwei Stellen dreipunktig, d) einmal drei-, noch zweimal zweipunktig, e) viermal zweipunktig berühren. (cf. Salmon-Fiedler Anal. Geom. des Raumes 2. Aufl. 2. Bd. No. 447-463 und Literatur-Nachweis No. 200, 201.)

5) Wenn zwei Systeme $1^{ter}$ Stufe aus Curven oder Flächen gegeben sind, so resultiren durch Paarung der Berührungspunkte gemeinsamer Tangenten oder Tangentialebenen an zwei Elemente aus verschiedenen Systemen die Gradzahlen der Oerter der Punkte, in denen sich Elemente aus verschiedenen Systemen berühren, ausgedrückt durch die Charakteristiken der Systeme; als

welche bei Raumcurvensystemen die vier Zahlen $p$, $e$, $t$, $t'$ derjenigen Raumcurven gelten, deren Punktort, bez. (Schmiegungs-) Ebenenort die Axenbedingung, deren Strahlen- (Tangenten-) Ort die Feld-, bez. Bündelbedingung erfüllen.

6) Die Formeln für Paare aus ungleichartigen Elementen werden für den Beweis von Sätzen der Polarentheorie verwandt.

Sm.

---

H. Schubert. Lösung des Problems der fünfpunktigen Tangenten einer Fläche $n^{ter}$ Ordnung und der verwandten Probleme. Gött. Nachr. 1876. 89-99.

Die Probleme, welche auf der vorigen Seite unter 4) als zum ersten Male gelöst bezeichnet werden, werden hier in einer kurz vor der längeren Abhandlung erschienenen Note mit Hülfe des einfachen Correspondenzprincips und ohne symbolische Operation behandelt. Eine ausführliche Behandlung des ganzen Problems der singulären Tangenten bringt der 1877 erschienene Aufsatz des Bandes XI. der Math. Ann.

Sm.

---

H. Schubert. Moduln vielfacher Bedingungen bei Flächen $2^{ter}$ Ordnung. Clebsch Ann. X. 318-364

Durch Combinirung von Geraden einer Fläche $2^{ter}$ Ordnung aus verschiedenen Schaaren erhält man $\infty^2$ Geradenpaare (Schneidepaare im Sinne der oben besprochenen längeren Abhandlung), und eine $b$-fache einem solchen Paare auferlegte Bedingung ist für die Fläche eine $(b-2)$-fache. Die von einem Paare zu erfüllenden Bedingungen $1^{ter}$ bis $7^{ter}$ Dimension lassen sich auf eine geringere Zahl reduciren. Es werden vom Verfasser 17 sogenannte Hauptbedingungen ($1^{ter}$ bis $5^{ter}$ Dimension) der Fläche $F^2$ aufgezählt, von denen 10, nämlich die 3 Charakteristiken $\mu$, $\nu$, $\varrho$ eines Systems $1^{ter}$ Stufe, ferner die Bedingungen

$\gamma$ ($2^{ter}$ Dim.): eine gegebene Ebene auf einer gegebenen Geraden zu tangiren,

$\gamma'$ ($2^{ter}$ Dim.): dual hierzu,

$\delta$ (2[ter] Dim.): eine Gerade aus einem gegebenen Strahlbüschel zu enthalten,

$x$ (3[ter] Dim.): eine gegebene Gerade zu enthalten,

$w$ (3[ter] Dim.): eine gegebene Ebene in einem gegebenen Punkte zu berühren,

$y$ (4[ter] Dim.): eine gegebene Gerade zu enthalten und zugleich eine gegebene Ebene durch dieselbe in einem gegebenen Punkte der Geraden zu tangiren,

$z$ (5[ter] Dim.): ein gegebenes Paar zu enthalten,

als wesentlich von den andern, die symbolische Producte sind, unterschieden werden. Vermittelst einfacher geometrischer Betrachtungen werden die irreduciblen Paarbedingungen (3[ter] bis 7[ter] Dimension für die Paare, 1[ter] bis 5[ter] für die Fläche) durch diese Hauptbedingungen ausgedrückt.

Es handelt sich nun darum, die 7 wesentlichen Hauptbedingungen $\gamma_1, \ldots, z$ als (symbolische) Functionen der Charakteristiken darzustellen, also ihre Moduln zu finden.

Die früheren Geradenpaar-Formeln (siehe das zweitvorangehende Referat)

$$g + h - \beta = \varepsilon$$

und

$$\beta\sigma = (\mu + c)\sigma$$

führen nach symbolischer Multiplication der ersteren mit dem Schneidepaar-Symbol $\sigma$ zu

$$g\sigma + h\sigma - \mu\sigma + c\sigma = \varepsilon\sigma;$$

da hier aber alle Paare Schneidepaare sind, so kann das Symbol $\sigma$ fallen gelassen werden; die Schneidepaar-Coincidenz wird deshalb auch eine einfache Bedingung und mit $\tau$ bezeichnet (obiges $\sigma$ kommt nicht mehr vor, vielmehr hat $\sigma$ später eine andere Bedeutung); ausserdem ist $p$ und $e$ statt $\mu$ und $c$ gesetzt, wie am Anfang der oben besprochenen längeren Abhandlung; also:

$$g + h - e - p = \tau.$$

Hieraus werden durch symbolische Multiplication 23 weitere Relationen 2[ter] bis 7[ter] Dimension zwischen Grundbedingungen des allgemeinen Geraden-(schneide)paars und denen der Coin-

cidenz abgeleitet, so dass durch Elimination der ersteren aus diesen und den obigen sich Relationen zwischen den Coincidenzpaar- und den 17 Hauptbedingungen der $F^2$ ergeben. Coincidenzpaare sind aber nur auf ausgearteten $F^2$ möglich. Die drei Ausartungen des $1^{ten}$ Typus: Kegelschnitt $\sigma$, Kegel $\varkappa$, Punkt-Ebenenpaar $\varepsilon$ — welche Buchstaben zugleich wieder die Bedingungen bezeichnen, dass eine $F^2$ so ausarte — werden hinsichtlich ihrer Geraden, Geradenpaare und Coincidenzen derselben beschrieben; sodann wird die einfache Punkt-, Geraden-, Ebenen-Bedingung $m, n, r$ dieser Gebilde, in sofern sie selbstständige Gebilde und nicht Ausartungen sind, eingeführt und gezeigt, dass, sobald eine Multiplication mit $\sigma, \varkappa, \varepsilon$ statthat, jeder Factor $\mu, \nu, \varrho$ bez. durch $m, n, r$ ersetzt werden kann, und umgekehrt, mit Ausnahme von $\mu\sigma = 2m\sigma$, $\varrho k = 2r\varkappa$. $\nu\varepsilon = 2n\varepsilon$ (wofür ein mehr eingehender Beweis erwünscht wäre). Hierdurch und durch die bekannten Formeln zwischen $\mu, \nu, \varrho$ und $\sigma, \varkappa, \varepsilon$ ist es möglich, symbolische Producte von $\mu, \nu, \varrho$, und $\sigma, \varkappa, \varepsilon$ durch symbolische Producte von $\mu, \nu, \varrho$ zu ersetzen. Nachdem noch für mehrere von den selbstständigen Gebilden $\sigma, \varkappa, \varepsilon$ zu erfüllende Bedingungen ihre Moduln in den Elementarbedingungen $m, n, r$ — freilich ohne ausführlichen Beweis — gegeben sind, werden auf geometrischem Wege Relationen zwischen Coincidenzgeradenpaar-Bedingungen $1^{ter}$ bis $5^{ter}$ Dimension und den Producten $m^\alpha\, n^\beta\, r^\gamma$ mit $\sigma, \varkappa, \varepsilon$ ermittelt, also auch zwischen jenen und den Producten von $\mu, \nu, \varrho$, mithin auch zwischen den 14 weiteren Hauptbedingungen und diesen letztgenannten Producten, womit das Problem gelöst ist; z. B. ist

$$x = \tfrac{1}{4}(2\nu^3 - 3\nu^2\mu - 3\nu^2\varrho + 3\nu\mu^2 + 3\nu\varrho^2 - 2\mu^3 - 2\varrho^3 + 2\mu\nu\varrho),$$

wofür später noch ein anderer Beweis — von einem Schüler Hurwitz von Schubert gefunden — mitgetheilt wird.

Hieraus lassen sich zunächst für Geradenpaar-Bedingungen, so wie aber auch noch andere Bedingungen die Moduln finden. Die gegebenen sind mehrfach durch das Princip der speciellen Lage bestätigt.

Für die Bedingung $y$ ergeben sich 3 Moduln, welche zu zwei Relationen zwischen den 4-fachen Characteristiken der $F^2$ (den

symbolischen Producten 4ter Dimension von $\mu$, $\nu$, $\varrho$) führen; aus denen dann eine Relation zwischen den dreifachen Charakteristiken (symbolischen Producten 3ter Dimension von $m$, $n$, $r$) für den Kegelschnitt im Raume abgeleitet werden.

Ist es möglich, alle $\alpha$-fachen Bedingungen eines Gebildes durch $\alpha$ unter ihnen in linearer Weise auszudrücken, so heisst Schubert $\alpha$ die $\alpha$-fache Charakteristikenzahl dieses Gebildes, und zeigt, dass die $\alpha$-fache und die $(c-\alpha)$-fache Charakteristikenzahlen eines Gebildes, welches die Constantenzahl $c$ hat, gleich sind. Zum Schlusse weist er nach, dass für den Kegelschnitt im Raume zwischen den dreifachen Charakteristiken nur die obige Relation, zwischen den vierfachen jedoch vier bestehen, so dass die 1-, 2-, 3-, 4-fache Characteristikenzahl bez. 3, 6, 9, 10 ist, woraus die anderen folgen. Aehnlich bestehen zwischen den 3-, 4-, 5-, 6-fachen Charakteristiken der $F^2$ 0, 2, 8, 18 Relationen von welchen letzteren freilich 18 aus den niedrigeren Relationen leicht abzuleitende selbst durch eine Relation verbunden sind und also nur 17 repräsentiren), so dass die einfache, zweifache, ... achtfache Characteristikenzahl der $F^2$ bez. 3, 6, 10, 13, 13, 10, 6, 3 ist. Sm.

# Neunter Abschnitt.

## Analytische Geometrie.

### Capitel 1.

### Coordinaten.

H. Frombeck. Bemerkungen zur Coordinatentheorie. Wien. Ber. LXXIV.

Der erste Theil dieser Arbeit giebt eine Zusammenstellung aller in homogenen Coordinaten ausgedrückten Determinantenformeln metrischen Inhalts, und schliesst mit der Betrachtung des Momentes zweier Raumstrahlen (Product aus dem Abstande der Strahlen und dem Sinus ihres Winkels) und der auf den Begriff des Momentes gegründeten tetraedrischen Strahlencoordinaten (Momente, welche ein Strahl mit den 6 Kanten des Coordinaten-Tetraeders bildet). Diesen Coordinaten stellt sich ein goniometrisches Strahlencoordinatensystem zur Seite, welches im zweiten Theile der Arbeit näher betrachtet wird. Man kann nämlich einen Raumstrahl $(x)$, statt auf die Kanten eines Tetraeders, auf 3 beliebige Raumstrahlen $(a, b, c)$ beziehen. Dann existirt zwischen 5 beliebigen Raumstrahlen $(x, y, a, b, c)$ eine Relation, welche besagt, dass die Summe der Producte aus den Momenten je zweier in die Eckensinus der drei übrigen verschwindet. Noch besser ist es, die beiden Strahlen $x$, $y$ auf ein beliebiges Strahlentripel $a$, $b$, $c$ und sein Polartripel $a'$, $b'$, $c'$ zu beziehen (wodurch eine ähnliche, aber unsymmetrische

Relation sich ergiebt), weil dann das Princip der sphärischen Polarität auf das Raumstrahlensystem angewendet und jeder Coordinatenformel eine dualistisch entsprechende gegenübergestellt werden kann. Es werden dann die linearen Beziehungen entwickelt, welche zwischen den goniometrischen Coordinaten der Raumstrahlen und jenen eines bestimmten sphärischen und ebenen Liniensystems bestehen, und schliesslich einige specielle Fälle des Coordinatensystems betrachtet. Schg.

---

P. Mansion. Trilinear coordinates of the circular points at infinity. Messenger (2) V. 158-159.

Die Coordinaten der Punkte werden bestimmt aus den in Form von Determinanten ausgedrückten Gleichungen, für die Schnittpunkte, in welchen die unendlich ferne Gerade den Kreis schneidet, der dem Fundamentaldreieck umschrieben ist.

Glr. (O.)

---

G. Bardelli. Relazioni metriche e di posizione nel triangolo rettilineo. Battaglini G. XIV. 241-263.

In dieser Arbeit erklärt der Herr Verfasser, von gewöhnlichen cartesischen Coordinaten ausgehend, die sogenannten Dreieckscoordinaten, wonach also ein Punkt in der Ebene, nachdem ein festes Dreieck (Coordinatendreieck) angenommen ist, durch die Grösse der drei Dreiecke bestimmt ist, von denen dieser Punkt und jedesmal zwei Ecken des Coordinatendreiecks die drei Ecken bilden. Diese Dreieckscoordinaten $\alpha, \beta, \gamma$ sind durch die Relation

$$\alpha+\beta+\gamma=\varDelta$$

wo $\alpha, \beta, \gamma$ mit den gehörigen Vorzeichen zu nehmen sind, verbunden. Nach einigen Betrachtungen über Dreiecksinhalte und Schwerpunkte folgen die Gleichungen von Transversalen des Coordinatendreiecks, die dessen Seiten, wobei ein bestimmter Umlaufssinn festzusetzen ist, im Verhältniss $m:n$ treffen. Der Ort der Schnittpunkte je zweier solcher Transversalen bei

variablem $\frac{m}{n}$ ist ein Kegelschnitt, der zwei Seiten des Dreiecks berührt und die dritte zur Berührungssehne hat. In dieser Weise folgt noch Mehreres. Am Schluss der Arbeit werden auch Curven dritten Grades betrachtet. Mz.

---

S. Levi. Sulle coordinate trigonali. Battaglini G. XIV. 353-377.

Ist ein Punkt $M$ durch seine Abstände $(X, Y, Z)$ von den Seiten eines Dreiecks bestimmt, so kann man statt der Grössen $X, Y, Z$ auch deren Verhältnisse

$$\frac{Y}{Z} = x, \quad \frac{Z}{X} = y, \quad \frac{X}{Y} = z$$

als Coordinaten von $M$ betrachten. Diese „trigonalen" Coordinaten gewähren gegenüber den „trilinearen" $X, Y, Z$ zunächst den Vortheil, dass eine von dem Fundamentaldreieck unabhängige Beziehung $(xyz = 1)$ zwischen ihnen existirt. Ihre wichtigste Eigenthümlichkeit geht aber aus dem leicht zu erweisenden Satze hervor: Wenn in einer algebraischen Gleichung beliebigen Grades zwischen $x$, $y$ und $z$ die höchsten Potenzen der Variabeln $x^p$, $y^q$, $z^r$ sind (wobei eine oder zwei der Zahlen $p$, $q$, $r$ Null sein können), so stellt die Gleichung eine Curve vom Grade $p+q+r$ dar. Hiernach ist z. B. $y = mx$ die Gleichung eines Kegelschnittes, $px+qy+rz=0$ die einer $C_3$. Es kann also durch Einführung dieser Coordinaten der Grad der Gleichung einer $C_n$ bis auf $\frac{n}{3}$ erniedrigt werden. Die Vortheile dieser Reduction sind am Schluss der Abhandlung an einigen Beispielen klar gemacht; im Uebrigen will dieselbe nur durch Entwickelung der Hauptsätze aus der Geometrie des Punktes, der Geraden und der Kegelschnitte auf Grund der neuen Coordinaten den Leser mit dem Gebrauche derselben vertraut machen und den Nutzen ihrer Anwendung auf diese Gegenstände zeigen. Eine am Schluss hinzugefügte Note dehnt den Begriff der trigonalen Coordinaten noch weiter aus. Wenn nämlich $x$, $y$, $z$ trilineare, und $x_1$, $y_1$, $z_1$ trigonale Coordinaten sind, so kann man die Gleichungen aufstellen:

$$\frac{y}{z} = x_1; \quad \frac{z}{x} = y_1; \quad \frac{x}{y} = z_1;$$
$$\frac{y_1}{z_1} = x_2; \quad \frac{z_1}{x_1} = y_2; \quad \frac{x_1}{y_1} = z_2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{y_{m-1}}{z_{m-1}} = x_m; \quad \frac{z_{m-1}}{x_{m-1}} = y_m; \quad \frac{x_{m-1}}{y_{m-1}} = z_m,$$

und die Grössen $x_m, y_m, z_m$ trigonale Coordinaten $m^{\text{ter}}$ Classe nennen. Eine Untersuchung dieser Coordinaten soll später folgen.

Schg.

---

K. SCHWERING. Ueber ein besonderes Liniencoordinatensystem. Schlömilch Z. XXI. 278-286.

Für die Aufsuchung der projectivischen Eigenschaften der Curven haben sich die Dreieckscoordinaten besonders nützlich erwiesen, namentlich auch durch die Leichtigkeit, mit welcher sich dem System der Dreipunkt-Coordinaten das reciproke der Dreilinien-Coordinaten gegenüberstellen lässt. Dagegen gewährt bei der Untersuchung der metrischen Eigenschaften das cartesische System im Allgemeinen grössere Vortheile. Es ist darum wünschenswerth, ein System von Liniencoordinaten zu haben, welches zu dem cartesischen System von Punktcoordinaten eine ähnliche Ergänzung bildet, wie das der Dreilinien- zu dem der Dreipunkt-Coordinaten. Nach kurzer kritischer Uebersicht über die bisher in dieser Richtung gemachten wenigen Versuche wird in obiger Abhandlung folgendes System aufgestellt. Zwei parallele Geraden, die durch ein auf ihnen errichtetes Loth in den Punkten $O$ und $Q$ geschnitten werden, bilden die Axen. Als Coordinaten einer Geraden, welche diese Parallelen resp. in den Punkten $A$ und $B$ schneidet, werden dann die Strecken $OA$ und $QB$ betrachtet. Nach Lösung einiger elementarer Aufgaben, wie Bestimmung der Punkt-Gleichung, des Abstandes eines Punktes von einer Geraden, wird die Gleichung $2^{\text{ten}}$ Grades discutirt, wobei der Nutzen des neuen Systems sich besonders in der Leichtigkeit zeigt, mit welcher alle die Tangenten und Asymptoten

betreffenden Eigenschaften hervortreten. Bei der Transformation des Systems sind die einfachen Formen hervorzuheben, in denen die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel erscheinen. Man erhält nämlich $uv = \pm G$, wo das obere Zeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel gilt. Als Beispiele der Anwendbarkeit des Systems auf höhere Curven werden schliesslich die Cissoide und Cardioide betrachtet. Der Verfasser findet den Vortheil des Systems einstweilen besonders darin, dass es sich von dem Cartesischen genügend unterscheide, um bei Anfängern eine Verwechslung von Begriffen zu verhüten. Das eigentliche Kriterium der Brauchbarkeit würde nach Meinung des Referenten sein, dass das neue System das genau reciproke des Cartesischen wäre. Dies ist aber thatsächlich bei diesem System der Fall, wie Referent an anderem Orte zu zeigen gedenkt. Dieser vom Verfasser, wie es scheint, nicht bemerkte Umstand erklärt alle die vorstehend hervorgehobenen Vortheile seines Systems.

Schg.

---

Ph. Weinmeister. Das System der polaren Liniencoordinaten in der Ebene. Schlömilch Z. XXI. 301-324.

Der bekannten Bestimmung eines Punktes durch seine Polar-Coordinaten ($r$, $\vartheta$) wird in dieser Abhandlung eine analoge Bestimmung der Geraden gegenübergestellt. Sind $r$ und $\vartheta$ die Polar-Coordinaten eines Punktes $P$, so werden diese Grössen gleichzeitig als Polarcoordinaten derjenigen Geraden betrachtet, welche in $P$ auf $r$ senkrecht steht. Hiernach ist jede Gerade durch ihren Abstand vom Pol und den Winkel, den diese Senkrechte mit der Axe bildet, bestimmt. Nachdem darauf die Gleichung des Punktes aufgestellt ist, werden mit Hülfe des Systems einige elementare Aufgaben von Punkten und Linien gelöst und Eigenschaften des Kreises und der Kegelschnitte abgeleitet. Dabei wird jedoch auch von den durch Abkürzung gebildeten symbolischen Punktgleichungen (von der Form $A = 0$) ein ziemlich umfangreicher Gebrauch gemacht, indem die symbolischen Ausdrücke bald allein, bald in Verbindung mit den Coordinaten

auftreten. Da die Verwendung dieser Coordinaten durchweg die Herbeiziehung trigonometrischer Functionen erfordert, so geht der durch die symbolischen Bezeichnungen erreichte Vortheil der Kürze meist wieder verloren. An den wenigen Stellen aber, wo ausschliesslich die symbolischen Ausdrücke benutzt werden, verschwindet naturgemäss das Charakteristische des Systems. Immerhin wird dasselbe zur Darstellung solcher Verhältnisse, die in einem natürlichen Zusammenhange mit ihm stehen, sich mit gleichem Vortheil verwenden lassen, wie in entsprechenden Fällen das System der polaren Punkt-Coordinaten. Schg.

---

F. Folie. Note sur la transformation des coordonnées et sur les signes des angles et des distances en géométrie analytique plane. Bull. de Belg. (2) XLI 86-96.

C. le Paige. Note sur la transformation des coordonnées dans la géométrie analytique de l'espace. Bull. de Belg. (2) XLII. 384 395.

Herr Folie stellt mit mehr Strenge, als gewöhnlich angewendet zu werden pflegt, die Transformationsformeln der cartesischen Punktcoordinaten in der Ebene auf, indem er folgende Festsetzung zu Grunde legt: Alle Winkel werden gezählt durch Drehung von rechts nach links; oder: Als positiv wird der Theil einer Geraden betrachtet, der nach der Mitte der Ebene oberhalb der $X$-axe gerichtet ist (zur Linken dieser Axe für einen Beobachter, der den positiven Theil betrachtet), oder der Theil, der dieselbe Richtung hat wie dieser positive Theil für die Geraden, die ihnen parallel sind. Die positive Richtung des Lothes zu einer Geraden ist der Theil derselben, der einen rechten Winkel mit dem positiven Theil macht. Diese Festsetzungen sind, glauben wir, unanfechtbar (abgesehen von der die sich auf die der $X$-axe parallelen Geraden bezieht), sie besitzen aber nicht immer Allgemeinheit genug, um ohne Figur gewisse sehr elementare Fragen der Dreiliniengeometrie zu lösen, wie das Beispiel 3 No. 64 der Conic section von Salmon.

Die Arbeit des Herrn Le Paige behandelt ähnliche Fragen für den Raum. Mn. (O.)

---

J. W. Warren. On curvilinear and normal coordinates. Proc. of Cambr. II. 430-432.

Auszug aus einer Arbeit, die in den Transactions der Gesellschaft erscheinen wird. Glr. (O.)

---

C. Crone. Undersögelse af Figurer i Planen, sammensatte af Cirkler, ved et säregent Koordinatsystem. Zeuthen Tidsskr. (3) VI. 97-128.

Diese Abhandlung ist veranlasst durch eine von der Kopenhagener Universität für das Jahr 1875 gestellte Preisfrage, in welcher eine Untersuchung von ebenen Systemen von Kreisen, die durch ihre Potenzen mit vier festen Kreisen bestimmt sind, verlangt wurde. Nach einigen Bemerkungen über Kreise und deren Potenzen überhaupt, wobei im besondern die Bedeutung des Potenzbegriffes für Gerade, als Kreise mit unendlich grossen Radien aufgefasst, festgestellt wird, geht der Verfasser zuerst an die Discussion des speciellen vorgelegten Coordinatensystems. Er zeigt, dass zwischen den vier Potenzcoordinaten eines Kreises eine lineare Relation besteht; übrigens ist aber durch sie der Kreis bestimmt und lässt sich aus den Verhältnissen derselben einfach construiren. Eine homogene Gleichung des ersten Grades zwischen den vier Potenzcoordinaten wird im Allgemeinen durch eine zweifach unendliche Reihe von Kreisen befriedigt. Diese haben alle die Potenz null mit einem festen Kreise, dem „Grundkreis" des Systems, und bilden eine „lineare Kreissammlung". Zwei homogene Gleichungen geben ein sogenanntes „lineares Kreissystem"; alle Kreise desselben gehen durch zwei feste Punkte hindurch, und haben deshalb gemeinschaftliche Centrallinie und Radicalaxe. Einem solchen Systeme gegenüber steht ein damit conjugirtes, für welches die Rolle der beiden erwähnten Geraden vertauscht ist. Nach der hier angedeuteten Feststellung der

Grundbegriffe folgt die Entwickelung einer Analogie, welche zwischen den erwähnten Systemen und gewissen räumlichen Gebilden stattfindet. Einem durch Potenzcoordinaten in der Ebene bestimmten Kreise kann nämlich ein Punkt im Raume, bestimmt durch seine Entfernungen von den Flächen eines Tetraeders, eindeutig zugeordnet werden. Dieses Tetraeder ist jedoch kein allgemeines, vielmehr muss es in Bezug auf ein gewisses elliptisches Paraboloid $F^{(2)}$ ein selbstconjugirtes sein. Den Kreisen einer linearen Kreissammlung entsprechen dann im Raume die Punkte einer Ebene, dem Grundkreise der Pol dieser Ebene. Ebenso werden den Kreisen in einem linearen Kreissysteme die Punkte einer Geraden, und dem conjugirten Systeme ebenfalls die in Bezug auf $F^{(2)}$ conjugirten Geraden entsprechen. Von dieser Analogie werden verschiedene hübsche Anwendungen gemacht, hauptsächlich in der Art, dass der Verfasser, von bekannten Sätzen über räumliche Figuren ausgehend, die entsprechenden für ebene Kreissysteme bildet. Von besonderem Interesse ist eine Anwendung auf die Frage, inwiefern solche Systeme imaginäre Kreise enthalten. Ferner werden noch auf ähnliche Weise quadratische Kreis-Sammlungen und Kreis-Systeme untersucht, und endlich wird die ganze Theorie zur Lösung verschiedener Constructionen, sowie zur Herleitung einiger Sätze über biciruläre Curven der vierten Ordnung benutzt.

Gm.

---

E. Lucas. Questions de géométrie tricirculaire et tétrasphérique. Nouv. Ann. (2) XV. 501-503.

In dieser Arbeit werden Aufgaben gegeben, die sich auf ein neues Coordinatensystem beziehen. Hat man nämlich drei Kreise in einer Ebene, so kann man einen Punkt dieser Ebene durch seine Potenzen in Bezug auf jeden dieser Kreise, jede solche Potenz durch den Durchmesser des betreffenden Kreises dividirt, definiren. Analog ist es mit vier Kugeln im Raum. Eine homogene Relation unter solchen drei (resp. vier) Grössen, die einem Punkt zukommen, drückt einen geometrischen Ort aus. Hierüber

sind nun verschiedene Fragen aufgestellt, die in der Arbeit selbst nachzusehen sind.

(Siehe auch das folgende Referat). Mz.

---

E. Lucas. Principe de géométrie tricirculaire et tétrasphérique. N. C. M. II. 225-232.

Man nenne *circulare Entfernung* (distance circulaire) eines Punktes von einem Kreise das Verhältniss der Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis zum Durchmesser desselben. Man betrachte einen festen Kreis mit dem Radius $R$ und dem Mittelpunkt $O$, welcher *Grundkreis* (cercle radical) genannt werden soll. Man bezeichne mit $x$, $y$, $z$ die Entfernungen oder *circularen Coordinaten* (coordonnées circulaires) eines Punktes der Ebene in Beziehung auf drei Kreise $X$, $Y$, $Z$ orthogonal zu $O$. Die Gleichung eines zu $O$ orthogonalen Kreises oder eines *Cykels* wird dann von der Form $lx+my+nz=0$ sein und die eines beliebigen Kreises von der Form $lx+my+nz+k=0$. Ein Punkt, innerer oder äusserer Punkt für $O$, ist durch seine circularen Coordinaten völlig bestimmt. Mit Hülfe dieser Coordinaten kann man auf die natürlichste Weise die Fragen untersuchen, welche sich auf die Theorie der Inversion mit reciproken Radii Vectores beziehen, wie Herr Lucas in seiner Arbeit zeigt. Die homogene Gleichung $2^{\text{ten}}$ Grades in $x$, $y$, $z$ stellt eine bicirculare Linie $4^{\text{ten}}$ Grades vor oder eine circulare Curve $3^{\text{ten}}$ Grades, wenn sie durch $O$ geht. Die Untersuchung dieser Curve gestaltet sich wie die eines Kegelschnitts in Dreiliniencoordinaten. Die Herren Lie und Darboux haben bereits ähnliche Coordinaten gebraucht.

Mn. (O.)

---

F. E. Thieme. Untersuchung über die binären lateralen Geraden. Grunert Arch. LIX. 426-445.

Auf einer Coordinaten- oder Fundamentalebene denkt sich

der Verfasser längs der $Y$-Axe eine Ebene, die Lateralebene, normal errichtet. In derselben liegt senkrecht zur Fundamentalebene die imaginäre $X$-Axe. Die beiden Ebenen gemeinsame $Y$-Axe nennt er die Lateralaxe. Jedem Punkte $(y, x)$ der Fundamentalebene entspricht nun ein Punkt $(y, ix)$ der Lateralebene. Der Geraden $y = ax$ in der Fundamentalebene, welche mit der reellen Abscissenaxe den Winkel $\varphi$ einschliesst, entspricht in der Lateralebene eine Gerade $y = iax$, welche mit der imaginären $X$-Axe denselben Winkel $\varphi$ bildet. Durch parallele Verschiebung des Coordinatensystems in der Fundamentalebene gewinnt der Verfasser die allgemeine Gleichung einer Geraden in der normalen Lateralebene. Diese Ebene denkt er nun um die Lateralaxe gedreht und in einer neuen Stellung gegen die Fundamentalebene unter dem Winkel $\alpha$ geneigt, so soll nach seiner Auseinandersetzung die Gleichung

$$y = x \operatorname{tang} \varphi \; (\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

eine Gerade in der schiefliegenden Lateralebene darstellen, welche durch den Anfangspunkt geht und mit ihrer Abscissenaxe den Winkel $\varphi$ bildet. Eine andere Form der Gleichung ist $y = x\,(a+ib)$. Nach diesen Erklärungen beschränkt sich der Verfasser darauf, das aus zwei lateralen Geraden oder aus einer lateralen und einer reellen Geraden bestehende Gebilde in ausführlicher Weise zu discutiren. Schl.

---

FAURE. Théorie des indices. Nouv. Ann. (2) XV. 251-263, 292-318, 339-354, 451-465, 481-497, 529-548.

Die Abhandlung ist eine Fortsetzung der in den Nouv. Ann. (2) XI. S. 261 und ff. veröffentlichten Schrift desselben Verfassers über die Theorie der Indices, über welche im 4. Bande dieses Jahrbuchs S. 335 referirt worden ist. Schl.

---

# Capitel 2.

## Analytische Geometrie der Ebene.

### A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

A. Clebsch. Vorlesungen über Geometrie. Bearbeitet und herausgegeben von F. Lindemann. Mit einem Vorwort von F. Klein. Erster Band: Geometrie der Ebene. Leipzig. Teubner.

Man kann an dem umfangreichen, ein ausgedehntes Gebiet der heutigen Wissenschaft umfassenden Werk der leichteren Orientirung wegen zwei Partien unterscheiden, die zwar in Inhalt und Form in einander eingreifen, ihre verschiedene Entstehungsweise jedoch nicht verläugnen würden, auch wenn der Herausgeber nicht durch ausführliche Nachweise über den Ursprung der einzelnen Abschnitte des Werks den Ueberblick erleichtert hätte. Der eine Theil, dem die erste, zweite, und wesentliche Partien der dritten und fünften Abtheilung zuzurechnen sind, ist eine Bearbeitung mehrerer zu verschiedenen Zeiten gehaltenen Vorträge von Clebsch, die mit verhältnissmässig geringen Aenderungen und Zusätzen wiedergegeben werden. Der andere Theil dagegen ist der Hauptsache nach ein Werk des Herausgebers, und entwickelt in freier Bearbeitung von Vorlesungsfragmenten, Manuscripten und Originalarbeiten von Clebsch und Aufsätzen von Späteren ein Bild des heutigen Standes der Forschung in den von Clebsch zuerst betretenen oder doch von ihm hauptsächlich cultivirten Gebieten der Geometrie der Ebene. Nicht wenige Partien des Werks, und namentlich die voranstehenden Abschnitte über Kegelschnitte, an vielen Stellen die Theorie der algebraischen Formen und der Curven 3[ter] Ordnung, lassen in ihrer Disposition, der einheitlichen Durchbildung der Beweise und der fliessenden Diction die Art des Vortrags erkennen, durch die Clebsch seine Zuhörer in so hohem Grad zu fesseln wusste. Clebsch liebte es, in seinen höheren Vorlesungen bis zu den ihn gerade beschäftigenden Fragen vorzudringen, und war daher, indem er wenig

vorauszusetzen pflegte, genöthigt, durch rasches, den Zuhörer nicht schonendes Vorgehen einen grossen Stoff zu bewältigen, wobei er sich nicht auf Andeutungen und Hervorheben bloss des Wesentlichen beschränkte, sondern an der Hand des Beweises jedes Glied der Schlusskette sorgfältig ausbildete. Sein Vortrag war einfach, fliessend und, obwohl frei, formell doch künstlerisch durchgebildet; den Zuhörer verliess nie die Vorstellung, dass der Vortragende den Apparat der Analysis, dessen er sich bediente, wie spielend beherrschte. Wenn man übrigens zwei Klippen bezeichnen kann, die der Vorlesung des Mathematikers drohen, so dass er leicht der einen anheimfällt, wenn er die andere meidet, so lehrt das vorliegende Werk, dass Clebsch mehr wie den Vorwurf der Stoffüberlastung und der damit zusammenhängenden mangelnden Abgrenzung der einzelnen Sätze und Beweise den der Langweiligkeit und Breitspurigkeit fürchtete, die sehr leicht eine allzu minutiöse Detailausbildung begleiten, wodurch denn der Studirende verwirrt und abgeschreckt wird, statt eine Vorstellung von dem Umfang einer Disciplin und den Hülfsmitteln zu erhalten, mit denen die Wissenschaft arbeitet. Die Spuren der künstlerischen Thätigkeit des Vortragenden findet man an vielen Orten auch in dem vorliegenden Werk wieder, und man darf es dem Herausgeber Dank wissen, dass er dieselben zu erhalten bemüht war. Dass andererseits manche Abschnitte, darunter namentlich diejenigen, in welchen derselbe selbst schaffend auftritt, im Verhältniss zu den übrigen zu umfangreich gerathen sind und dem ursprünglichen Plan wie dem Titel des Werks nicht mehr entsprechen, hat der Herausgeber in der Vorrede unumwunden zugestanden. Die Selbständigkeit der Auffassung indess und die mancherlei neuen Gedankengänge, die man darin findet, sind unzweifelhafte Vorzüge auch dieser Partien, und man kann es als eine charakteristische Eigenthümlichkeit des Werkes überhaupt bezeichnen, dass dem Herausgeber, bezw. Verfasser, indem er die Schwierigkeiten nicht meidet, sondern vielmehr aufsucht, mit der unter seinen Händen wachsenden Aufgabe sichtlich von Capitel zu Capitel auch die Gesichtspunkte und die Kräfte zur Bewältigung der Hindernisse

wachsen, so dass man ihm nur wünschen kann, dass ihm durch eine zweite Auflage die Gelegenheit zur Beseitigung der vorhandenen Ungleichheiten zu Theil werde.

Eine kritische Beleuchtung des Werkes im Ganzen und der Abtheilungen 4 und 6 insbesondere gab Nöther in dem Literaturbericht der Z. f. M. von Schlömilch, Jahrg. 1877. Unter Bezugnahme auf diese Besprechung, der er in allen wesentlichen Punkten beipflichtet, beschränkt sich Referent im Folgenden auf eine kurze Analysirung des Inhaltes und insbesondere der dem Herausgeber eigenthümlichen Ausführungen. Das Buch zerfällt in sieben Abtheilungen. Die erste enthält die elementaren Begriffe und Sätze der analytischen und synthetischen Geometrie, deren Methoden ununterschiedlich benutzt werden. Die zweite Abtheilung handelt von den Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe. An die elegant formulirte Theorie der Polaren und die Darlegung dessen, was man unter unendlich weit in projectivischem Sinn versteht, schliesst sich die Transformation der Gleichung $2^{ten}$ Grades auf die Normalform, Betrachtungen über Kegelschnittbüschel und den Kreis, wobei die unterscheidenden Merkmale der metrischen (gegenüber der projectivischen) Geometrie angegeben werden. Die dritte Abtheilung ist eine Einleitung in die Theorie der algebraischen Formen und handelt von den Invarianten binärer und ternärer Formen und deren symbolischer Darstellung. Es folgt (vierte Abtheilung) eine allgemeine Theorie der algebraischen Curven: die Singularitäten derselben und die Plücker'schen Formeln (die Angabe S. 354 über das Verhalten der Hesse'schen Curve in einem $r$-fachen Punkt der Grundcurve ist dahin zu verbessern, dass dieselbe dort einen $(3r-4)$-fachen Punkt besitzt, wovon $r$ Zweige die der gegebenen Curve berühren), ein Abriss über Charakteristiken mit einem von dem Herausgeber herrührenden neuen Beweis des Fundamentalsatzes dieser Theorie.

Die weiteren Abschnitte der vierten Abtheilung sind der Geometrie auf einer algebraischen Curve gewidmet, d. h. der Betrachtung gewisser Punktgruppen auf einer Curve, die durch ihre Beziehungen zu vollständigen Schnittpunktsystemen einen

selbständigen Charakter haben, ohne selbst solche zu sein. Dieses Gebiet, welches bis dahin der Functionentheorie angehört hatte und nur in Verbindung mit dieser gelehrt wurde, ist erst durch neuere Arbeiten der algebraischen Geometrie, der es dem Inhalt seiner Sätze nach angehört, zugewiesen worden, fügt sich aber darum den sonst geläufigen Vorstellungen der Geometrie noch nicht so bequem ein, dass es nicht der ganzen Kunst des Darstellenden bedürfte, um es dem Leser leicht zugänglich zu machen. Die Erkenntniss dieser Schwierigkeit veranlasst hier den Herausgeber, zuweilen an Beispielen und concreten Fällen (die freilich wohl manchmal erst nachträglich betrachtet werden) zu deduciren, wenn die Sätze oder Beweise in ihrer vollen Allgemeinheit beim ersten Anblick schwer verständlich und so zu sagen wesenlos erscheinen. Es folgt ein Beweis des erweiterten Correspondenzprincips (Correspondenz von Punkten auf einer Curve, deren Geschlecht von Null verschieden ist), wobei der Herausgeber die Gleichung der Coincidenzcurve in einigen Fällen wirklich aufzustellen unternimmt, ferner ein gewisser Reciprocitätssatz über Berührungscurven zu einer gegebenen Curve 'und Curven durch die Berührungspunkte, der ebenfalls von dem Verfasser in einer ihm eigenthümlichen Weise abgeleitet wird, ein Capitel über eindeutige Ebenentransformation und über die Untersuchung der Singularitäten einer Curve.

Aus dem Abschnitt über Curven 3ter Ordnung und 3ter Klasse (5. Abtheilung) heben wir hervor eine Aufzählung der verschiedenen Erzeugungsweisen derselben, eine Tabelle der projectivisch interessanten Ausartungen und deren Zusammenhang mit den ternären Formen 3ten Grades, sowie ein Capitel über die Verwerthung der elliptischen Functionen in der Theorie der Curven 3ter Ordnung. Die sechste Abtheilung handelt von den zu einer algebraischen Curve gehörigen Abel'schen Integralen und dem fundamentalen, von Clebsch zuerst dargelegten Zusammenhang der Functionentheorie mit der Theorie der Curven und deren eindeutiger Transformation. Es wird zunächst die algebraische Seite der Frage beleuchtet, wobei gelegentlich eines Beweises des Geschlechtssatzes eingehender, als dies sonst wohl

geschehen ist, der Process der Absonderung des Multiplicators bei eindeutiger Transformation einer Curve verfolgt wird. Zu einem ausführlichen Excurs veranlasst den Herausgeber die Bestimmung der Anzahl der gemeinsamen Punktepaare von zwei Correspondenzen auf einer gegebenen Curve, wobei er durch den von ihm gewählten Beweisgang zur Erledigung des bisher noch unerörtert gebliebenen Falles geführt wird, dass die singulären Punkte der gegebenen Curve nicht sämmtlich Basispunkte der „Correspondenzcurven" sind. Diese umfangreiche Untersuchung, die ein Eingehen auf verschiedene Specialfälle nöthig machte, wäre nach Ansicht des Referenten besser in einer Separatabhandlung veröffentlicht worden, in welcher zugleich der dem Verfasser eigenthümliche Gedankengang eine freiere Entwickelung hätte finden können. Es folgt eine Anwendung der gewonnenen Sätze auf die Bestimmung von „Specialpunktgruppen", d. h. von Punkten einer festen Curve von der Beschaffenheit, dass eine (einfach oder mehrfach unendliche) Schaar von Curven, welche die Doppel- und Rückkehrpunkte der festen Curve und eine gewisse Anzahl von Punkten der Specialgruppe zu Basispunkten hat, von selbst und ohne weitere Einbusse an Bestimmungsstücken durch die übrigen Punkte dieser Gruppe hindurchgeht. Indem sodann der Herausgeber das fernabliegende functionentheoretische Gebiet betritt, sieht er sich genöthigt, wichtige Sätze durch Bezugnahme auf anderweitig bewiesene Eigenschaften zu begründen. Er schliesst die sechste Abtheilung mit der Formulirung des Jacobi'schen und des von Clebsch zuerst aufgestellten „erweiterten" Umkehrproblems der Abel'schen Functionen und mit Anwendungen auf Curven vom Geschlecht Null, Eins und Zwei.

Die siebente Abtheilung ist dem „Connexe" gewidmet, einem geometrischen Gebilde, das durch eine aus Punkt- und Linien-Coordinaten gemischte Gleichung dargestellt wird. Untersuchungen über dieses Gebilde sind das letzte Vermächtniss, das Clebsch der Geometrie hinterlassen hat. Der Aufbau der begrifflichen Grundlage dieser Untersuchungen verdient, unter die bedeutendsten Leistungen Clebsch's gezählt zu werden. In der Abhand-

lung „Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie“ hat Clebsch gezeigt, wie man eine Zwischenform auf ein System von Formen mit je nur einer Reihe von Variabeln zurückführen könne; die Anwendung auf Connexgleichungen bildet den ersten Abschnitt der 7ten Abtheilung des Werks. Es folgt ein Abschnitt über die Haupteigenschaften des Connexes und der „Coincidenz“, deren eindeutige Transformation und den dabei sich ergebenden Geschlechtsbegriff, sowte über den merkwürdigen Zusammenhang der Hauptcoincidenz mit den algebraischen Differentialgleichungen 1ter Ordnung und deren singulären Lösungen. Den Schluss bildet ein elegant geschriebener Abschnitt über Differentialgleichungen und „Berührungstransformationen.“

Der Umfang und die Anlage des Buchs lassen ein genaues Inhaltsverzeichniss unentbehrlich erscheinen; diesem Bedürfniss begegnet in dankenswerther Weise das dem Schluss angefügte alphabetische Namen- und Sach-Register. Bl.

---

H. Weissenborn. Grundzüge der analytischen Geometrie der Ebene für orthogonale und homogene Punkt- und Linien-Coordinaten. Leipzig. Teubner.

In vorliegendem Buche wird eine möglichst gleichmässige Darstellung der Theorie von Punkt- und Linien-Coordinaten angestrebt. Der erste Abschnitt behandelt die orthogonalen, der zweite die homogenen Punkt- und Linien-Coordinaten. Den geometrischen Stoff liefern jedesmal die einfachsten Probleme aus der Theorie der Geraden und des Punktes, sowie die Classification der Kegelschnitte. Da das Buch nicht specielle geometrische Resultate geben, sondern nur den Leser mit dem Gebrauche der verschiedenen Coordinaten bekannt machen will, so hat dasselbe einen mehr analytischen als geometrischen Charakter. Der ausgesprochenen Tendenz gemäss ist denn auch auf eine elementare und vollständige Behandlung der den oben erwähnten geometrischen Aufgaben entsprechenden Coordinatengleichungen, sowie auf das Problem der Coordinatentransformation, namentlich um

von einer Art der Coordinaten zur anderen überzugehen, besonderes Gewicht gelegt. Von der ähnliche Zwecke verfolgenden Darstellung Heger's (siehe F. d. M. II. S. 449) unterscheidet sich die des Verfassers besonders dadurch, dass letzterer nicht nur, wie jener, die homogenen Linien-, sondern auch die homogenen Punktcoordinaten als Quotienten zweier Abstände (statt als einfache Abstände) definirt. Hierdurch erreicht der Verfasser eine vollständige Uebereinstimmung zwischen den Gesetzen der Punkt- und denen der Liniencoordinaten, und seine Darstellung bekommt ein ebenso dualistisches Gepräge wie diejenige Schendel's (siehe F. d. M. VI. p. 408), wobei aber zum Unterschiede wieder wohl zu beachten ist, dass Schendel vermöge der Wahl seiner Coordinaten in den Stand gesetzt ist, seine Formeln leichter geometrisch zu deuten, als es bei den gewöhnlichen, wie bei den in des Verfassers Weise modificirten homogenen Coordinaten möglich ist. Schg.

---

L. Schendel. Die Bernoulli'schen Functionen und das Taylor'sche Theorem nebst einem Beitrag zur analytischen Geometrie der Ebene in trilinearen Coordinaten. Jena. Costenoble.

Siehe Abschn. V. Cap. 1. p. 133.

---

C. F. E. Björling. Ueber eine vollständige geometrische Darstellung einer Gleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen. Stockholm. Norstedt & Söner.

Es handelt sich in der vorliegenden Arbeit um eine neue geometrische Interpretation des Imaginären. Dieselbe ist aus dem Bedürfniss hervorgegangen, die analytischen Eigenthümlichkeiten einer Gleichung zwischen zwei Variablen in einer solchen Weise geometrisch darzustellen, dass für complexe Werthe der Variablen weder Ausnahmen nöthig werden, noch der consequent gebildete geometrische Satz paradox erscheint. Zu diesem Zwecke wird, wenn

$$\mathfrak{F}(\xi, \eta) = 0$$

eine Gleichung zwischen zwei complexen Variablen

$$\xi = x + zi \quad \text{und} \quad \eta = y + ui$$

ist, der reelle Theil dieser Gleichung vom imaginären getrennt, so dass man zwei neue Gleichungen

$$\mathfrak{F}_1(x, y, z, u) = 0; \quad \mathfrak{F}_2(x, y, z, u) = 0$$

erhält, welche durch Elimination von $u$, resp. $z$ in

$$H(x, y, z) = 0; \quad K(x, y, u) = 0$$

übergehen. Um diese Gleichungen geometrisch zu deuten, wird ein gewöhnliches rechtwinkliges Coordinatensystem angenommen, dessen horizontale Axen den Variablen $x$ und $y$ entsprechen, während die verticale gleichzeitig Axe der $z$ und der $u$ ist. Hiernach repräsentiren die beiden letzten Gleichungen zwei Flächen, die $Z$-Fläche und die $U$-Fläche, durch welche also auch die gegebene Gleichung $\mathfrak{F}(\xi, \eta) = 0$ dargestellt wird. Der Inbegriff beider Flächen wird eine „vollständige Curve" ($\mathfrak{V}$-Curve) genannt (speciell eine $\mathfrak{V}\mathfrak{R}$-Curve, wenn alle Coefficienten der Gleichung $\mathfrak{F}(\xi, \eta) = 0$ reell sind). Hierdurch wird die Analogie erreicht mit der Darstellung einer Gleichung zwischen zwei reellen Variablen durch eine ebene Curve. Für $z = u = 0$ gehen die Gleichungen beider Flächen in dieselbe Gleichung $\mathfrak{F}(x, y) = 0$ über, durch welche eine „reelle Curve" als Schnitt beider Flächen mit der $xy$-Ebene dargestellt wird. Einem Werthepaar $\xi, \eta$ entspricht ein Paar von Punkten (ein „$\mathfrak{V}$-Punkt") $(x, y, z)$ und $(x, y, u)$, welche beide in derselben Verticale liegen. Die Punkte

$$\xi(= x + zi) \quad \text{und} \quad \eta(= y + ui)$$

sind die resp. Projectionen dieses $\mathfrak{V}$-Punktes auf die „Abscissen-Ebene" $(x, z)$ und die „Ordinaten-Ebene" $(y, u)$.

Nachdem auf Grund dieser Darstellung die Eigenschaften der $\mathfrak{V}$-Geraden im Allgemeinen untersucht worden sind, werden diejenigen Gebilde betrachtet, welche vorzugsweise Träger des Imaginären sind, nämlich Schnittpunkte, Tangenten und harmonische Mittelpunkte, an deren Stelle hier „$\mathfrak{V}$-Schnittpunkte" etc. treten. Zuletzt werden die Gleichungen der $Z$- und $U$-Fläche mittelst Anwendung der Taylor'schen Formel in Determinantenform dargestellt, und als specielle Anwendung der ganzen Theorie

die 𝔅-Kegelschnitte und 𝔅ℜ-Kegelschnitte (letztere auch mit Eintheilung) ausführlich discutirt.

Insofern bei diesem Verfahren alle Punkte einer Ebene als Repräsentanten der reellen, alle Punkte des übrigen Raumes als solche der imaginären Grössen erscheinen, ist dasselbe als eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Methode anzusehen, nach welcher die Punkte einer Geraden als reell, die der übrigen Ebene als imaginär betrachtet werden. Indem ferner die Darstellung der Gleichung $\mathfrak{F}(\xi, \eta) = 0$ aus der Ebene in den Raum verlegt wird, werden, wie der Verfasser an mehreren Beispielen zeigt, diejenigen Sätze der ebenen Geometrie, welche durch das Auftreten des Imaginären einen paradoxen Ausdruck annehmen, durch anschauliche Sätze der Raumgeometrie ersetzt. Hiernach ist ersichtlich, dass die beiden vom Verfasser in der Einleitung hervorgehobenen Zwecke, eine anschauliche Darstellung aller Eigenschaften der Gleichung $\mathfrak{F}(\xi, \eta) = 0$ zu geben, ohne doch von der gewöhnlichen Repräsentation des Imaginären sich allzuweit zu entfernen, vollkommen erreicht sind. Schliesslich ist noch zu bemerken, dass die hier durchgeführte Interpretation des Imaginären eine gewisse (an anderer Stelle näher zu betrachtende) Verwandtschaft mit der von Siebeck im 55. Bd. des Crelle'schen Journals gegebenen besitzt. Schg.

---

R. W. Genese. Note on polar coordinates. Messenger (2) VI. 14-17. 1875.

Die Methoden zur Herleitung der Formeln in Polarcoordinaten (d. h. die Gleichungen der Tangente und Normale) werden durch einige specielle Kunstgriffe vereinfacht.

Glr. (O.)

---

J. Casey. On a new form of tangential equations. Proc. of London XXV. 564-569.

Referat erfolgt nach dem Erscheinen der Arbeit in den Phil. Trans. Cly.

H. Brocard. Sur la détermination d'une courbe par une propriété des tangentes. Bull. S. M. F. IV. 42-44.

O.

---

F. D. Thomson. Solution of a question (4880). Educ. Times XXV, 90-91.

Wenn $F(xy) = 0$ die Gleichung für eine Curve und $\varphi(xy) = 0$ die für ihre Asymptoten (das höchste Glied wird in beiden als identisch vorausgesetzt), und es sind $t_1, t_2, \dots t_n$ die Tangenten vom Punkte $O(x, y)$ an die Curve und $p, q, r, \dots$ die reellen Foci, so ist

$$t_1 . t_2 \dots t_n = \frac{F(x\,y)}{\varphi(xy)} Op . Oq . Or. \dots$$

O.

---

E. Ghysens. Sur la construction des normales à quelques courbes et à quelques surfaces. N. C. M. II. 165-173.

Relationen, welche zwischen den Normalen zweier Curven (oder Oberflächen) bestehen, bezogen auf Polarcoordinaten, wenn die Radii vectores derselben Richtung Functionen von einander sind. Mn. (O.)

---

P. Mansion. Sur deux formules relatives à la théorie des courbes planes. N. C. M. II. 171-175.

Beweis der Formeln

$$\varrho\, dp = r\, dr, \quad d\sigma = r dt$$

nach Green (Zeuthen Tidsskr. 1875 p. 188-189), deren letztere von Herrn Catalan herrührt: $r$, $\varrho$, $dt$ sind der Radius vector, der Krümmungsradius und der Contingenzwinkel einer Curve, $p$ und $\sigma$ der Radius vector und der Bogen einer Fusspunktcurve in Beziehung auf den Coordinatenanfang. Mn. (O.)

---

GENTY. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 558-559.

Bezeichnet man mit $r$, $\varrho$ und $\delta$ den Radius vector, den Krümmungsradius und den Derivationswinkel in einem Punkte einer Curve, mit $r_1$, $\varrho_1$, $\delta_1$ dieselben Grössen für den entsprechenden Punkt einer aus ihr durch reciproke Radii vectores transformirten Curve, so ist

$$\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 \operatorname{tang}\delta = \left(\frac{r_1}{\varrho_1}\right)^2 \operatorname{tang}\delta_1.$$

O.

---

W. M. HICKS. Notes on pedals. Messenger (2) VI. 94-96.

1) Das Problem, die Fusspunktencurve für einen beliebigen Punkt zu finden, wird darauf reducirt, sie in Bezug auf einige specielle Punkte zu finden. 2) Man habe

$$\frac{d^2p}{d\psi^2} + p = \varrho = \frac{ds}{d\psi} = f(\psi).$$

Wenn die Gleichung der Curve gegeben ist in Ausdrücken von $s$ und $\psi$, sind offenbar $p$ und $\psi$ die Polarcoordinaten eines Punktes der Fusspunktenlinie. Dies wird auf eine Anzahl von Beispielen angewandt, indem die Gleichung der Fusspunktencurve gegeben ist durch Integration von

$$\frac{d^2p}{d\psi^2} + p = f(\psi).$$

Glr. (O.)

---

V. RAUSCHER. Studie über die Beziehungen zwischen Evoluten, Evolventen, Trajectorien und Umhüllungslinien. Wien. Gerold.

---

P. MANSION, NIEWENGLOWSKI, PATURET. Sur un problème relatif à une enveloppe. N. C. M. II, 307-308, 120-121, 182-183.

Die Elimination von $\alpha$ zwischen

$F_1(x,y).\varphi_1(\alpha) + F_2(x,y).\varphi_2(\alpha) = 0$ und $F_1.\varphi'_1(\alpha) + F_2.\varphi'_2(\alpha) = 0$

giebt die Gleichung eines Ortes, der durch die gemeinsamen Punkte des Curvensystems $F_1\varphi_1 + F_2\varphi_2 = 0$ geht, und der nicht die Enveloppe ist. Diese Bemerkung erläutert ein Paradoxon, auf das Herr Niewenglowski aufmerksam gemacht hat und das Herr Paturet nicht ganz vollständig erläutert hat.

Mn. (O.)

---

A. Laisant. Sur un problème relatif aux courbes planes. N. C. M. II. 23-24.

Die Enveloppe der Geraden, welche die Fusspunkte der rechtwinkligen Coordinaten einer Curve verbindet, ist so beschaffen, dass die Gerade, welche zwei correspondirende Punkte der Enveloppe und der ursprünglichen Curve verbindet, gleiche Neigung gegen die Axen, aber in entgegengesetztem Sinn, mit der Tangente an letztere hat. Mn. (O.)

---

R. F. Davis, R. W. Genese, F. D. Thomson. Solution of a question (5076). Educ. Times XXVI. 82.

Eine Sehne $PQ$ schneidet von einer ovalen Curve ein constantes Flächenstück ab; dann ist der Krümmungsradius ihrer Enveloppe $\frac{1}{4}PQ(\text{cotg}\,\theta + \text{cotg}\,\psi)$, wo $\theta$ und $\psi$ die Winkel sind, unter denen $PQ$ die gegebene Curve schneidet. O.

---

E. M. Langley. On the differential equation of parallel curves. Messenger (2) VI. 83-84.

Beweis des Satzes: Wenn

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 = 1,$$

so stellt $V = c$ eine Reihe paralleler Curven dar. Glr. (O.

---

Ch. Hermite. Question 95. N. C. M. II. 217.

Beweis des Satzes: Wenn $AMB$ ein Bogen einer ebenen convexen Curve ist, und man projicirt $A$ auf die Tangente $BA'$

in $B$, von $B$ auf die Tangente $AB'$ in $A$ und man vernachlässigt die Grössen 5[ter] Ordnung, so ist das Segment $AMB$ gleich $\frac{1}{8}$ der Summe der Dreiecke $AA'B$, $ABB'$. Mn. (O.)

---

## B. Theorie der algebraischen Curven.

H. J. Stephen Smith. On the higher singularities of plane curves. Proc. L. M. S. VI. 153-182.

Um die Stellung dieses Aufsatzes zu bezeichnen, wird es zunächst nöthig, über das in neuerer Zeit vielfach geförderte Gebiet, die Theorie der singulären Punkte der algebraischen Curven, eine kurze Uebersicht zu geben.

Man kennt seit lange die Reihenentwicklungen, welche in einem singulären Punkte gelten. Nach diesen hat Cayley einen Satz ausgesprochen, nach welchem jede höhere Singularität als äquivalent betrachtet wird mit einer gewissen Zahl $\delta$ von Doppelpunkten, $\varkappa$ von Rückkehrpunkten, $\tau$ von Doppeltangenten und $\iota$ von stationären Tangenten. Das Hauptproblem, das sich der Verfasser hier stellt, ist also, zu untersuchen: unter welchen Verhältnissen diese durch 4 Indices gelieferte Definition in der That den Einfluss des singulären Punktes ausdrückt; ob dies insbesondere bei den Plücker'schen Gleichungen und bei den Beziehungen der rationalen Transformationen — d. h. für die zu einer Curve gehörigen, unter linearen, bez. rationalen Transformationen invarianten Curven — geschieht.

Nun wurde zunächst die Theorie der Reihenentwicklungen selbst gefördert, indem dieselben jetzt nach einer allgemein gültigen analytischen Methode vorgenommen werden, die auf successiven eindeutigen Transformationen (von der Form $y' = \frac{y}{x}$ im singulären Werthsystem $x = 0$, $y = 0$) beruht. Diese Darstellungen sind enthalten in den Arbeiten von

Hamburger, Schlömilch Z. XVI. p. 461 (F. d. M. III. p. 194);
Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen (F. d. M. VI. p. 263);
Stolz, Clebsch Ann. VIII. p. 415 (F. d. M. VII. p. 415).

Weiter hat auch die geometrische Interpretation Fortschritte gemacht. Bei Halphén, C. R. LXXVIII., Liouville J. (2) II. bildet die directe Interpretation der Puiseux'schen Entwicklungen (Bestimmung der Ordnung des Unendlichkleinen durch die Segmente, welche auf einer Geraden in der Nähe des singulären Punktes von der Curve ausgeschnitten werden) den Ausgangspunkt. Hierbei möge noch auf den Aufsatz des Referenten in Clebsch Ann. IX. hingewiesen sein, in welchem aus den successiven Transformationen unmittelbar eine geometrische Definition des singulären Punktes abgeleitet wird; diese führt zu einer Erweiterung der Plücker'schen Erzeugungsart der Curve und setzt den singulären Punkt aus gewöhnlichen vielfachen Punkten zusammen; und nachträglich wird bewiesen, dass die Singularität gemäss dieser Definition in die Plücker'schen Gleichungen etc. eingeht (aber es wird nicht zuvor bewiesen, dass diese Definition an sich in allen Fällen gelten muss, wie Herr Smith in dem vorliegenden Aufsatze, p. 172. und 176, missverständlicherweise behauptet).

Ein weiterer Gesichtspunkt, von dem aus die Theorie der singulären Punkte in neuester Zeit gefördert worden ist, der der Realität der Curvenzweige etc., führt auf ein anderes Gebiet, als die eben genannten Arbeiten, und muss daher in dieser Uebersicht bei Seite gelassen werden.

Zu der bezeichneten Literatur gesellt sich nun der im Titel genannte Aufsatz von H. St. Smith. Derselbe behandelt die Reihen, deren Entwickelung als bekannt vorausgesetzt wird, in viel eingehenderer Weise, als bisher irgend geschehen, und stellt, als wichtigstes Resultat dieser Discussion, eine neue Gleichung zwischen den Zahlen, die einen Zweig eines singulären Punktes characterisiren, auf. Dies rechtfertigt ein ausführlicheres Referat über diesen Aufsatz.

Derselbe beschäftigt sich mit den characteristischen Zahlen, mit welchen ein singulärer Punkt in die Plücker'schen Gleichungen und in die Geschlechtszahl $p$ einer Curve eintritt. Der erste Theil bezieht sich auf die Bestimmung der beiden Indices $\delta$ und $\varkappa$

(Doppel- und Rückkehrpunkte) des singulären Punktes, und auf die Zahl der Schnittpunkte zweier Curven, die in einen solchen Punkt fallen. Zuerst wird der „Discriminantindex“ eines Punktes $P$ gesucht, d. h. diejenige Zahl, mit welcher $P$ ($x = x_0$, $y = y_0$ bei der Curvengleichung $f(x, y) = 0$ und bei nicht speciellem Coordinatensystem) in die Discriminante eintritt, welche von $f$ in Bezug auf $x_n$ genommen wird; oder vielmehr die Theile, in welche dieser Index zerfällt, wenn verschiedenartige Reihenentwicklungen in $P$ existiren. Es wird dieser Index von $P$ gleich der doppelten Zahl der Schnittpunkte, welche die Curve in $P$ mit sich selbst hat, und drückt sich durch die Exponenten der Reihen explicite so aus:

Seien die $\Delta$ Elemente eines Zweiges gegeben durch

$$y-y_0 = B_0(x-x_0) + B_1\omega^{\beta_1}(x-x_0)^{\frac{\beta_1}{\Delta}} + B_2\omega^{\beta_2}(x-x_0)^{\frac{\beta_2}{\Delta}} + \cdots,$$

wo $\Delta$ der kleinste gemeinsame Nenner aller Exponenten und
$\omega^\Delta = 1$, $\beta_1 > \Delta$ ist; sei weiter
$\Delta_1$ der grösste gemeinsame Divisor von $\beta_1$ und $\Delta$,
$\gamma_1$ die erste der Zahlen $\beta_1, \beta_2 \ldots$, welche nicht durch $\Delta_1$ theilbar ist,
$\Delta_2$ der grösste gemeinsame Divisor von $\gamma_1$ und $\Delta_1$,
$\gamma_2$ die erste der Zahlen $\beta$, welche nicht durch $\Delta_2$ theilbar ist etc. etc.,
$\beta_1 = \gamma$.

Dann rührt von diesem $\Delta$-elementigen Zweig der Discriminantindex her:

$$2N = \gamma(\Delta - \Delta_1) + \gamma_1(\Delta_1 - \Delta_2) + \gamma_2(\Delta_2 - \Delta_3) + \cdots,$$

wobei $2N - (\Delta - 1)$ immer grade ist. Dieser Index hängt also nur von gewissen kritischen Exponenten $\frac{\gamma}{\Delta}$ der Reihe ab.

Derselbe Zweig hat noch den „Cuspidalindex“ $\Delta - 1$.

Analoges findet für die Schnittpunkte zweier verschiedener von $P$ ausgehender Zweige der Curve statt. Es folgt dann eine Zahl, die, nachdem man die Exponenten beider Reihen auf den kleinsten gemeinsamen Nenner gebracht hat, ebenfalls nur von

den kritischen Exponenten in den den beiden Reihen gemeinsamen Gliedern abhängt.

Der „Cuspidalindex“ von $P$ wird dann

$$\varkappa = \Sigma(\varDelta - 1) = \mu - \lambda,$$

wo $\mu$ die Ordnung der Vielfachheit, $\lambda$ die Zahl der verschiedenen Zweige von $P$ ist. Der „Nodalindex“ $\delta$ ergiebt sich durch die Gleichung, die ausdrückt, dass $2\delta + 3\varkappa$ gleich dem Discriminantindex von $P$; z. B. für nur einen Zweig:

$$2\delta = (\gamma - 3)(\varDelta - \varDelta_1) + (\gamma_1 - 3)(\varDelta_1 - \varDelta_2) + \cdots$$

Das Reciproke gilt für die Indices $\tau$ und $\iota$ einer singulären Tangente.

Wenn schon der obige explicite Ausdruck für den Discriminantindex neu ist: so noch mehr die Ausführungen, welche jetzt bei Darstellung der Reihen für die Reciprokalcurve gegeben werden. Es wird gezeigt, dass für den einzelnen singulären Zweig die Indices $\tau$ und $\iota$ von denselben kritischen Exponenten abhängen, wie $\delta$ und $\varkappa$.

Sei $y = Qx + R$ die Gleichung der Tangente des obigen Zweigs in $P$, so wird:

$$Q - Q_0 = \frac{\beta_1}{\varDelta} B_1 \omega^{\beta_1}(x - x_0)^{\frac{\beta_1}{\varDelta} - 1} + \frac{\beta_2}{\varDelta} B_2 \omega^{\beta_2}(x - x_0)^{\frac{\beta_2}{\varDelta} - 1} + \cdots$$

$$R - R_0 = -x_0(Q - Q_0) + \left(1 - \frac{\beta_1}{\varDelta}\right) B_1 \omega^{\beta_1}(x - x_0)^{\frac{\beta_1}{\varDelta}} + \cdots,$$

woraus

$$R - R_0 = -x_0(Q - Q_0) + H_1 \mu^{h_1} \theta^{h_1} (Q - Q_0)^{\frac{h_1}{\beta_1 - \varDelta}} + H_2 \mu^{h_2} \theta^{h_2} (Q - Q_0)^{\frac{h_2}{\beta_1 - \varDelta}} + \cdots,$$

wo

$$\mu = \left(\frac{\varDelta}{\beta_1 B_1}\right)^{\frac{1}{\beta_1 - \varDelta}}, \quad \theta^{\beta_1 - \varDelta} = 1.$$

Die kritischen Terme dieser Reihe sind nun genau diejenigen, in welchen die Zähler $h_i$ die früheren Werthe $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \ldots$ haben; und die Zahlen $\gamma, \gamma_1, \ldots, \varDelta_1, \varDelta_2 \ldots$ sind dieselben wie in der Reihe für $y - y_0$. Auch die Coefficienten dieser Terme lassen sich angeben:

$$H_k = B_i, \text{ wenn } h_k = \beta_i = \gamma_s.$$

Dabei ist wieder

$$\beta_1 - \Delta = \gamma - \Delta = \Delta'$$

der kleinste gemeinsame Nenner aller Exponenten. Daher folgt für diesen Zweig:

$$i = \Delta' - 1, \; \gamma = \Delta + \Delta' = i + \varkappa + 2,$$
$$2\tau + 3i = \gamma(\Delta' - \Delta_1) + \gamma_1(\Delta_1 - \Delta_2) + \ldots$$

In Verbindung mit dem Früheren ergiebt sich daher nun die neue Relation zwischen den zu einem mehrelementigen Zweig gehörigen Zahlen:

$$\tau - \delta = \tfrac{1}{2}i(i-1) - \tfrac{1}{2}\varkappa(\varkappa - 1).$$

Endlich ergiebt sich auch für zwei verschiedene mehrelementige Zweige, mit gemeinsamem Punkt und einer gemeinsamen Tangentenrichtung, die Zahl $\overline{T}$ der gemeinsamen Tangenten aus der Zahl $\overline{D}$ der gemeinsamen Punkte:

$$\overline{T} - \overline{D} = (\iota + 1)(\iota' + 1) - (\varkappa + 1)(\varkappa' + 1),$$

wo sich $\iota$, $\varkappa$ auf den ersten, $\iota'$, $\varkappa'$ auf den zweiten Zweig beziehen; ebenfalls eine neue Relation.

Der Aufsatz wendet sich weiterhin zu den Beweisen der Plücker'schen Gleichungen. Die beiden Gleichungen für Ordnung $m$ und Klasse $n$ der Curve

$$n = m(m-1) - 2\Sigma\delta - 3\Sigma\varkappa$$
$$m = n(n-1) - 2\Sigma\tau - 3\Sigma\iota$$

werden direct durch die Betrachtung der Discriminante geliefert. Die dritte hier nöthige Gleichung, für das Geschlecht $p$:

$$p = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - \Sigma\delta - \Sigma\varkappa = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \Sigma\tau - \Sigma\iota$$

wird aber zunächst auf dem Riemann'schen der analysis situs entnommenen Wege erhalten. Sodann werden die bisherigen algebraischen oder geometrischen Beweise dieser Gleichung kritisch betrachtet, wobei aber, ausser dem schon am Anfang erwähnten, einige weitere Missverständnisse anzuzeigen sind.

In § 17, 2 wird behauptet, dass die „Coordinatengeometrie" keine Mittel besitze, um die Anzahl $\lambda$ der verschiedenen Zweige und die Zahlen $\iota$ und $\varkappa$ für einen Zweig zu bestimmen. Jedenfalls aber liefern doch die eindeutigen Transformationen Definitionen für diese Zahlen.

§ 17, 5 enthält die Erweiterung des Bertini-Zeuthen'schen

Beweises der Geschlechtsgleichung auf singuläre Punkte. Zu dem Zwecke wird der Satz vorangestellt, der in der That die Grundlage der ganzen Untersuchung zu bilden hat: dass durch eine eindeutige Transformation ein (mehrelementiger) Zweig immer nur wieder in einen Zweig übergeht. Diese Annahme ist nach dem Verfasser nur für einen reellen Zweig und eine reelle Transformation evident. Aber der algebraische Satz kann durch die Realität des Zweiges nicht evidenter werden, muss vielmehr durch successive Ueberführung des Zweiges in einen einfachen bewiesen werden.

Ferner wird noch die Anwendung der quadratischen Transformationen zur Auflösung höherer Singularitäten sehr weit zurückdatirt und Cramer (Analyse des lignes courbes) zugeschrieben. Aber Cramer hat durchgehends die Newton'schen Entwickelungen (unter Anwendung irrationaler Transformationen zu ihrer Aufstellung) für die Untersuchung der Singularitäten benutzt. Nur in einigen Beispielen (pag. 34. 616. etc.) werden auch neue Parameter in die Gleichung der Curve eingeführt, und ausdrücklich zu dem Zwecke, die Gleichung der Curve leichter auflösen und die ganze Curve bequemer construiren zu können; nicht aber zu dem Zwecke, durch diese Transformation die verschiedenen Zweige, welche von einem Punkte auslaufen, von einander zu trennen und die mehrelementigen Zweige für sich, ohne weitere Zerlegung, zu erhalten.

Zum Schlusse des Aufsatzes werden noch die Zweige betrachtet, welche eine allgemeine Polare der Curve in der Nähe eines ihrer singulären Punkte haben kann, und Bemerkungen gemacht über die Art, wie sich die characteristischen Zahlen $\gamma, \gamma_1, \ldots \Delta, \Delta_1, \ldots$ eines singulären Punktes im Laufe der auf die gewöhnliche Art anzustellenden Reihenentwicklungen ergeben.

Nr.

---

A. Harnack. Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven. Clebsch Ann. X. 189-199.

Der Verfasser beweist mit Hülfe elementarer Hülfsmittel

(Methode der abgekürzten Bezeichnung, Continuität) die folgenden Sätze:

1) Curven beliebiger Ordnung vom Geschlechte $p$ können nicht mehr als $p+1$ Züge haben.

2) Andererseits existiren bei gegebener Ordnung und damit verträglichem, übrigens beliebigem $p$ auch immer Curven, die diese Maximalzahl der Züge aufweisen.

Eine Hauptunterscheidung, welche bei den Beweisen zu machen ist, ist die der paaren und unpaaren Curvenzüge, eine Unterscheidung, die auf v. Staudt zurückgeht. Kln.

---

F. Klein. Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve. Erl. Ber. 1875, Clebsch Ann. X. 199-210.

Der Verfasser leitet mit Hülfe von Continuitätsbetrachtungen folgenden Satz ab, der bei gestaltlichen Untersuchungen über algebraische Curven eine fundamentale Bedeutung besitzen dürfte: Es sei $n$ die Ordnung, $k$ die Klasse einer reellen ebenen algebraischen Curve, $w'$ die Zahl ihrer reellen Wendepunkte, $t''$ die Zahl ihrer reellen aber isolirten Doppeltangenten, analog $r'$ die Zahl der reellen Spitzen, $d''$ die Zahl der reellen isolirten Doppelpunkte. Dann hat man:

$$n+w'+2t'' = k+r'+2d''.$$

Kln.

---

F. Klein. Ueber eine neue Art von Riemann'schen Flächen. (Zweite Mittheilung.) Clebsch Ann. X. 398-417.

Die „Riemann'schen" Flächen, um welche es sich hier handelt, werden von den reellen Punkten der imaginären Tangenten einer algebraischen Curve gebildet und schliessen sich also an die Gestalt der zugehörigen Curve enge an (siehe die erste Mittheilung des Verfassers im siebenten Bande von Clebsch Ann. p. 558-566). Der Verfasser erläutert nunmehr ihren Verlauf bei Curven mit nur einfachen Singularitäten, er bespricht die Anordnung

und Verzweigung der Blätter und bestätigt durch directe Abzählung die Richtigkeit derjenigen Zusammenhangszahl, welche den Flächen vermöge ihrer Beziehung zu den gewöhnlichen Riemann'schen Flächen beizulegen sind. Erläutert werden diese Verhältnisse zumal bei den Curven dritter Ordnung, welche als Curven sechster Klasse event. bereits sechs über einander liegende Blätter darbieten. Dadurch ergiebt sich nebenbei eine Discussion der Lage der imaginären Wendepunkte, die vielleicht an sich von Interesse ist. Uebrigens steht diese Arbeit in engster Beziehung zu den Untersuchungen des Verfassers über den Verlauf der Abel'schen Integrale. (Vgl. das Referat auf p. 302 dieses Bandes.)

Kln.

---

W. Spottiswoode. Sur le contact d'une courbe avec un faisceau de courbes doublement infini. C. R. LXXXIII. 627-630.

Eine von dem Verfasser in den Philosophical Transactions der Londoner Academie veröffentlichte Reihe von Abhandlungen enthält Formeln über die Berührung von Curven und Flächen, welche sich, wie derselbe ausführt, auf das folgende von dem Referenten behandelte Berührungsproblem anwenden lassen: Die Curven einer doppelt unendlichen Schaar zu finden, welche eine gegebene Curve berühren. Der Verfasser erhält eine (in der Form der Gleichung nur wenig von der des Referenten abweichende) Curve, deren Schnitt mit der gegebenen Curve die Osculationspunkte liefert, und discutirt die uneigentlichen Lösungen des Problems.

Bl.

---

H. Krey. Ueber dreipunktig berührende Curven einer dreifach unendlichen Schaar. Clebsch Ann. X. 221-227.

Wenn $f=0$ die Gleichung einer Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung ist, $\varphi=0$, $\psi=0$, $\chi=0$, $\omega=0$ die Gleichungen der Grundcurven ($s^{\text{ter}}$ Ordnung) der Schaar

$$\alpha_1\varphi+\alpha_2\psi+\alpha_3\chi+\alpha_4\omega=0,$$

so müssen die Coordinaten derjenigen Punkte der Curve $f=0$,

in welchen sie von Curven der Schaar in vier unendlich nahen Punkten getroffen wird, einer Gleichung genügen, welche in ihrer ursprünglichen Gestalt noch die dritten Differentiale der Coordinaten enthält. Diese werden mit Hülfe der Gleichung $f=0$ und der zwischen den Coordinaten bestehenden Beziehung

$$k = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 = 1$$

eliminirt.

Drei von den so entstehenden vier Theilen der Gleichung lassen sich in übersichtlicher Determinantenform mit Ausscheidung des Factors $k^6$ darstellen. Beim vierten scheint dies nicht möglich zu sein, sondern es gelingt blos den Factor $k^5$ auszuscheiden, ohne die Determinantenform zu zerstören. Lth.

---

K. Schwering. Bestimmung der Anzahl der Doppeltangenten ebener Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind. Schlömilch Z. XXI. 130.

Wenn eine gerade Linie eine unicursale Curve in einem Punkte berührt, dessen Parameter $\lambda$ ist, so schneidet sie dieselbe, wenn sie $n^{\text{ter}}$ Ordnung ist, noch in $n-2$ Punkten, deren Parameter $\nu$, einer Gleichung genügen, welche in $\nu$ vom Grade $n$, in $\lambda$ vom Grade $2n-1$ ist. Diese Gleichung ist durch $(\nu-\lambda)^2$ theilbar, und der Verfasser zeigt, wie man diesen Factor fortschaffen und den Rest so umformen kann, dass für $\nu$ eine Gleichung $n-2^{\text{ten}}$ Grades bleibt, deren Coefficienten ganze Functionen von $\lambda$ vom Grade $2n-4$ sind. Die Discriminante dieser Gleichung in Bezug auf $\nu$ liefert die Berührungspunkte der Doppeltangenten, deren Zahl dabei, wie es sein muss, zu $2(n-2)(n-3)$ sich ergiebt. Zum Schluss wird auf Curven $4^{\text{ter}}$ Ordnung, speciell auf Lemniscaten eine Anwendung gemacht. Lth.

---

M. de Tilly & Niewenglowski. Sur les asymptotes des courbes algébriques. N. C. M. II. 49-53, 146-150.

Kritik des Satzes von Catalan: „Bei jeder algebraischen Curve ist die Zahl der im Unendlichen auf der Curve und einer

beliebigen Asymptote gelegenen Punkte nothwendig grade." Dieser Satz lässt sich nur beweisen, wenn man voraussetzt, dass die Punkte im Unendlichen einer Curve ausschliesslich entstehen durch die fortschreitende und unbegrenzte Entfernung aller Schnittpunkte der Curve mit zwei der Asymptote parallelen Secanten, die auf beiden Seiten derselben liegen. Diese Voraussetzung steht aber in Widerspruch mit dem Uebereinkommen, dass eine Gerade eine Curve $n^{ter}$ Ordnung in $n$, reellen oder imaginären, in endlicher oder unendlicher Entfernung liegenden, Punkten schneidet.

Mn. (O.)

---

B. Niewenglowski. Note sur les courbes planes d'ordre $n$ à point multiple d'ordre $n-1$. Nouv. Ann. (2) XV. 126.

Eine Ausdehnung des Transversalensatzes, der sich auf den Schnitt einer Geraden mit den Asymptoten der Curve bezieht.

Nr.

---

B. Biěka. Ueber die vielfachen Punkte. Časopis V. (Böhmisch).

Von einer symbolischen Form der Gleichung einer Curve $n^{ter}$ Ordnung ausgehend leitet der Verfasser auf elementarem Wege die Bedingungsgleichungen ab, welche die Existenz eines $m$-fachen Punktes erheischt, und erläutert den Gang der Rechnung durch Beispiele.

W.

---

P. Mansion. Sur les courbes unicursales considérées comme des cissoides. N. C. M. II. 120, 321, 404.

Historisch: Resultate von Zahradnik, Niewenglowski und Fouret. Die Gleichung einer unicursalen Curve, die einen vielfachen Punkt der Ordnung $n-1$ zum Anfangspunkt hat, kann geschrieben werden

$$y = tx, \quad x = \frac{A_1}{t-t_1} + \frac{A_2}{t-t_2} + \cdots + \frac{A_n}{t-t_n}$$

oder

$$y = tx, \quad x = \frac{A'_1}{(t-t_1)^m} + \frac{A'_2}{(t-t_2)^{m-1}} + \cdots$$

Die geometrische Interpretation des ersten Systems giebt die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Fouret: „Der Radius vector einer Curve von der Ordnung $n$, die im Anfangspunkt einen vielfachen Punkt der Ordnung $n-1$ hat, kann betrachtet werden als die Summe der Radii vectores von Curven der Ordnung

$$m, p, \dots q \quad (m+p+\dots+q=n),$$

die im Anfangspunkt vielfache Punkte der Ordnung

$$(m-1), (p-1)\dots(q-1)$$

haben, und zur Asymptote die der gegebenen Curve." Das zweite System lässt den Satz von Fouret in den Ausnahmefällen modificiren. Referent hat neuerdings bemerkt, dass die Grundlage dieser Note sich in dem Bull. von Darboux IX. p. 151 in der Note findet. Mn. (O.)

---

P. Mansion. Note sur une classe de courbes unicursales. Zeuthen Tidsskr. (3) VI. 64-66.

Mittelst eines polaren Coordinatensystems mit Centrum im vielfachen Punkte beweist der Verfasser die von Fouret zuerst gefundene Relation $\nu=\nu_1+\nu_2+\cdots\nu_n$, zwischen den Radii vectores einer unicursalen Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem $(n-1)$-fachen Punkte, und denjenigen der Asymptoten derselben. Ferner giebt er noch eine Erweiterung desselben Satzes, in der Gleichung $\nu=R_p+R_q+\cdots$ ausgedrückt, an, wo die $R_p R_q\dots$ verschiedenen asymptotischen Curven der gegebenen, resp. von den Ordnungen $p, q\dots(p+q+\dots=n)$, entsprechen. Gm.

---

J. Wolstenholme, E. B. Elliott, F. D. Thomson. Solutions of a question (4829). Educ. Times XXV. 62-63.

Eine Curve $n^{\text{ten}}$ Grades wird durch die $n^2$ Schnittpunkte der $n^2$ Linien $A, B, C, \dots$ mit den $n$ Linien $A', B', C', \dots$ gelegt. Sind dann $P$ und $Q$ irgend zwei Asymptoten, so ist

$$\frac{\sin PA.\sin PB.\sin PC\dots}{\sin QA.\sin QB.\sin QC\dots}=\frac{\sin PA'.\sin PB'.\sin PC'\dots}{\sin QA'.\sin QB'.\sin.QC'\dots}.$$

O.

---

L. Saltel. Sur une loi générale régissant les lieux géométriques. Bull. de Belg. (2) XLI. 595-599.

Wenn ein geometrischer Ort so beschaffen ist, dass, wenn man durch willkürliche Punkte eine oder mehrere erzeugende Curven gehen lässt, sich ergiebt, dass für die entsprechenden Werthe der variabeln Parameter die Gleichungen dieser Curven eine gewisse Zahl von festen Werthen enthalten, so zerfällt der Ort in mehrere andere, für welche man a priori die sie einzeln definirenden Gleichungen finden kann. Mn. (O.)

---

C. F. E. Björling. Om brännpunkternas reciproka linier Öfv. Forh. Stockholm. 1876.

Die beiden Verbindungs-Geraden eines Punktes $O(h, k)$ mit den unendlichen Kreispunkten schneiden eine ebene Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung $C_n = 0$ in den Punkten

$$i_1,\ i_2,\ i_3 \dots i_n;\ j_1,\ j_2,\ j_3 \dots j_n.$$

Die $n^2$ Geraden $i_1 j_1,\ i_2 j_2, \dots i_n j_n$ sind die reciproken Geraden der Brennpunkte in Bezug auf $O$. Von ihnen sind $n$ reell.

Die Gleichung der Curve kann

$$\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_n + [(x-h)^2+(y-k)^2]\, C_{n-2} = 0$$

geschrieben werden, wo $\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_n$ solche Geraden sind, und $C_{n-2}$ die Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, die durch die übrigen $n(n-2)$ Schnittpunkte derselben mit $C_n$ geht. Hieraus ergeben sich verschiedene Sätze.

Die $n$ reellen Geraden können folgendermassen berechnet werden. Es sei $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Curve $C_n$ in rechtwinkligen Punktcoordinaten. Wenn $z = a + bi$ eine Wurzel der Gleichung $F(1, i, z) = 0$ ist, so sind $a$, $b$ die Liniencoordinaten einer Geraden. Bg.

---

C. Reuschle. Ueber Fusspunktcurven. Schlömilch Z. XXI. 139-141.

Unter Fusspunktcurve ist der geometrische Ort der Fusspunkte der von einem gegebenen Punkte auf die Tangenten

einer gegebenen Curve gefällten Lothe verstanden. Zunächst wird die gewöhnliche Methode, die Gleichung einer Fusspunktcurve zu finden, angegeben; dann eine andere, bei welcher die gegebene Curve durch eine Gleichung in Liniencoordinaten ausgedrückt ist. Diese letztere Methode lässt mehrere Eigenschaften der Fusspunktcurven leicht erkennen; also z. B. der Grad der Fusspunktcurve ist im Allgemeinen gleich der doppelten Classenzahl der gegebenen Curve. Dieser Grad reducirt sich um $r$ Einheiten, wenn die gegebene Curve mit der unendlich fernen Geraden eine Berührung $r^{ter}$ Ordnung hat. Ist ferner $k$ die Classenzahl der gegebenen Curve, so ist der gegebene Punkt ein $k$-facher auf der Fusspunktcurve. Letztere geht $k$ mal durch die imaginären Kreispunkte im Unendlichen, wenn ihr Grad $2k$ ist; dagegen geht sie $k-1$ mal durch die Kreispunkte und hat eine reelle Asymptote, wenn ihr Grad $2k-1$ ist, etc. Mz.

---

M. Greiner. Anharmonische und involutorische Gebilde. Bayr. Bl. XII. 156-162.

Der Verfasser geht von der Thatsache aus, dass vier einem Büschel $f+\lambda\varphi=0$ angehörige Curven dann im Doppelverhältniss unter sich stehen, wenn zwischen ihren 4 Parametern die Relation

$$\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3}:\frac{\lambda_1-\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_4}=v$$

besteht, und beweist, dass dieses Verhältniss gleich ist demjenigen zwischen den vier ersten Polaren irgend eines Punktes oder auch gleich dem der vier vom Grundpunkt der Ebene an die Curven gezogenen Berührungslinien. Für $v=-1$ wird das anharmonische Verhältniss bekanntlich ein harmonisches. Hiernächst wird die Bedingungsgleichung für die involutorische Lage von 6 Curven aufgestellt, aus welcher dann folgender anscheinend neue Satz für die Involution gerader Linien abgeleitet wird: „Man multiplicire die Gleichungen der conjugirten Geradenpaare und setze die aus den Coefficienten von $x^2$, $xy$ und $y^2$ der Gleichungen der einzelnen Geradenpaare gebildete Determinante gleich Null“.

Weitere Anwendungen werden auf Kreisbüschel und Kreisnetze gemacht, und bekannte Sätze und Aufgaben durch sehr einfache Betrachtungen erledigt. Gr.

---

G. Halphèn. Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et sur les questions analogues dans l'espace. Liouville J. (3) II. 257-291, 371-411.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. C. p. 394.

---

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

E. Hain. Beziehungen eines Dreiecks zu einer Geraden. Grunert Arch. LIX. 87-93.

Werden die Seiten eines Dreiecks durch eine Symmetriegerade geschnitten, so liegen die Mittelpunkte der Diagonalen des so entstehenden Vierseits auf einer zweiten Symmetriegeraden. Nach einem Satz von Gauss nennt der Verfasser dieselbe die Gauss'sche Gerade der ersten in Bezug auf das Dreieck. In Betreff einer dritten Symmetriegeraden, welche der Verfasser als die Cayley'sche bezeichnet, verweisen wir auf die Abhandlung selbst. Schl.

---

E. Hain. Ueber Bildung neuer Symmetriepunkte. Grunert Arch. LVIII. 394-416.

Verfasser giebt die Construction und die Coordinaten von hundert Symmetriepunkten des Dreiecks an. Am Schlusse der Abhandlung sind diese Punkte nach ihren Dimensionen übersichtlich zusammengestellt. Schl.

---

E. Hain. Ueber den Umkreis des Dreiecks. Grunert Arch. LVIII. 380-385.

Die Harmonikalen der Peripheriepunkte des Umkreises schneiden sich in einem festen Punkte des Dreiecks, nämlich in dem sogenannten Grebe'schen Punkte. Die Umkreispolare dieses Punktes ist zugleich seine Polare in Bezug auf das Dreieck.

Schl.

---

E. Hain. Ueber den Feuerbach'schen Kreis. Grunert Arch. LIX. 323-329.

Die Radikalaxe des Umkreises und des Feuerbach'schen Kreises ist die Harmonikale des Höhendurchschnittspunktes.

Schl.

---

A. Cayley. O a differential relation between the cubes of a quadrangle. Messenger (2) VI. 99-101.

Die Seiten und Diagonalen $YZ$, $ZX$, $XY$, $OX$, $OY$, $OZ$ eines Vierecks seien $f$, $g$, $h$, $a$, $b$, $c$, die zusammensetzenden Dreiecke mögen bezeichnet werden mit

$$A = \Delta YZO = (b, c, f)$$
$$B = \Delta ZXO = (c, a, g)$$
$$C = \Delta XYO = (a, b, h)$$
$$\Omega = \Delta XYZ = (f, g, h),$$

d.h. $A, B, C, \Omega$ sind die Dreiecke, deren Seiten resp. $(b, c, f)$ $(c, a, g)$ $(a, b, h)$ $(f, g, h)$ sind $(\Omega = A + B + C)$, dann existirt zwischen $(a, b, c, f, g, h)$ eine Gleichung. die geschrieben werden kann:

$$\Omega(Aada + Bbdb + Ccdc) - (BCfdf + CAgdg + ABhdh) = 0.$$

Dies wird geometrisch und analytisch bewiesen.

Glr. (O.)

---

F. van Wageningen. De cirkels, welke drie gegeven Cirkels onder gelijke hoeken snijden. Nieuw Arch. II. 180-185.

Rein analytische Auflösung der Aufgabe: die Kreise zu bestimmen, welche drei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln schneiden, mit Hülfe von Determinanten. G.

---

E. Lucas. Sur la relation de Möbius qui exprime que quatre points d'un plan sont situés sur un cercle. Nouv. Ann. (2) XV. 205-207.

Möbius hat (siehe Crelle Bd. XVI. p. 26) mit Hülfe der Principien des barycentrischen Calcüls zuerst die Relation erhalten, welche ausdrückt, dass vier Punkte einer Ebene auf einem Kreise liegen. Cayley erhielt dasselbe durch die Theorie der Determinanten. Der Verfasser interpretirt und verallgemeinert dies in folgender Weise: Setzt man

$$X_i = x^2 + y^2 - 2a_i x - 2b_i y + c_i,$$

so sind $c_i$ und $X_i$ resp. die Potenzen des Punktes (0, 0) und desjenigen $(x, y)$ in Bezug auf den Kreis

$$(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 + c_i - a_i^2 - b_i^2 = 0.$$

Giebt man ferner in der ersten Gleichung dem Index $i$ die Werthe 1, 2, 3, 4 und eliminirt $x$, $y$, $x^2+y^2$, so kommt:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & X_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & X_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & X_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & X_4 \end{vmatrix}.$$

Also: Errichtet man in den Mitten von vier in einer Ebene liegenden Kreisen Lothe zu dieser Ebene, die resp. den Potenzen eines beliebigen Punktes der Ebene in Bezug auf diese Kreise proportional sind, so hat das Tetraeder, dessen Ecken die Endpunkte dieser Lothe sind, ein constantes Volumen. Ferner: Sind die vier Kreise zu einem fünften orthogonal, so ist dies Volumen Null, die Endpunkte der Lothe liegen in einer Ebene. Reduciren sich die vier Kreise auf ihre Mittelpunkte, so hat man die zuerst erwähnte Beziehung. Mz.

---

F. Mertens. Eine analytische Auflösung der Aufgabe des Apollonius. Schlömilch Z. XXI. 443-449.

Der Uebergang von der bekannten analytischen Auffassung zu der bekannten Gergonne'schen Construction wird vermittelt durch die Einführung der Mittelpunkts-Coordinaten und des

Radius des die drei gegebenen Kreise unter rechten Winkeln schneidenden Kreises. Scht.

---

F. Mertens. Die Malfatti'sche Aufgabe für das geradlinige Dreieck. Schlömilch Z. XXI. 297-301.

Der Verfasser berechnet auf sehr geschickte Weise die drei Entfernungen $x$, $y$, $z$ der Ecken $A$, $B$, $C$ des Dreiecks von den Berührungspunkten der drei den Winkeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ eingeschriebenen Malfatti'schen Kreise. Bezeichnet $s$ den halben Umfang des Dreiecks, $\varrho$ den Radius des eingeschriebenen Kreises, $f$, $g$, $h$ die Entfernungen der Ecken $A$, $B$, $C$ von dem Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises, so ergiebt sich:

$$x = \tfrac{1}{2}(s-\varrho+f-g-h),$$
$$y = \tfrac{1}{2}(s-\varrho-f+g-h),$$
$$z = \tfrac{1}{2}(s-\varrho-f-g+h).$$

Scht.

---

F. Mertens. Ueber die Malfatti'sche Aufgabe und deren Construction und Verallgemeinerung von Steiner. Wien. Abh. 1876.

In den letzten Jahren schon hatte die Literatur des viel umworbenen Problems manchen schätzenswerthen Zuwachs erhalten. Herr Wittstein hatte eine Geschichte des Malfatti'schen Problems (Diss. München 1871, F. d. M. III. p. 12) zusammengestellt. Herr Schröter (Borchardt J. LXXVII. p. 230, F. d. M. VI. 325) und Herr Affolter (Math. Ann. VI. 597—602, F. d. M. VI. 325) hatten die geometrische Analysis der bekannten Steiner'schen Construction auf die von Steiner selbst gegebenen Hilfsmittel zurückgeführt. Hier giebt nun Herr Mertens (der Verfasser der Mittheilung in Schlömilch's Z. XXI, worüber oben referirt ist,) in einer der Kaiserlichen Academie in Wien vorgelegten grossen Abhandlung eine äusserst geschickte analytische Auflösung sowohl des ursprünglichen Problems, wie auch der Steiner'schen Verallgemeinerung, in welcher an die Stelle der

3 gegebenen Strahlen 3 gegebene Kreise treten. Dadurch beweist der Verfasser nicht nur vollständig die Steiner'sche Construction, auch für die Fälle, wo die 3 Kreise nicht sämmtlich innerhalb des Dreiecks liegen, sondern er stellt auch diese Construction in ihren einzelnen Schritten durch Gleichungen dar, welche nur unmittelbar gegebene Grössen enthalten. Eine Darlegung des Ganges der Rechnung würde jedoch hier zuviel Raum kosten. Scht.

---

O. Hesse. Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte Schlömilch Z. XXI. 1-27.

Hesse hat im Jahre 1865 und in zweiter vermehrter Auflage im Jahre 1873 Vorlesungen über die analytische Geometrie des Punktes, der Geraden und des Kreises in der Ebene herausgegeben und diesen im 19. Band von Schlömilch's Zeitschrift weitere Vorlesungen folgen lassen (siehe F. d. M. VI. p. 419). In seinem Nachlass fanden sich noch zwei Vorlesungen vor, die sich an die veröffentlichten anschliessen, deren Herausgabe Herr Prof. Gundelfinger besorgt hat. In der ersten derselben, der 23ten der ganzen Reihe, behandelt Hesse bei zu Grundelegung der Gleichung des Kegelschnitts in Punkt- und Liniencoordinaten die Pole und Polaren, Polardreiecke, conjugirte Durchmesser und Eigenschaften der Brennpunkte und Asymptoten in eleganter und anregender Weise, die sich indess nicht wesentlich von der unterscheidet, die er in seiner Raumgeometrie durchgeführt hat. Die zweite Abtheilung, 24te Vorlesung, ist der Aufsuchung der Coordinaten der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte gewidmet. Die beiden Kegelschnitte $f=0$ und $\varphi=0$ bestimmen ein Büschel $f-\lambda\varphi=0$, dem drei Linienpaare angehören. Die Werthe von $\lambda$, die diesen entsprechen, genügen einer Gleichung 3ten Grades, deren Wurzeln als ungleich angenommen werden, und nach deren Auflösung man aus linearen Gleichungen die Coordinaten der Schnittpunkte der beiden Linien jedes der drei Paare finden kann. Diese drei Punkte sind die Ecken eines den beiden Kegelschnitten gemeinsamen Polardreiecks. Stellt man die Glei-

chungen von dessen Seiten auf, so kann man mit deren Hülfe die Gleichungen der drei Linienpaare als Differenzen je zweier Quadrate darstellen. Wenn die dabei auftretenden Coefficienten gefunden sind, so kann man die fraglichen Schnittpunktcoordinaten leicht angeben. Zum Schluss wird eine andere Behandlung angedeutet, die auf der gleichzeitigen Transformation der beiden Kegelschnittgleichungen in die Summe von 3 Quadraten beruht, und werden einige specielle Fälle näher betrachtet.

Lth.

---

O. Hesse. Aufgabe. Schlömilch Z. XXI. 73.

In Crelle's J. Bd. LXVI. p. 15 und in seinen „vier Vorlesungen über Homographie" hat Hesse ein Uebertragungsprincip angegeben, vermöge dessen einem Punktepaar einer Geraden ein Punkt der Ebene und umgekehrt entspricht. Die Aufgabe, die er hier löst, ist die, den Ort derjenigen Punkte zu finden, deren entsprechende Punktepaare aus Punkten von gegebener Entfernung bestehen; der gesuchte Ort ist ein Kegelschnitt, welcher den „Directrix der Beziehung" genannten Kegelschnitt in einem Punkte vierpunktig berührt.

Lth.

---

E. d'Ovidio. La proprietà fondamentale delle curve di second' ordine. Roma.

---

J. L. McKenzie, J. J. Walker. Solutions of a question (4958). Educ. Times XXV. 88.

Es wird bewiesen, dass der Kegelschnitt $\alpha\beta - k^2\gamma^2 = 0$ dem Kegelschnitt $\alpha\beta - \gamma^2 = 0$ um- oder eingeschrieben ist, je nachdem $1 - k^2$ positiv oder negativ ist.

O.

---

C. F. E. Björling. Om simultana covarianter af 4$^{de}$ ordningen och af 4$^{de}$ klassen till två kägelsnitt. Öv. af Förh. Stockholm. 1876, 21-28.

Für ein System zweier ternärer quadratischer Formen werden hier zweierlei Arten von Covarinaten 4ten Grades unterschieden, je nachdem nämlich die zugehörige Curve 4ter Ordnung Doppelpunkte hat oder nicht. An der Normalform der beiden Kegelschnitte wird gezeigt, dass die Doppelpunkte in den 3 Ecken des gemeinsamen Polardreiecks liegen. Zur ersten Art gehört z. B. der Ort von Punkten, für welche das Doppelverhältniss der beiden Tangentenpaare an die Kegelschnitte invariant ist; zur zweiten Art der Ort der Schnittpunkte der Tangenten des ersten Kegelschnitts mit den entsprechenden Polaren ihrer Berührungspunkte, genommen in Bezug auf den zweiten Kegelschnitt. Nr.

---

H. J. S. Smith. On the joint invariants of two conics or two quadrics. Messenger (2) V. 144.

Es seien $P$ und $Q$ 2 Kegelschnitte, 1, 2, 3 ein selbstconjugirtes Dreieck in Bezug auf $P$, ferner $P_1$, $P_2$, $P_3$ die Rechtecke der Punkte 1, 2, 3 in Bezug auf den Kegelschnitt $P$, wobei diese Rechtecke auf den Transversalen in fixirter Richtung gemessen werden. Es mögen ferner $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ ähnliche Bedeutung für den Kegelschnitt $Q$ haben, indem die Richtung der Transversalen ebenfalls fixirt ist. Dann hat der Ausdruck $\frac{Q_1}{P_1}+\frac{Q_2}{P_2}+\frac{Q_3}{P_3}$ denselben Werth für alle selbstconjugirten Dreiecke von $P$ und ist die Invariante von $P$, $Q$, welche linear ist in Beziehung auf $Q$ und quadratisch in Beziehung auf $P$. Das Verschwinden desselben drückt aus, dass $Q$ harmonisch dem $P$ umschrieben ist. Etwas Aehnliches gilt für 2 Quadrics und für Quadratics mit beliebiger Zahl von Unbestimmten. Glr. (O.)

---

L. Crocchi. Sopra le coniche polari reciproche nei fasci di coniche. Battaglini G. XIV. 83-93.

Die Methode des Herrn Verfassers ist diese:

$$0=S=A_1x_1^2+A_2x_2^2+A_3x_3^2+2A_4x_2x_3+2A_5x_3x_1+2A_6x_1x_2$$
$$0=s=a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+2a_4x_2x_3+\cdots$$

mögen die Gleichungen zweier Kegelschnitte, die auf das Fundamentaldreieck bezogen sind, sein. Dann drückt $S + ls = 0$, wo $l$ veränderlich, ein Kegelschnittbüschel aus. Ferner seien

$$\Sigma + \lambda\sigma = 0, \quad S' + l's' = 0;$$

die Gleichungen zweier anderen Kegelschnittbüschel. Die Gleichung des reciproken Polarkegelschnittes, der einem Kegelschnitt des Büschels $S + ls$ in Bezug auf einen Kegelschnitt des Büschels $\Sigma + \lambda\sigma$ zukommt, ist die Emanante:

$$\sum_{r,s} . D_{r,s} \frac{\partial(\Sigma + \lambda\sigma)}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial(\Sigma + \lambda\sigma)}{\partial x_s} = 0$$

wo $r$ und $s$ die Werthe 1, 2, 3 annehmen und $D_{r,s}$ das algebraische Complement in der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} A_1 + la_1, & A_6 + la_6, & A_5 + la_5 \\ A_6 + la_6, & A_2 + la_2, & A_4 + la_4 \\ A_5 + la_5, & A_4 + la_4, & A_3 + la_3 \end{vmatrix}$$

bedeutet, das $x_r$, $x_s$ entspricht. Die Coefficienten der Emanante werden nun den Coefficienten der Gleichung, die einen beliebigen Kegelschnitt des Büschels:

$$S' + l's' = 0$$

darstellt, proportional gesetzt. Es ergiebt sich dann, dass die durch die Emanante dargestellten Kegelschnitte im Allgemeinen kein Büschel bilden, nachdem $l$ (oder $\lambda$) specialisirt ist, sondern eine Curve $4^{\text{ten}}$ Grades umhüllen. Nachher werden besondere Fälle besprochen. Mz.

---

E. Lucas. Sur un problème de Halley relatif à la théorie des sections coniques. Nouv. Ann. (2) XV. 207-209.

Das Halley'sche Problem, welches in der Bestimmung der Bahnlinie eines Planeten besteht, wenn drei heliocentrische Lagen desselben bekannt sind, kommt geometrisch darauf hinaus, einen Kegelschnitt zu finden, wenn man einen Focus und drei Punkte von ihm hat. Der Herr Verfasser beweist folgenden Satz: Wenn man durch jeden Punkt eines Kegelschnitts Gerade zieht, die sämmtlich einerlei Richtung sind, aus der Ebene des Kegelschnitts heraustreten und Längen haben, die den zugehörigen Focalradien

proportional sind, so liegen die Endpunkte aller dieser Geraden auf einem Kegelschnitt, dessen Ebene durch die Directrix des gegebenen Kegelschnitts geht. Dieser Satz wird noch verallgemeinert und seine Anwendung auf das Halley'sche Problem angegeben. Ferner wird gezeigt, wie man mit Hülfe dieses Satzes die gemeinsamen Sehnen zweier Kegelschnitte, die einen gemeinschaftlichen Brennpunkt haben, auffinden kann. Mz.

---

HIRST, NASH, C. LEUDESDORF. Solution of a question (5001). Educ. Times XXVI. 17-18, 103-104.

Zu einem System von 5 Punkten auf einem Kegelschnitt gehört ein 6[ter] auf demselben, der so beschaffen, dass die durch ihn parallel zu der 2 der gegebenen Punkte verbindenden Sehne gezogene Gerade durch den weiteren Schnittpunkt des Kegelschnitts und des durch die 3 anderen Punkte gelegten Kreises geht. Es wird gezeigt, dass dieser Satz ein specieller Fall eines Satzes ist, der sich in Salmon's Higher plane curves p. 134 (2[te] Aufl.) findet. O.

---

G. A. V. PESCHKA. Construction der Durchschnittspunkte von Geraden mit Kegelschnittlinien. Grunert Arch. LIX. 18-39.

In dieser Arbeit wird eine Reihe geometrischer Constructionen angeführt, welche die directe Bestimmung der gemeinsamen Punkte einer Geraden und eines durch genügende Stücke gegebenen Kegelschnittes ermöglichen. Es sei erwähnt die Bestimmung der Durchschnitte einer Geraden $l$ mit einem Kegelschnitt, der gegeben ist: durch seine Axen, durch ein Paar conjugirter Durchmesser, durch seine Brennpunkte und die Länge einer Axe. Hier erfolgt die Lösung durch Anwendung der elementaren geometrischen Definitionen für die Kegelschnitte. Ferner werden dann durch Anwendung der projectivischen Eigenschaften die Durchschnitte von Kegelschnitten, die durch irgend fünf Elemente (Punkte oder Tangenten) gegeben sind, mit einer Geraden con-

stirt. Die Darstellung ist überall ausführlich und leicht verständlich. Mz.

---

M. Greiner. Zur Theorie der Kegelschnitte. Grunert Arch. LV. 108-112.

Es wird der Satz bewiesen: Setzt man die Coordinaten irgend eines Punktes der Ebene in die in der Normalform gegebene Kegelschnittgleichung ein, so stellt der hierdurch erhaltene Werth das Quadrat des Inhaltes desjenigen Vierecks dar, welches bestimmt ist durch die vom angenommenen Punkte an den Kegelschnitt laufenden Tangenten und die Durchmesser ihrer Berührungspunkte. Der Ort aller Punkte, denen gleichgrosse Vierecke zukommen, ist ein mit dem gegebenen ähnlicher, ähnlich liegender und concentrischer Kegelschnitt. Da man andrerseits weiss, dass sämmtliche einem Kegelschnitte umschriebenen Parallelogramme inhaltsgleich sind, so folgt, dass die Ecken derselben auf einem mit dem gegebenen ähnlichen, ähnlich liegenden und concentrischen Kegelschnitte liegen.

B. K.

---

J. A. Mathieu. Quelques propriétés des coniques inscrites et circonscrites au quadrilatère. Nouv. Ann. (2) XV. 354-359.

In dieser Arbeit werden nach den Methoden der analytischen Geometrie — ähnlich wie in Salmon's conic sections — die bekannten Sätze vom Ort der Pole einer Geraden in Bezug auf alle einem Viereck eingeschriebenen Kegelschnitte entwickelt, und dann einige Erweiterungen angegeben. Nachher findet man das Analoge für alle einem Viereck umgeschriebenen Kegelschnitte. Ausserdem wird darauf hingewiesen, wie jene Sätze sehr einfach die Construction der Berührungspunkte ergeben, die auf den fünf Geraden liegen, durch die als Tangenten ein Kegelschnitt bestimmt ist — und in entsprechender Weise die Construction der Tangenten in den fünf Punkten, durch die irgend ein Kegelschnitt gehen soll. Mz.

---

M. Terrier. Quadrilatères et sections coniques. Nouv. Ann. (2) XV. 108-114.

Fortsetzung der F. d. M. VII. 434 besprochenen Arbeit. In Betreff des Inhalts ist auf die Arbeit selbst, die nur Lehrsätze enthält, zu verweisen. Mz.

---

J. Neuberg. Sur les polygones circonscrits à une conique. N. C. M. II. 1-9, 34-40, 65-70.

Zusammenhängende mit Noten versehene Darstellung der Arbeiten von Darboux und Weyr. 1) Ueber die Coordinaten $(q, q_1)$ von Darboux, 2) Satz von Poncelet, 3) Involution von höherem als dem zweiten Grade. Mn. (O.)

---

J. Gambey. Note sur le rayon de courbure des sections coniques. Nouv. Ann. (2) XV. 159-160.

Der Herr Verfasser macht auf folgende Beziehung bei den Kegelschnitten aufmerksam. Construirt man in einem Punkte $M$ einer Ellipse die Tangente, welche die grosse Axe in $T$ und die Normale, welche sie in $N$ trifft; errichtet man ferner in $T$ ein Loth zur grossen Axe, das die Normale in $R$ trifft. und bezeichnet die Länge von $RN$ durch $R$, den Krümmungsradius in $M$ durch $\varrho$ und die Abscisse dieses Punktes durch $x$, endlich die grosse Halbaxe durch $a$, so ist stets

$$\frac{R}{\varrho} = \frac{a^2}{x^2}.$$

Mz.

---

R. F. Davis, E. Rutter and R. Tucker. Solutions of a question (4846). Educ. Times XXV. 23-24.

Zieht man von einem Punkte $O$ der Normale $OP$ einer Parabel 2 Tangenten, welche die Winkel $\alpha$ und $\beta$ mit $OP$ machen, so ist der Krümmungsradius in $P = 2OP.\mathrm{tang}\alpha.\mathrm{tang}\beta$.

O.

---

E. HAIN. Bemerkung über Symmetriekegelschnitte des Dreiecks. Grunert Arch. LIX. 83-87.

Die durch zwei Symmetriepunkte $P$ und $Q$ gezogenen Ecktransversalen treffen die Gegenseiten in 6 Punkten, welche auf einem Symmetriekegelschnitte des Dreiecks liegen, dessen Coefficienten symmetrische Functionen bezüglich je zweier Seiten des Dreiecks sind und durch cyclische Vertauschung aus einander erhalten werden können. Schl.

---

H. JACOB. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 547-548.

Die Enveloppe der Polaren eines Punktes in Bezug auf die einem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte ist ein Kegelschnitt, welcher dem von den Diagonalen des Vierseits gebildeten Dreieck einbeschrieben ist. O.

---

BERTHOMIEU. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 556-558.

Der Ort der Mittelpunkte von Kegelschnitten, die eine Gerade in einem gegebenen Punkte berühren und die Eigenschaft haben, dass ein zweiter gegebener Punkt in Beziehung auf die Kegelschnitte Pol einer gegebenen Geraden ist, besteht aus 2 Geraden. O.

---

R. TUCKER, H. MURPHY. Solutions of a question (4879). Educ. Times XXV. 53.

$P$ sei ein Punkt auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $O$, $P'$ desgleichen mit dem Mittelpunkt $P'$. Wenn dann $OP'$ parallel $O'P$ ist, so ist die Enveloppe der ihre Halbirungspunkte verbindenden Geraden ein Kegelschnitt. O.

---

E. GUILLET. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 379-381.

In einer Ebene ist gegeben ein fester Punkt $P$, ein Kreis $O$ und ein Punkt $A$ auf demselben. Ein variabler Kreis $O'$ geht stets durch $A$; sein Mittelpunkt bleibt auf $O$. Die Enveloppe der Polaren des Punktes $P$ in Beziehung auf $O'$ ist dann ein Kegelschnitt. O.

---

R. Tucker, A. W. Cave. Solutions of a question (5011). Educ. Times XXVI. 23-24.

Wenn der Krümmungskreis im Punkte $P$ einer Parabel diese noch im Punkte $Q$ schneidet, so ist $PQ^2 = 128\,xy\varrho$, wo $(xy)$ die Coordinaten von $P$, $\varrho$ der Krümmungsradius in $P$ ist.

O.

---

E. Lucas. Théorèmes nouveaux sur la parabole et l'hyperbole. Nouv. Ann. (2) XV. 19-30.

Auf analytisch-geometrischem Wege wird in dieser Arbeit eine grössere Zahl von Sätzen hergeleitet, welche sich auf die einer Parabel oder Hyperbel ein- und umgeschriebenen Polygone beziehen, wobei der bekannte Satz als Ausgangspunkt dient, dass ein Tangentendreieck einer Parabel die Hälfte desjenigen Sehnendreiecks ist, dessen Eckpunkte die Berührungspunkte jener Tangenten sind. Mz.

---

G. de Beauxjour, C. Moreau. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 140-144.

Der geometrische Ort der Mittelpunkte von gleichseitigen Hyperbeln, welche eine gegebene Parabel derart doppelt berühren, dass die Berührungssehne die Axe so schneidet, dass das Stück der Axe vom Scheitel bis zum Schnittpunkte die mittlere Proportionale zwischen den Sehnenabschnitten ist, ist eine Parabel, deren Parameter der vierte Theil desjenigen der gegebenen Parabel ist. O.

J. R. Wilson, Nash. Solution of a question (4435). Educ. Times XXV. 41-42.

Der zwei gleichen Parabeln mit den Parametern $4a$, deren Axen einen Winkel $\alpha$ bilden, gemeinsame Inhalt, ist

$$\frac{16}{3}\, a^2 \operatorname{cosec}^3 \frac{\alpha}{2}.$$

O.

---

P. C. Plch. Gleichung der Ellipse bezogen auf zwei Diameter, der Theorie der elliptischen Schwingungen angepasst. Casopis V. (Böhmisch).

W.

---

Geisenheimer. Construction für die Krümmungsmittelpunkte von Ellipsen und Hyperbeln. Schlömilch Z. XXI. 80.

Es sei $C$ der Mittelpunkt einer Ellipse, $P$ ein Peripheriepunkt; die durch $P$ gelegte Normale schneide die grosse Axe in $M$, die kleine in $N$ und werde von der in $C$ auf $CP$ errichteten Senkrechten in $Q$ getroffen. Trägt man nun von $M$ nach $N$ hin $MR = NQ$ ab, so ist $R$ der zu $P$ gehörende Krümmungsmittelpunkt.

B. K.

---

J. Thomae. Ueber die einem Dreieck eingeschriebene und die umschriebene Ellipse. Schlömilch Z. XXI. 137-139.

Die in der Arbeit behandelte Aufgabe ist: Um ein Dreieck die kleinste und in ein Dreieck die grösste Ellipse zu zeichnen. Setzt man als bekannt voraus, dass bei allen Dreiecken mit vorgegebenem Umfang das gleichseitige das grösste ist, ferner dass bei allen Dreiecken mit vorgegebenem Umfang der Inhalt dividirt durch das Product der drei Seiten gleichfalls ein Maximum wird, wenn das Dreieck gleichseitig ist, so lässt sich, wie der Herr Verfasser zeigt, die in Rede stehende Aufgabe ohne Differentialrechnung durch blosses Aufstellen des Ausdrucks für die Fläche

der Ellipse, nachdem ihr Mittelpunkt willkürlich angenommen ist, lösen, und es ergiebt sich sehr leicht aus diesem Ausdruck das bekannte Resultat, dass der Mittelpunkt der fraglichen Ellipse in beiden Fällen Schwerpunkt des gegebenen Dreiecks sein muss.

Mz.

---

E. Lucas. Problèmes sur l'ellipse. Nouv. Ann. (2) XV. 5-8

Der Herr Verfasser bespricht in dieser Note mehrere Aufgaben, die Ellipse betreffend, und zwar 1) Ueber die geometrische Construction der Normalen, die von einem Punkte $P(\alpha, \beta)$ an die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ gehen. Diese Construction ist von Painvin (siehe F. d. M. Bd. II. p. 484) angegeben, und wird in dieser Note etwas vereinfacht. Ist nämlich $A$ ein Endpunkt der grossen Axe, und fällt man von diesem Punkte Lothe auf die vier von $P$ ausgehenden Normalen, so begegnen diese vier Lothe der Ellipse ausser in $A$ noch in vier Punkten eines Kreises $\Omega$, von dem sich 2 Punkte leicht angeben lassen — und daher auch eine Gerade, die sein Centrum enthält. Eine zweite solche Gerade ergiebt die Gleichung

$$y = 2\frac{a\alpha\beta}{c^2}.$$

Construirt man diese in bekannter Weise, so ist der Kreis $\Omega$ gefunden, und mit ihm dann die vier Normalen.

2) Ueber die Aufsuchung der kleinsten Ellipsensehne, die zugleich Ellipsennormale ist. Ist $a > b\sqrt{2}$, so trifft die Ellipse ihre Evolute in reellen Punkten, und ist $A$ einer dieser Punkte, so construire man an die Evolute in $A$ die Tangente, welche Normale der Ellipse in $B$ sei; und es wird durch einfache geometrische Betrachtung gezeigt, dass $AB$ die kleinste Sehne der Ellipse ist, die zugleich Normale der Ellipse ist.

3) Ueber ein der Ellipse eingeschriebenes Dreieck, dessen Schwerpunkt Centrum der Ellipse ist. Drückt man in bekannter Weise die Ecken des Dreiecks durch excentrische Winkel aus, also

$$x_1 = a\cos\alpha, \quad y_1 = b\sin\alpha, \text{ u. s. w.}$$

so sind die Coordinaten $(x, y)$ des Centrums eines dem Dreieck umgeschriebenen Kreises durch die Gleichungen gegeben:

$$\frac{ax}{c^2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

$$\frac{by}{c^2} = -\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2},$$

und es muss sein: $\gamma-\beta = \beta-\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Da man nun die Formel hat:

$$\cos^2 p\cos^2 q\cos^2 r + \sin^2 p\sin^2 q\sin^2 r$$
$$= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}[\cos 2(p-q) + \cos 2(q-r) + \cos 2(r-p)]$$
$$+ \tfrac{1}{8}[\cos 2(p+q) + \cos 2(q+r) + \cos 2(r+p)],$$

wo $p, q, r$ drei beliebige Winkel sind, so ergiebt sich aus den vorigen Gleichungen:

$$\left(\frac{4ax}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{4by}{c^2}\right)^2 = 1.$$

Ferner ist der Ort des Höhenschnittes der in Rede stehenden Dreiecke ein zum vorigen homothetischer. Dies wird als Anwendung der trigonometrischen Formel gezeigt. Mz.

---

T. T. Wilkinson, J. L. Kitschin, C. Leudesdorf. Solutions of a question (4154). Educ. Times XXVI. 63-64.

Von einem Punkt $P$ auf der Peripherie eines Kreises, der über der grossen Axe $AB$ einer Ellipse als Durchmesser beschrieben ist, ist eine Tangente gezogen, welche die grosse Axe in P schneidet. Schneiden $PA$ und $PB$ die Ellipse in $D$ und $E$, so geht $DE$ durch T. O.

---

L. W. Jones, R. F. Scott, A. B. Evans, Tanner, J. Stephen, Wolstenholme, R. Tucker. Solutions of a question (5017). Educ. Times XXVI. 56-58.

Wenn $2a$ und $2b$ die Axen einer Ellipse oder Hyperbel sind, $p$ das Loth vom Mittelpunkt auf eine Tangente, so ist die Länge

der normalen Sehne in diesem Punkt

$$\frac{2a^2b^2}{p\{b^2\pm(a^2-p^2)\}}.$$

O.

---

Astor. Problème. Nouv. Ann. (2) XV. 507-511.

An einen Punkt einer gegebenen Ellipse zieht man den osculirenden Kreis, ferner die zweite dem Kreise und der Ellipse gemeinsame Tangente. Es wird der Ort ihres Schnittes und der Tangente im Osculationspunkt untersucht. O.

---

Chr. Fr. Lindmann. Problema geometricum. Grunert Arch. LVIII. 440-443.

Wenn $A$ und $B$ die Endpunkte der positiven Halbaxen einer Ellipse bezeichnen, so soll auf ihr ein solcher Punkt $P$ gefunden werden, dass $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ ein Maximum oder Minimum werde. Es giebt vier solche Punkte, welche auf einer durch den Mittelpunkt der Ellipse gehenden Hyperbel liegen. Zwei derselben sind daher stets reell; die Untersuchung darüber, wann alle es sind, bildet den weiteren Inhalt der Arbeit. B. K.

---

W. W. Hendrickson, H. Heaton, E. B. Seitz. Problem. Analyst III. 161-162.

In einem Kreise ist ein Radius gezogen. Von seinem Endpunkt ist ferner eine Coordinate gezogen und von ihrem Fusspunkt eine Gerade senkrecht zum Radius. Die Enveloppe dieser letzten Linie wird bestimmt und discutirt. Glr. (O.)

---

H. Brocard. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 182-183.

Es möge $M$ ein Punkt einer ebenen Curve sein und $MO$ der Krümmungsradius an diesem Punkt. Betrachtet man dann $M$ als

das Ende der kleinen Axe einer Ellipse, welche in diesem Punkte denselben Krümmungsradius hat, so ist der Ort der Brennpunkte dieser Ellipse ein Kreis über *OM* als Durchmesser.

O.

---

J. H. VAN LEEUEVEN. Verdeeling van den hoek in drie gelijke deelen. Nieuw Arch. II. 177-179.

Auf sehr einfache Weise wird hier die Trisection eines Winkels ausgeführt durch Construction eines Kreises und einer gleichseitigen Hyperbel. Eine solche Auflösung findet sich in Grunert's Archiv LVI. 96, doch theilt der Herausgeber der Zeitschrift in einer Note mit, dass er die obige Auflösung erhalten hatte, bevor das genannte Heft von Grunert's Archiv erschienen war.

G.

---

P. BARBARIN. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 210-212.

Gegeben ein Kreis, ein fester Durchmesser in demselben und eine Sehne, die einer gegebenen Richtung parallel ist. Bestimmt wird die allgemeine Gleichung der durch die Endpunkte derselben gehenden gleichseitigen Hyperbel, und einige geometrische Oerter.

O.

---

E. BIARD. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 282-284.

In einer Ebene sind 2 Parallele $A, B$ und ausserhalb des von ihnen begrenzten Raumes ein Punkt $C$ gegeben. Von $C$ aus wird eine Gerade gezogen, die $A$ und $B$ in $a$ und $b$ schneidet. Die Enveloppe des über $ab$ beschriebenen Kreises ist eine Hyperbel.

O.

---

L. PORTAIL et E. BIARD. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 376-379.

Der geometrische Ort der Parabelbrennpunkte, welche eine gleichseitige Hyperbel der Art doppelt berühren, dass die Axen dieser Parabeln nur eine constante gegebene Richtung haben, ist wieder eine Hyperbel mit demselben Mittelpunkt wie die gegebene. O.

---

SEGUE et DE VIRAC. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 234-259, 326.

Eine Ellipse hat ihren Mittelpunkt auf einer gegebenen Hyperbel und berührt die Asymptoten derselben. Die Berührungssehne, welche dem Maximum des Inhalts der Ellipse entspricht, ist dann Tangente an eine Hyperbel, die der gegebenen ähnlich ist. O.

---

Weitere Aufgaben und Lehrsätze über Kegelschnitte von S. A. RENSHAW, R. TUCKER, R. W. GENESE, A. ROBERTS, WOLSTENHOLME, J. J. WALKER, J. L. MCKENZIE, E. RUTTER, L. H. ROSENTHAL, H. T. GERRANS, A. B. EVANS, C. LEUDESDORF, N. SARKAR, L. W. JONES, W. SIVERLEY, F. D. THOMSON, S. TEBAY, C. TAYLOR, WILLIAMSON, R. F. DAVIS, A. COHEN, TANNER, R. E. RILEY, E. B. ELLIOTT, E. DE LAMAZE, L. LEBOEUF, L. THEREMIN, ED. ROBERT, L. GOULIN, MORET-BLANC, P. SONDAT. A. LAISANT finden sich Educ. Times XXV. 21, 52, 59, 61, 66, 73, 79, 86, 92, 95, 102, 105; XXVI. 21, 33, 35, 40, 47, 49, 50, 55, 64, 65, 69, 83, 88, 89, 94, 95, 99, 101, 108; Nouv. Ann. (2) XV. 177, 232, 239, 286, 474, 511, 559.

O.

---

P. RICCARDI. Esercitazione geometrica. Mem. di Modena XVI. 3-13.

---

D. Andere specielle Curven.

H. de la Goupillière. Note sur les courbes que représente l'équation $\varrho^n = A . \sin n\omega$. Nouv. Ann. (2) XV. 97-108.

In der allgemeinen Form $\varrho^n = A \sin n\omega$, worin dem $n$ positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale Werthe beigelegt werden können, ist eine grosse Anzahl bemerkenswerther Curven enthalten. Die Haupteigenschaften dieser speciellen Curven, mit denen sich Maclaurin, Euler, l'Hôpital, Fagnano, Riccati, Lamé, Serret, O. Bonnet, W. Roberts, H. de la Goupillière und mehrere andere Mathematiker beschäftigt haben, werden hier übersichtlich zusammengestellt, mit genauer Angabe der Quellen. M.

---

L. Henneberg. Ueber die Evoluten der ebenen algebraischen Curven. Wolf Z. XXI. 22-23.

Bei den Evoluten der ebenen algebraischen Curven besteht zwischen jeder der Coordinaten und der Bogenlänge eine algebraische Gleichung; und umgekehrt: Wenn bei einer ebenen Curve zwischen jeder der Coordinaten und der Bogenlänge eine algebraische Gleichung besteht, so ist diese Curve die Evolute einer algebraischen Curve. M.

---

K. Schwering. Bemerkung zu der Curve $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1$. Schlömilch Z. XXI. 133.

Die Curve $x^4 + y^4 = r^4$ und ebenso die Curve $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1$ gehören zu denjenigen algebraischen Curven, deren Sectoren mit Hülfe der cyklischen und der elliptischen Functionen in analoger Weise verglichen werden können, wie die Bögen des Kreises und der Lemniskate. M.

---

A. Hochheim. Die reciproke Polare der Differentialcurve der Parabel in Bezug auf den Kreis. Grunert Arch. LVIII. 423-430.

Die reciproke Polare der Differentialcurve

$$y^2 x = \frac{k^2 p}{4}$$

der Parabel $y^2 = px$ in Bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ ist ebenfalls die Differentialcurve einer Parabel. Es werden mehrere bemerkenswerthe Eigenschaften dieser Curve entwickelt.

M.

---

P. Serret. Note sur un point de géométrie infinitésimale. C. R. LXXXII. 67-70.

Der Ort der Mittelpunkte ($A_3$) aller parallelen Sehnen ($A_1 A_2$) einer ebenen Curve ($C$) ist eine neue Curve ($C_m$), deren Richtung in jedem Punkte durch den Satz bestimmt ist, dass die in $A_1$ und $A_2$ an $C$, und in $A_3$ an $C_m$ gelegten Tangenten durch denselben Punkt $T$ gehen. Nur in den Schnittpunkten beider Curven lässt sich die Richtung der an $C_m$ gelegten Tangenten nicht in dieser Weise bestimmen, weil das Dreieck $A_1 A_2 T$ sich hier auf einen Punkt reducirt. Auf analytischem Wege (mit Hilfe der Reihenentwickelung) haben Maclaurin und Bertrand gefunden, dass der Winkel der an die beiden Curven in ihren Schnittpunkten gelegten Tangenten durch die Formel

$$\cot \vartheta = \tfrac{1}{3} \frac{d\varrho}{ds}$$

bestimmt ist. Herr Serret leitet nun in der vorliegenden Note dieselbe Formel auf mehr geometrischem Wege ab, indem er sich der beiden Sätze bedient: 1) Wenn $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$ drei parallele Strecken, und $A_3$, $B_3$, $C_3$ ihre resp. Mittelpunkte sind, so ist

$$\triangle A_1 B_1 C_1 - \triangle A_2 B_2 C_2 = 2 . \triangle A_3 B_3 C_3 .$$

2) Wenn $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ die Winkel sind, welche die in $A_1$, $A_2$, $A_3$ an die beiden Curven gelegten Tangenten mit der Sehne $A_1 A_2$ bilden, und $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$ die Krümmungsradien in diesen Punkten, so ist

$$\frac{1}{\varrho_1 \sin^2\alpha_1} - \frac{1}{\varrho_2 \sin^2\alpha_2} = \frac{2}{\varrho_3 \sin^2\alpha_3}.$$

Am Schluss wird ein irrthümlicher, von Carnot (Géométrie de position p. 479) aufgestellter Werth von cot $\vartheta$ mitgetheilt.

Schg.

---

H. M. JEFFERY. On cubics of the third class with triple foci. Quart J. XIV. 127-146.

Eine allgemeine Curve 3ter Classe ist entweder eine mit 9 Spitzen oder eine bitangentiale mit 3 Spitzen oder eine inflexionale mit einer Spitze. Im ersten und zweiten Fall fallen 2 der Spitzen mit den Kreispunkten im Unendlichen zusammen. Dann fallen die 3 Tangenten von jedem Kreispunkte im Unendlichen zusammen mit der cuspidalen Tangente in demselben Punkte, und der Schnitt der beiden cuspidalen Tangenten ist der sogenannte dreifache Brennpunkt (triple focus). § 1—7 enthalten die Einleitung, § 8—20 beziehen sich auf ebene, § 21—29 auf sphärische Curven.

Cly. (O.)

---

H. M. JEFFERY. On plane cubics with a double and a single focus. Quart. J. XIV. 359-376.

Fortsetzung der Arbeit: „On cubics of the third class with triple foci“ p. 127—146, (siehe oben). Wenn eine Curve 3ter Classe durch jeden der Kreispunkte im Unendlichen geht, so sind für jeden dieser Punkte die Tangenten von ihm die Tangenten an diesen Punkt, doppelt genommen, und eine einfache Tangente von diesem Punkt. Die Tangenten an die beiden Kreispunkte im Unendlichen schneiden sich in einem reellen Punkte, der der sogenannte doppelte Focus ist. Die Tangenten von den beiden Kreispunkten im Unendlichen schneiden sich in einem reellen Punkte, der der einfache Focus ist. Die 7 Figuren sind eine Auswahl von im Ganzen 58 Diagrammen, die der Verfasser 1876 auf dem Meeting of the Brit. Ass. zu Glasgow ausgestellt hatte, und die wahrscheinlich separat publicirt werden.

Cly. (O.)

---

A. Cayley. The bicursal sextic. L. M. S. VII. 166-172.

M.

---

J. Wolstenholme. Circular cubics which are the inverse of a lemniscate. L. M. S. VII. 91-100.

M.

---

J. J. Walker. On the equation of the nodal plane cubic. Quart. J. XIV. 242-245.

Die Gleichung jeder Curve 3ten Grades mit einem Doppelpunkte kann in die Form gebracht werden

$$U = ax^3 + by^3 + 6mxyz = 0.$$

Dann sind $x = 0$, $y = 0$ die Doppelpunkttangenten, $z = 0$ die Verbindungslinie der drei Wendepunkte. Die Hesse'sche Determinante $H$ ergiebt sich

$$H = -m^2(ax^3 + by^3) + 2m^3xyz.$$

Die Gleichung $\lambda U + H = 0$ stellt eine Curve mit denselben Wendepunkten dar, welche in die drei Geraden $xyz = 0$ aufgelöst ist, wenn $\lambda = m^2$ ist. Nun sind die Invarianten 4ten und 6ten Grades von $U$

$$S = -m^4,\ T = -8m^6,$$

also ist jener Werth von $\lambda = m^2 = \frac{T}{3S}$ durch jene Invarianten dargestellt und die linke Seite der Gleichung der drei Geraden $xyz$

$$TU + 8SH = 0$$

als Covariante, wodurch die Auffindung derselben bei beliebiger Form der Gleichung ermöglicht wird. Die Zerlegung dieser Covariante wird nun noch ausgeführt. In analoger Weise führt der Verfasser die Untersuchung bei allgemeinen Curven 3ten Grades und kommt dadurch zu einer einfacheren Darstellung, als sie Salmon in den higher plane curves giebt.

Hierzu geht der Verfasser von der Gleichungsform

$$U = ax^3 + by^3 + cz^3 + 6mxyz = 0$$

aus, (in der Abhandlung steht durch einen Druckfehler $b$ statt 6); dann ist

$$H = -m^2(ax^3 + by^3 + cz^3) + (abc + 2m^3)xyz,$$
$$S = abcm - m^4,$$
$$T = a^2b^2c^2 - 20\,abc\,m^3 - 8m^6.$$

Die Gleichung $\lambda U + H = 0$ stellt die drei Geraden $xyz = 0$ dar, d. h. drei Gerade, die durch je drei Wendepunkte gehen, wenn $\lambda = m^2$ ist.

Durch Elimination von $abc$ und $m^2$ aus dieser und den Gleichungen für $S$ und $T$ ergiebt sich die Gleichung für $\lambda$

$$27\lambda^4 + 18S\lambda^2 + T\lambda - S = 0$$

zur Bestimmung der vier Werthe von $\lambda$ durch die Invarianten $S$ und $T$, wodurch die allgemeine Auffindung der Geraden, welche die Wendepunkte verbinden, ermöglicht wird. Dies wird an einem Beispiel erläutert. A.

---

D. Amanzio. Alcune proprietà delle curve di 3° e 4° ordine. Battaglini G. XIV. 48-54.

Der Pascal'sche und der Brianchon'sche Satz werden durch die bekannte Steiner'sche Verwandtschaft „verallgemeinert". (Syst. Entw. 59. I u. II.) A.

---

J.J. Walker, Nash. Solutions of a question (3369, 4254). Educ. Times XXV. 40.

Wenn die Gleichung für die 6 Tangenten, welche man von einem Punkt an eine Curve 3ten Grades $U$ ziehen kann, geschrieben ist unter der Form $VU + abc = 0$, so liegen die neun Schnittpunkte von $V$ und $U$ auf 3 Geraden, die von dem Punkte ausgehen, etc. O.

---

Moret-Blanc. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 170-174.

Der geometrische Ort der Fusspunkte der Normalen, die von einem gegebenen Punkte an eine Reihe von Ellipsen gezogen sind, welche denselben Scheitel und dieselbe Tangente haben, und für welche das Verhältniss der der gemeinsamen Tangente parallelen Axe zur zweiten gleich einer gegebenen constanten Zahl $K$ ist, ist eine Curve 3ten Grades, die einen Doppelpunkt im Scheitel hat. O.

---

RECHENBACH. Die Kreisconchoide. Pr. Bochum.

Mz.

---

GEORG SIDLER. Zur Dreitheilung eines Kreisbogens. Pr. Bern.

Die Arbeit enthält in gedrängter Kürze eine reichhaltige Angabe der verschiedenen Constructionsmethoden für die Trisection. Die hierbei verwandten geometrischen Oerter sind die Kreisconchoide, die gewöhnliche Conchoide des Nicomedes, eine Hyperbel mit dem Excentricitätsverhältniss 2, eine gleichseitige Hyperbel und eine Hypocycloide mit vier Rückkehrpunkten. Es wird gezeigt, wie man bei der Betrachtung des Problems von selbst von der einen Hülfscurve auf die andere geführt wird, z. B. durch Transformation mittelst reciproker Radien, oder durch sonst eine veränderte Anschauung, die die Figur gestattet. Ausserdem wird auch auf die gemeinsamen Eigenschaften, die den Hülfscurven in Folge ihrer Verwendbarkeit bei der Trisection zukommen, hingewiesen. Mz.

---

G. EMSMANN. Zur Theilung des Winkels. Hoffmann Z. VII. 107-113, 292.

Weitere Ausführung des Aufsatzes Grunert Arch. LVI. 335. (F. d. M. VI. 447.) H.

---

K. ZAHRADNIK. Beitrag zur Theorie der Cissoide. Grunert Arch. LX. 335-336.

Wenn die Cissoide, deren Gleichung:

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x}$$

mit Einführung des Parameters $u = \frac{x}{y}$ durch die beiden Gleichungen:

$$x = \frac{a}{1+u^2}, \quad y = \frac{a}{u+u^3}$$

ausgedrückt wird, so ist die Gleichung der Verbindungslinie zweier Punkte $u_1$ und $u_2$

$$u_1u_2(u_1+u_2)y-(1+u_1^2+u_1u_2+u_2^2)x+a=0,$$

ferner liegen vier Punkte $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ auf einem Kreise, wenn:

$$u_1+u_2+u_3+u_4=0.$$

Soll dieser Kreis die Cissoide in $u_2$ osculiren, so setze man

$$u_2=u_3=u_4=u_1.$$

Dann wird $3u+u_1=0$, also $u_1=-3u$, und die Gleichung der Krümmungssehne ist:

$$6u^3y-(1+7u^2)x+a=0.$$

Die Umhüllungscurve der Krümmungssehnen erhält man hieraus durch Differentiation nach $u$, und ihre Gleichung ist:

$$y^2=\frac{343}{243}\cdot\frac{x^3}{a-x}.$$

Diese Curve ist daher wieder eine Cissoide, und zwar zu der gegebenen affin. Mz.

---

A. Cayley. Addition to the bicircular quartic. Proc. of London XXV. 565-566.

Das Referat erfolgt nach dem Erscheinen der Arbeit in den Phil. Trans. Cly. (O).

---

F. D. Thomson. Solution of a question (4767). Educ. Times XXV. 33-35.

Die bicirculare Curve 4[ten] Grades

$$Q\equiv lr_1+mr_2+nr_3=0$$

ist die Enveloppe von Kreisen, deren Mittelpunkte auf dem Kegelschnitte

$$C\equiv\frac{l^2}{a\alpha}+\frac{m^2}{b\beta}+\frac{n^2}{c\gamma}$$

liegen, und welche den durch die Brennpunkte gelegten Kreis orthogonal schneiden. Die confocalen bicircularen Curven 4[ten] Grades schneiden sich unter rechten Winkeln. O.

---

R. Townsend. Solution of a question (4948). Educ. Times XXV. 77-78.

Bezeichnet man mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ die Entfernung eines festen Punktes $R$ von 4 concyklischen festen Punkten 1, 2, 3, 4 und mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ die eines variabeln Punkt $S$, mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ferner die Dreiecke (2 3 4), (3 4 1), (4 1 2), (1 2 3), so stellt die Gleichung

$$\alpha\varrho_1\sigma_1 - \beta\varrho_2\sigma_2 + \gamma\varrho_3\sigma_3 - \delta\varrho_4\sigma_4 = 0$$

die beiden bicircularen Curven 4ten Grades vor, welche durch $R$ gehen und deren Brennpunkte 1, 2, 3, 4 sind. O.

---

H. Résal. Construction de la tangente en un point de la quadratrice. Nouv. Ann. (2) XV. 337-339.

Die Construction wird abgeleitet aus der Methode von Roberval, Tangenten an eine Curve zu ziehen. Schz.

---

J. Wolstenholme. Solution of a question (4795). Educ. Times XXV. 17-18.

Beweis des Satzes: Der Bogen eines Cartesischen Ovals hat in einem Punkte $P$ gleiche Neigung zu der Geraden von $P$ durch einen Brennpunkt und zu dem Kreisbogen, der durch $P$ und die beiden anderen Brennpunkte geht. O.

---

Pravaz. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 228-229.

Es mögen $A$ und $B$ zwei Punkte eines Descartes'schen Ovals mit den Brennpunkten $F$ und $F'$ sein, $AF$ möge den von $F$ als Mittelpunkt mit $FB$ beschriebenen Kreis in $K$ schneiden, $AF'$ den von $F'B$ um $F'$ in $H$. Der Schnittpunkt von $FH$ und $F'K$ sei $J$. Dann geht $AJ$ stets durch einen festen Punkt, während $A$ seine Lage auf dem Oval ändert. O.

---

Philippin. Solution de la question 27. (Catalan). N. C. M. II. 89.

Ein Viereck $ABCD$, in $A$, $B$, $C$, $D$ beweglich, hat zur Symmetrieaxe die Diagonale $AC$. Die Seite $AB$ ist ferner fest. Dann ist der Ort der Schnittpunkte der Seiten $AD$ und $BC$ ein Descartes'sches Oval. Mn. (O.)

---

G. Holzmüller. Lemniscatische Geometrie. Schlömilch Z. XXI. 325-364.

Siehe Abschn. IX. Cap. 5. B.

---

J. Wolstenholme. Solution of a question (4772). Educ. Times XXV. 35-40.

Ein Kreis durch die Brennpunkte $B$ und $C$ einer rechtwinkligen Hyperbel schneide die Curve im Punkte $Q'$, die Tangente in $Q'$ an den Kreis schneide $BC$ in $O$. $OL$ sei eine zweite Tangente an den Kreis. Dann ist der geometrische Ort von $L$ eine Bernoulli'sche Lemniscate mit den Brennpunkten in $B$ und $C$. $OQ'$ ist parallel der Geraden, welche den Winkel $BLC$ halbirt. Wenn ferner $OPQ$ rechtwinklig zu $OQ$ gezogen den Kreis in $P$ und $Q$ schneidet, so ist der Ort von $P$ eine circulare Curve $3^{\text{ten}}$ Grades. Zwei Brennpunkte derselben sind $B$ und $C$, der dritte $A$ theilt $BC$ im Verhältniss von

$$(\sqrt{2}-1):(\sqrt{2}+1).$$

Ferner ist

$$(\sqrt{2}-1)CP-(\sqrt{2}+1)BP = 2AP$$

und endlich ist $QLQ'$ um einen Rechten grösser als $Q'LP$.

O.

---

K. Zahradnik. Die Kardioide. Grunert Arch. LIX. 337-351.

Siehe F. d. M. VII. p. 451.

---

A. Cayley. On a quartic curve with two odd branches. Messenger (2) VI. 107-108.

Bemerkungen über die Schnitte der Zweige einer Curve. Diese werden erläutert durch die Curve $4^{\text{ten}}$ Grades

$$(x^2-1)(y^2+1)-2mxy=0,$$

welche zwei getrennte Zweige hat. Die Curve wird gezeichnet.

Glr. (O.)

---

R. TOWNSEND. Solution of a question (4844). Educ. Times XXV. 42-43.

Die Tangente und Normale an einen Punkt einer bicircularen Curve 4ten Grades bilden gleiche Winkel mit den Paaren von Kreisen, welche den Punkt mit den entgegengesetzten Paaren einer Tetrade von concyclischen Foci der Curve verbinden.

O.

---

A. CAYLEY. Solution of a question (5079). Educ. Times XXVI. 77-78.

Die Curve

$$\{(\beta-\gamma i)^2-\delta^2\}^{\frac{1}{4}}\{(x-\beta i)^2+y^2\}^{\frac{1}{4}}+q\{(\beta+\gamma i)^2-\delta^2\}^{\frac{1}{4}}\{(x+\beta i)^2+y^2\}^{\frac{1}{4}}$$
$$=\left\{(1-q^2)\frac{\beta}{\delta}\right\}^{\frac{1}{4}}\{\beta^2-(\gamma-\delta i)^2\}^{\frac{1}{4}}\{(x-\gamma-\delta i)^2+y^2\}^{\frac{1}{4}}$$

ist eine reelle bicirculare Curve 4ten Grades mit den axialen Brennpunkten $\beta i, -\beta i, \gamma+\delta i, \gamma-\delta i$.

O.

---

R. TUCKER. Solution of a question (4582). Educ. Times XXV. 91-92.

Zieht man von einem Punkte $P$ die Tangenten $PT$, $PT'$ an eine Ellipse, so kann der Kreis $PTT'$ nicht durch die Brennpunkte, wohl aber durch den Mittelpunkt gehen. Ist letzteres der Fall, so ist die Enveloppe dieser Kreise eine Curve 4ten Grades.

O.

---

E. HARTMANN. Untersuchung einiger Curven, welche durch das Rollen von Kegelschnitten erzeugt werden. Pr. Cassel.

Der Verfasser bestimmt zunächst diejenige Curve, auf welcher ein Kegelschnitt ohne Gleitung rollen muss, damit einer seiner

Brennpunkte eine Gerade beschreibe. Als diese Curve, die er als Grundcurve bezeichnet, ergiebt sich für die Ellipse eine Wellenlinie (Sinuscurve), für die Hyperbel eine Kettenlinie, für die Parabel eine der rollenden congruente Parabel. Die Ellipse berührt ihre Grundcurve mit den beiden Scheiteln der Hauptaxe abwechselnd in einem höchsten und einem tiefsten Punkte der Welle, vollendet also eine Umwälzung von einem Wellenberg zum andern. Die Hyperbel rollt so, dass der rollende Ast die Bahn stets mit entgegengesetzter Krümmung berührt, und dass derselbe in der Mittellage mit seinem Scheitel den Scheitel der Bahn berührt. Einer vollständigen Umwälzung des Astes, bei welcher der Berührungspunkt von einem unendlich entfernten Punkt der Kettenlinie zum andern übergeht, entspricht eine Drehung der Hyperbel um 360 Grad, vermindert um den Asymptotenwinkel der Hyperbel. Die Parabel berührt ihre Grundcurve ebenfalls stets mit entgegengesetzter Krümmung und zwar so, dass in der Mittellage auch beide Scheitel zusammenfallen; die Bahn des Brennpunktes der bewegten Parabel ist, wie bekannt, die Directrix der festen, und die Drehung der Parabel beträgt bei einer vollständigen Umwälzung, während der Berührungspunkt von dem einen unendlich entfernten Punkt der festen Parabel zum andern geht, 360 Grad. Der Verfasser stellt nun noch die Gleichung der Rollcurve auf, welche bei der Abrollung eines Kegelschnittes auf seiner Grundcurve von einem beliebigen Punkte der Hauptaxe des Kegelschnittes beschrieben wird. Hierbei ist es in Bezug auf die Maxima und Minima der Curve wesentlich, ob der betrachtete Punkt der Hauptaxe auf der einen oder der anderen Seite desjenigen Brennpunktes liegt, der die Gerade beschreibt. Die Rollcurve der Scheitel erhält natürlich in den Scheiteln der Grundcurve Rückkehrpunkte. Genauer wird die Gestalt dieser Rollcurve für die Scheitel, den Mittelpunkt und den zweiten Brennpunkt insbesondere bei der Ellipse discutirt. Die Untersuchung ist fast durchweg im Wege der Rechnung geführt.

A.

H. Brocard. Roulettes de coniques. N. C. M. II. 373-384.

Ort der Brennpunkte eines Kegelschnittes, der, ohne zu gleiten, auf einer Geraden rollt. Mn. (O.)

---

E. Catalan et H. Brocard. Note sur un lieu géométrique. N. C. M. II. 75-82, 277-278.

Lösung folgender Fragen: Zu bestimmen den Ort der Berührungspunkte eines gegebenen Kegelschnittes, dessen Brennpunkte sich auf gegebenen Geraden bewegen, mit den einer der gegebenen Geraden parallelen Tangenten. Zu finden eine Curve, so dass die Länge $MN$ der Normale in $M$ zu der Entfernung $NF$ zwischen dem Fusspunkt $N$ dieser Geraden und einen festen Punkt $F$ in einem gegebenen Verhältniss stehe. Die letztere Frage führt zu interessanten Differentialgleichungen. Mn. (O.)

---

J. Neuberg. Solution de la question 113. N. C. M. II. 358.

Ein Dreieck $ABC$ mit fester Spitze $A$ dreht sich um diese Spitze mit veränderlicher Grösse, aber sich selbst ähnlich bleibend. Wenn dann die Seite $BC$ durch einen festen Punkt $D$ geht, ist die Enveloppe des dem Dreieck umschriebenen Kreises eine Pascal'sche Schneckenlinie. Mn. (O.)

---

Weitere Aufgaben und Lehrsätze über geometrische Oerter und ebene Curven von W. Godward, R. F. Davis, R. Tucker, Hart, Townsend, H. G. Day, F. D. Thomson, S. Watson, W. J. C. Miller, J. J. Walker, E. B. Elliott, R. A. Roberts, Sylvester, J. Wolstenholme, A. B. Evans, H. T. Gerrans, L. H. Rosenthal, R. W. Genese, J. L. McKenzie, Nash, R. E. Riley, Gambey, Moret-Blanc, Dewulf, W. H. Wisselink, J. Gries, H. Barthe finden sich Educ. Times XXV. 31, 43, 44, 51, 54, 68, 76, 81, 85, 93, 94, 98, 110; XXVI. 22, 32, 37, 44, 65, 73, 79, 91, 98, 100; Nouv. Ann. (2) XV. 175, 274, 275, 381, 514, 549, 551. O.

---

# Capitel 3.

## Analytische Geometrie des Raumes.

### A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

R. Lipschitz. Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface. Borchardt J. LXXXI. 295-301, C. R. LXXXII. 160-162, 218-220.

Eine Vergleichung der von Lipschitz in einem früheren Aufsatz (Borchardt J. LXXI.) und der neuerdings von C. Jordan der Pariser Academie (C. R. LXXIX.) mitgetheilten Verallgemeinerung des Euler'schen Theorems über die Krümmung einer Fläche für einen Raum von $n$ Dimensionen. Der Verfasser giebt die allgemeine Form eines zu dem Linienelement covarianten Ausdrucks an, auf welchen Jordan für eine specielle Form des Linienelementes geführt worden war. Bl.

---

R. Lipschitz. Beitrag zur Theorie der Krümmung. Borchardt J. LXXXI. 230-242.

Wenn man den Krümmungsradius $\varrho$ des Normalschnitts einer Fläche durch den Druck misst, welchen dieselbe von einem auf ihr frei (ohne Kräfte) beweglichen materiellen Punkt erfährt, und das zugehörige Variationsproblem auf den Fall eines Raumes von $n$ Dimensionen ausdehnt, in welchem der materielle Punkt sich auf einer Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen bewegt, so erhält man für die reciproken Werthe $\omega = \frac{1}{\varrho}$ der Hauptkrümmungsradien in einem gegebenen Punkt dieser Mannigfaltigkeit eine Gleichung vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad:

$$D_0 . \omega^{n-1} + D_1 . \omega^{n-2} + \cdots + D_{n-1} = 0.$$

In einer früheren Abhandlung hatte nun der Verfasser diese Gleichung und insbesondere den Quotienten $\frac{D_{n-1}}{D_0}$, den er übereinstimmend mit Kronecker als die Verallgemeinerung des Gauss'schen Krümmungsmasses ansieht, näher discutirt. Er beweist

im vorliegenden Aufsatze, dass, wenn speciell das Linienelement durch eine Summe von Quadraten darstellbar oder in eine solche transformirbar angenommen wird, für ein ungrades $n$ der erwähnte Quotient eine Invariante jener quadratischen Form, für ein grades $n$ ($>2$) die Quadratwurzel aus einer solchen ist. Eine andere Verallgemeinerung des Krümmungsmasses einer Fläche ist der von Riemann aus dem Begriff der geodätischen Linie abgeleitete Ausdruck; auch dieser besitzt die Eigenschaft der Invarianz bei Einführung neuer Veränderlichen.

Bl.

---

M. Allé. Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmasses. Wien. Ber. LXXIV. 9-38.

Durch eine Gleichung $F=0$ zwischen den $n$ Coordinaten einer „ebenen" Mannigfaltigkeit von $n$ Dimensionen werde eine nicht ebene von $n-1$ Dimensionen ausgeschieden. Dann hat bekanntlich Kronecker denjenigen Ausdruck, der die Verallgemeinerung des Gauss'schen Krümmungsmasses für $n=3$ bildet, in einem Quotienten gefunden, dessen Zähler die Hesse'sche Determinante von $F$ ist, während der Nenner durch eine Potenz der um 1 vermehrten Summe der quadrirten ersten Ableitungen von $F$ dargestellt wird. Diesen Ausdruck, der inzwischen Gegenstand mehrseitiger Erörterung gewesen ist, hat der Verfasser in der Weise abgeleitet, dass er den Gauss'schen Ausdruck für das Krümmungsmass, durch Projection der indicatorischen Linie auf eine Ebene, in einem Raum von zwei Dimensionen interpretirt, wodurch der Uebergang zu dem Falle $n=4$ in das Bereich der Anschauung gerückt wird. Bl.

---

R. Buz. Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung. (Fortsetzung). Schlömilch Z. XXI. 373-401.

Die Besprechung erfolgt, wenn der Schluss der Abhandlung vorliegt. Bl.

---

C. F. E. Björling. Ueber eine vollständige geometrische Darstellung einer Gleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen. Stockholm. Handl. XIV.

Eine Gleichung $\mathfrak{F}(\xi, \eta) = 0$ wird vollständig dargestellt durch ein geometrisches Formensystem, welches so beschaffen ist, dass jedem Werthpaare $(\xi, \eta)$ ein geometrisches Element entspricht, und umgekehrt. Aus der genannten Gleichung oder aus der Gleichung $\mathfrak{F}(x+zi, y+ui) = 0$ folgen zwei Gleichungen zwischen den vier reellen Grössen $x, y, z, u$; jene Gleichung wird also vollständig repräsentirt durch zwei Oberflächen ($x$, $y$, $z$ und $x$, $y$, $u$); beide zusammen werden eine $V$-Curve genannt. Die Ausdrücke $V$-Punkt, $V$-Gerade, $V$-Kreis u. s. w. verstehen sich dann von selbst.

Die fraglichen Oberflächen haben einige charakteristische Eigenschaften: Ihre Doppelpunkte bilden immer Doppelcurven; ihre unendlichen Curven bestehen immer aus Geraden.

Eine $V$-Gerade besteht aus zwei Ebenen. Die Bedeutung des Richtungscoëfficienten ist folgende: „Modulus" heisst die trigonometrische Tangente oder Cotangente des halben Scheitelwinkels zweier Rotationskegel, deren Axen zur $y$- und $x$-Axe parallel sind, und die von den Ebenen berührt werden; „Amplitude" heisst das Azimuth der Berührungs-Generatricen.

Die $V$-Tangente einer $V$-Curve besteht aus den Berührungs-Ebenen der beiden Flächen. Hieraus ergiebt sich die geometrische Bedeutung des Differentialquotienten $\frac{d\eta}{d\xi}$.

Die $V$-Kegelschnitte sind Flächenpaare 4ter Ordnung mit Doppelkegelschnitten. Ihre Eigenschaften und Formen werden entwickelt. (Siehe auch p. 427.) Bg.

---

R. Hoppe. Principien der Flächentheorie. Grunert Arch. LIX. 225-323. Leipzig. Koch.

In der Einleitung bespricht der Verfasser die Forderungen,

welche man an eine allseitig befriedigende Theorie der Flächen stellen müsse. Es sollen die Ausgangspunkte der Untersuchung einerseits so allgemein sein, dass nicht nur einzelne Sätze, sondern die ganze Theorie sich daraus ableiten lasse, andrerseits so zweckmässig gewählt, dass der Formelapparat auf das möglichst geringe Mass beschränkt bleibe. Damit ist gleichzeitig die Richtung, welche seine eigene Arbeit verfolgt, gekennzeichnet. Die bisherigen Bearbeitungen genügen nur nach der einen oder andern Seite hin, indem entweder bei genügend allgemeiner Basis zu grosse Weitläuftigkeit der Rechnungen, oder bei genügender Kürze der Methode zu grosse Beschränktheit in der Anwendung derselben stattfindet.

Lässt man einen Punkt $(x, y, z)$ mit zwei Parametern $(u, v)$ variiren, sodass

$$x = x(u, v);\ y = y(u, v);\ z = z(u, v)$$

ist, wodurch eine Fläche bestimmt ist, so befinden sich die bisherigen Methoden noch in Uebereinstimmung bei der Wahl der Fundamentalgrössen 1ter Ordnung, indem als solche die Gauss'schen

$$e = \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2;$$

$$f = \frac{dx}{du}\frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du}\frac{dy}{dv} + \frac{dz}{du}\frac{dz}{dv};$$

$$g = \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2$$

benutzt werden. Die Methoden gehen aber aus einander bei der Wahl der Fundamentalgrössen 2ter Ordnung. Als solche stellt der Verfasser (und dies ist der charakteristische Punkt seiner Arbeit) die Grössen auf

$$E = p\frac{d^2x}{du^2} + q\frac{d^2y}{du^2} + r\frac{d^2z}{du^2};$$

$$F = p\frac{d^2x}{du\,dv} + q\frac{d^2y}{du\,dv} + r\frac{d^2z}{du\,dv};$$

$$G = p\frac{d^2x}{dv^2} + q\frac{d^2y}{dv^2} + r\frac{d^2z}{dv^2},$$

wo $p, q, r$ durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$pt = \begin{vmatrix} \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \\ \frac{dz}{du} & \frac{dz}{dv} \end{vmatrix}; \quad qt = \begin{vmatrix} \frac{dz}{du} & \frac{dz}{dv} \\ \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \end{vmatrix}; \quad rt = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix}$$

$$t^2 = eg - f^2.$$

Den Vorzug dieser Grössen findet der Verfasser darin, „dass die theoretisch wichtigen geometrischen Eigenschaften und Bedingungen im einfachsten Connex mit den Werthen und Relationen jener sechs Grössen stehen". Die Grössen $E, F, G$ sind ebenso wie $e, f, g$ unabhängig von der Lage der Axen, und vermittelst ihrer lassen sich die Covarianten 2ter Ordnung auf je drei Covarianten 1ter Ordnung und Invarianten 2ter Ordnung zurückführen.

Auf dieser Grundlage werden nun in drei Abschnitten alle wichtigen Gegenstände der Flächentheorie aufgebaut. Der erste Abschnitt handelt von den geometrischen Beziehungen allgemeiner Flächen, und enthält namentlich die ganze Theorie der Krümmung, ferner Normalschnitte, Torsionswinkel einer Curve, Biegung und Abwickelung, Mittelpunkts- und parallele Flächen etc. Im zweiten Abschnitt werden besondere Linien und Liniensysteme auf allgemeinen Flächen untersucht, namentlich Systeme der orthogonalen und Krümmungslinien, Ableitung des Krümmungsliniensystems aus der Indicatrix, asymptotische und kürzeste Linien, orthogonale Flächensysteme, Mittelpunktsfläche in Beziehung zu den Krümmungslinien, orthogonal geodätische Liniensysteme, conforme Abbildung der Flächen auf Ebenen. Der dritte Abschnitt enthält die Anwendung der vorstehenden Theorie auf besondere Arten von Flächen, namentlich auf abwickelbare, Minimal-, Rotationsflächen und Flächen 2ten Grades, endlich auf asymptotische Flächen 3ten Grades. Am Schluss sind acht zur Besprechung gelangte Probleme der Flächentheorie mit ihren Bedingungen und den speciellen Fällen, in denen sie gelöst sind, übersichtlich zusammengestellt. Der geringe Raum, auf dem es dem Verfasser möglich wurde, so zahlreiche Gegenstände zu erledigen, ist der beste Beweis für die Zweckmässigkeit der von ihm gewählten Grundlage, durch deren allseitige Verwendbarkeit

auch die zweite der von ihm gestellten Forderungen erfüllt ist. Eine weitere Untersuchung verdiente noch die vielfach hervortretende Correspondenz der Fundamentalgrössen 1ter und 2ter Ordnung, die durch Gegenüberstellung der betreffenden Formeln noch besser zur Anschauung kommen würde, sowie der Umstand, dass und warum einzelne Partien, z. B. § 7, 8, 9 in früheren Darstellungen ein noch eleganteres Gewand tragen. Erwünscht wäre, wenigstens für die Separatausgabe, ein die Ueberschriften der Paragraphen angebendes Inhaltsverzeichniss gewesen.

Schg.

---

R. Hoppe. Geometrische Deutung der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung der Flächentheorie. Grunert Arch. LX. 65-71.

Ergänzung zu des Verfassers „Principien der Flächentheorie". Dort war in § 1 die geometrische Deutung der Fundamentalgrössen 1ter Ordnung, $e$, $f$, $g$, dahin gegeben, dass $e$ und $g$ die Quadrate, $f$ das mit dem Cosinus des Winkels zwischen den Parameterlinien multiplicirte Product der beiden Parameterlinienelemente bedeutet, jedes dividirt durch das Parameterincrement. In der vorliegenden Arbeit werden für die Fundamentalgrössen 2ter Ordnung, $E$, $F$, $G$, die Ausdrücke

$$E = \frac{t\delta_v}{\sqrt{g}\,\partial u}; \quad F = \frac{t\delta}{\partial s}; \quad G = \frac{t\delta_u}{\sqrt{e}\,\partial v}$$

abgeleitet und geometrisch interpretirt. Die Grössen $\delta$ sind Flächenwinkel, deren Kanten die Sehnen der drei Linienelemente der Curven $(v)$, $s$ und $(u)$ sind; $(v)$ und $(u)$ sind die von einem Punkte $P$ der Fläche ausgehenden Parameterlinien, $s$ eine dritte aus demselben Punkte gehende Linie. Schg.

---

R. Hoppe. Beispiel der Bestimmung einer Fläche aus der Indicatrix der Normale. Grunert Arch. LIX. 407-415.

Ergänzung zu des Verfassers „Principien der Flächentheorie". Dort war in § 25 bemerkt, dass, wenn die Richtungscosinus der

Normale ($p$, $q$, $r$) in Parametern der Krümmungslinien ($u$, $v$) gegeben seien, die Gleichungen der Fläche auf besonders einfache Weise erfolgen, nämlich, wenn $\varrho_1$ und $\varrho_2$ die Hauptkrümmungsradien sind, durch die Formel

$$x = -\int\left(\varrho_1 \frac{\partial p}{\partial u}\,\partial u + \varrho_2 \frac{\partial p}{\partial v}\,dv\right)$$

und zwei entsprechende für $y$ und $z$. Die Rechnung wird nun an dem Beispiel

$$p \pm q = \sqrt{(1 \mp u)(1 \pm v)}; \quad r = \sqrt{uv}$$

durchgeführt, indem zuerst $\varrho_1$ und $\varrho_2$, dann die Coordinaten $x$, $y$, $z$ und die Werthe der Fundamentalgrössen 2[ter] Ordnung berechnet werden, und schliesslich die Differentialgleichung der Krümmungslinien abgeleitet wird. Dabei ergiebt sich, dass die betrachtete Fläche dem von Fuchs (Borchardt J. LVIII.) behandelten Falle entspricht, und dass die vom Verfasser angewandte Methode eine bedeutende Vereinfachung der Rechnung involvirt. Schg.

---

A. Mannheim. Démonstration géométrique d'une relation due à M. Laguerre. C. R. LXXXII. 554-557.

Ist auf einer Fläche $S$ eine Curve ($a$) gezogen und bedeutet $a$ einen Punkt derselben, so möge der Winkel, den die Osculationsebene in $a$ mit der Normalen der Fläche in jenem Punkt bildet, mit $\omega$ bezeichnet sein. Bezeichnet nun $\varrho$ den Krümmungsradius von ($a$) und $\frac{ds}{r}$ die Torsion der Curve, so ist der Ausdruck

$$\frac{1}{3}\frac{d\varrho}{\varrho} + \operatorname{tg}\omega\left(d\omega - \frac{1}{3}\frac{ds}{r}\right)$$

unveränderlich für alle Curven auf der Fläche $S$, welche ($a$) in $a$ berühren. Diese Relation wird durch elegante Schlussreihen aus der Theorie der Normalienflächen (des normalies) gewonnen, von welcher Herr Mannheim bereits so zahlreiche interessante Anwendungen gemacht hat. Bedeuten nunmehr $\omega'$, $\varrho'$, $r'$ die analogen Elemente einer zweiten Curve auf $S$, welche ($a$) in $a$ berührt, so ist die Folge obiger Relation die des Herrn Laguerre:

$$\tfrac{1}{3}\frac{d\varrho}{\varrho}+\operatorname{tg}\omega\left(d\omega-\tfrac{2}{3}\frac{ds}{r}\right)=\tfrac{1}{3}\frac{d\varrho'}{\varrho'}+\operatorname{tg}\omega'\left(d\omega'-\tfrac{2}{3}\frac{ds}{r'}\right),$$

welche er 1870 in dem Bull. de la Soc. philom. veröffentlicht hat und worauf er (C. R. LXXX. s. F. d. M. VII. p. 474) den Beweis eines Theorems von Herrn Ribaucour stützt. Schn.

---

W. Spottiswoode. On multiple contact of surfaces. Quart. J. XIV. 227-255.

Der Verfasser berichtet über zwei frühere Arbeiten: On the contact of quadrics with other surfaces (Proc. L. M. S. V. 70 siehe F. d. M. VI. p. 488), welche sich auf einfache Berührungen bezieht, und „Sur les surfaces osculatrices" (C. R. LXXIX. 24, s. F. d. M. VI. p. 482), welche sich auf höhere Berührungen oder Osculationen einer Fläche $2^{ten}$ Grades mit einer gegebenen Fläche bezieht. In der vorliegenden Arbeit wird die Frage in allgemeinerer Weise betrachtet. Die Formeln für die höheren Berührungsgrade werden entwickelt und einzelne interessante Fälle mehr im Detail behandelt.

In § 1 wird der Hauptinhalt der früheren Arbeiten recapitulirt. In § 2 findet sich ein vorläufiger Ueberblick über die allgemeine Theorie der vielfachen Berührung mit Flächen $2^{ten}$ Grades. In § 3 werden die Fälle der 3-, 4-, 5- und 6-punktigen Berührung discutirt, und in § 4 die Bedingungen für die Existenz von Punkten der 4-, 5- und 6-zweigigen Einzelberührung. Der Rest der Arbeit behandelt das entsprechende Problem für Curven $3^{ten}$ Grades, und werden die Bedingungen der Möglichkeit für einfache oder 2-armige Berührung aufgestellt. Einige der numerischen Resultate werden einer späteren Untersuchung vorbehalten.

Cly (O.)

---

M. Azzarelli. Curvatura delle superficie. Acc. P. d. N. Linc. XXIX. 16-32.

Es werden bekannte Ausdrücke des Krümmungsmasses mit Hülfe von Construction und Rechnung hergeleitet und auf Flächen $2^{ten}$ Grades angewandt. H.

---

H. M. Taylor. On the lines of curvature of a surface. Messenger (2) V. 186-188.

Wenn eine Oberfläche so beschaffen ist, dass man durch eine einfache geometrische Betrachtung eine der Krümmungslinien in einem Punkte finden kann, so kann man die andere mit grosser Leichtigkeit daraus bestimmen, dass die Elemente der beiden Linien in der Tangentialebene liegen, welche an die Fläche in dem Punkte gelegt ist, und rechte Winkel mit einander bilden. Die allgemeine Lösung wird gegeben. Als Beispiel entwickelt der Verfasser die Differentialgleichung der Projection auf die $xy$-Ebene für die Schaaren von Krümmungslinien auf derjenigen Oberfläche, welche alle Kugeln umhüllt, deren Mittelpunkte auf der Parabel

$$x^2+4ay=0,\ z=0,$$

die durch den Coordinatenanfangspunkt geht, liegen.

Glr. (O.)

---

Ch. Brisse. Sur une formule de la théorie des surfaces. Bull. S. M. F. IV. 96-98.

Ableitung einer Formel von Laguerre für die Krümmungsradien der sich in einem Element berührenden Curven einer Oberfläche. Bl.

---

F. Caspary. Krümmungsmittelpunktsfläche des elliptischen Paraboloids. Borchardt J. LXXXI. 143-192.

Siehe F. d. M. VII. p. 497-506. A.

---

P. Simon. Ueber Flächen mit constantem Krümmungsmass. Diss. Halle.

Nach einigen einleitenden Bemerkungen über die bisher bekannten Partikularlösungen des Problems, nimmt der Herr Verfasser mit der Differentialgleichung, welche die betreffenden Flächen charakterisirt, mehrere Umformungen vor, um aus diesen

neue Partikularlösungen zu erhalten. Er geht hierzu zunächst von dem Ausdruck des Krümmungsmasses in $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ aus, und setzt

$$u = p\iota \cos\theta + q\iota \sin\theta - z.$$

Alsdann lassen sich die Coordinaten durch $u$, $\iota$ und $\theta$ ausdrücken, und die Differentialgleichung, welche ausdrückt, dass das Krümmungsmass constant $= \frac{1}{x^2}$ ist, geht über in

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \iota \frac{\partial u}{\partial \theta}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \iota^2} - \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \iota \partial \theta} - \frac{1}{\iota}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right]^2 = \frac{x^2 \iota^2}{(1+\iota^2)^2}.$$

Kennt man also ein Integral dieser letzteren, so hat man $x$, $y$, $z$ als Functionen von $\iota$ und $\theta$ dargestellt, und der Ort des Punktes $xyz$ ist eine Fläche mit constantem Krümmungsmass.

In ähnlicher Weise werden auch Umformungen mit dem Gauss'schen Ausdruck für das Krümmungsmass vorgenommen, wie das auch von Enneper geschehen ist, und es werden so Formen gewonnen, die sich leicht in die Enneper'schen überführen lassen.

Es wird darauf der von Weingarten aufgestellte Satz entwickelt, wonach die Krümmungsmittelpunktsflächen aller derjenigen Flächen, bei welchen ein Hauptkrümmungsradius eine Function des andern ist, auf einander abwickelbar sind. Hieraus folgt durch die specielle Annahme $\varrho' = -\frac{1}{\varrho}$, dass die Krümmungsmittelpunktsflächen aller Flächen mit constantem negativem Krümmungsmass auf die Schraubenfläche abwickelbar sind, so dass die Aufsuchung von Flächen, die diese letztere Eigenschaft besitzen, zugleich das gestellte Problem lösen würde. Diese Untersuchung wird zur Auffindung einiger Specialfälle benutzt. Darauf sucht der Herr Verfasser Speciallösungen mit positivem Krümmungsmass unter Benutzung der oben erwähnten Umformungen. Hierbei ergeben sich unter andern auch die von Herrn Enneper in seinen analytisch-geometrischen Untersuchungen (Göttinger Nachr. 1868 — Referat F. d. M. I. 227) und von Herrn Kretschmer (Pr. Frankfurt a. O. 1871 — Referat F. d. M. III. p. 359)

aufgestellten Sätze über Flächen mit einem System von ebenen Krümmungslinien. (Siehe das folgende Referat.)

Sodann bespricht der Herr Verfasser eine Relation zwischen Parallelflächen und namentlich den leicht zu erweisenden Satz: Zu jeder Fläche mit constantem Krümmungsmass $\frac{1}{k^2}$ giebt es im Abstande $k$ eine Parallelfläche mit constanter mittlerer Krümmung $\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho_1}\right)=\frac{1}{k}$. Dieser Zusammenhang kann zur Auffindung von Flächen der letztern Art dienen, welche in der Capillarität bekanntlich von Wichtigkeit sind. Der Herr Verfasser bemerkt schliesslich, dass man die Lagrange'sche Methode der Variation der Constanten auf die genannten Flächen anwenden kann, um allgemeinere Lösungen zu erhalten, führt diese Rechnung auch in einem Falle durch, erhält aber freilich als Resultat eine imaginäre Fläche. A.

---

A. Enneper. Bemerkungen über einige Flächen mit constantem Krümmungsmass. Gött. Nachr. 1876. 597-619.

Die Bemerkungen beziehen sich zum grössten Theil auf die Arbeiten von Simon und Kretschmer (vgl. das vorhergehende Referat). Der Herr Verfasser behauptet, dass die neuen Lösungen, welche in jenen Arbeiten enthalten sind, nur scheinbar von den früher vom Verfasser selbst aufgestellten unterschieden sind. Namentlich weist er einen Einwurf zurück, der von Kretschmer und nach ihm von Simon gegen den Satz erhoben ist, den der Herr Verfasser selbst früher aufgestellt hatte, nämlich: „Ist bei einer Fläche mit constantem Krümmungsmass ein System von Krümmungslinien eben, so schneiden sich die Ebenen sämmtlich in einer Geraden.“ Hiergegen hatte Herr Kretschmer geltend gemacht, dass man zu jeder beliebigen Raumcurve Flächen finden könnte, deren eines System von Krümmungslinien Kreise sind, welche in den Schmiegungsebenen jener Raumcurve liegen, und auch Herr Simon behauptet, solche Flächen dargestellt zu haben.

Herr Enneper reproducirt und vervollständigt nun den früher

aufgestellten Satz folgendermassen: „Ist für eine Fläche von constantem positivem oder negativem Krümmungsmass ein System von Krümmungslinien plan, so gehen die Ebenen des Systems sämmtlich durch eine feste Gerade *T*. Das zweite System von Krümmungslinien ist dann sphärisch, die osculatorische Kugelfläche jeder Linie dieses Systems schneidet die Fläche orthogonal. Die Mittelpunkte sämmtlicher Kugelflächen liegen auf der Geraden *T*"; und umgekehrt: „Ist für eine Fläche von constantem Krümmungsmass ein System von Krümmungslinien sphärisch und schneiden die osculatorischen Kugelflächen die Fläche orthogonal, so ist das zweite System plan, die Ebenen des zweiten Systems schneiden sich in einer Geraden *T*, auf welcher die Mittelpunkte der osculatorischen Kugelflächen liegen."

Der Beweis dieser Sätze wird ebenfalls reproducirt, und zwar unter Bezugnahme auf frühere Publikationen des Herrn Verfassers.

Der Widerspruch, welcher zwischen diesen Resultaten und denen des Herrn Kretschmer liegt, scheint sich daraus zu erklären, dass die von Herrn Kretschmer gefundenen Flächen sich auf Kugeln reduciren; denn da auf einer Kugel jede Curve als Krümmungslinie angesehen werden kann, so kann man auch sagen, dass sie von jeder Ebenenschaar in Krümmungslinien geschnitten wird. Dieser singuläre Fall scheint von Herrn Enneper ausgeschlossen, von Herrn Kretschmer nicht erkannt zu sein.

Der Herr Verfasser zeigt nun, dass die drei verschiedenen Fälle, welche Herr Simon in seiner Dissertation behandelt, auf einen herauskommen; er giebt dann eine eingehendere Entwicklung der Formeln.

Ueber die Resultate des Herrn Simon, die Variation der Constanten betreffend, bemerkt Herr Enneper, dass sie in etwas anderer Form bereits von Herrn Serret vor längerer Zeit publicirt seien.

Im Ganzen aber spricht er die Ansicht aus, dass es nothwendig schiene, andere Wege einzuschlagen, um das Problem der constant gekrümmten Flächen zu fördern, namentlich dadurch,

dass man es durch Hinzufügung geometrischer Bedingungen bestimmter macht. A.

---

G. HALPHÉN. Théorème concernant les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation. Bull. S. M. F. IV. 94-96.

Die partielle Differentialgleichung 3[ter] Ordnung, der alle Flächen genügen, deren Hauptkrümmungsradien in jedem Punkt durch eine Relation verbunden sind, interpretirt der Verfasser in folgender Weise: Sei ($M$) eine solche Fläche, seien $m$, $\mu$ die einem Punkt von ($M$) entsprechenden Hauptkrümmungscentra. Dann ist das Produkt der vier Hauptkrümmungsradien der von den Punkten $m$, $\mu$ gebildeten Centra-Fläche in den beiden associirten Punkten $m$, $\mu$ constant gleich der 4[ten] Potenz der Distanz dieser Punkte. Bl.

---

O. SCHLÖMILCH. Ueber Flächen von gegebenen Eigenschaften. Schlömilch Z. XXI. 75-79.

Es wird die Aufgabe behandelt, eine Fläche darzustellen, deren Neigung gegen die $xy$-Ebene eine gegebene Function von $x, y$ ist. Die Bedingungsgleichung

$$(2)\qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = [\psi(x,y)]^2$$

führt nach gewöhnlichem Integrationsverfahren auf die simultanen Gleichungen

$$dy = tg\omega dx;\ d\omega = \left(\frac{\partial \log\psi}{\partial y} - \frac{\partial \log\psi}{\partial x}\, tg\omega\right) dx,$$

wo $\omega$ das Azimut der Normale bezeichnet; nach ihrer Integration durch $\varphi(x, y, \omega) = c$; $\Phi(x, y, \omega) = C$ wird $\omega$ durch das vollständige Integral $\Phi = F(\varphi)$ bestimmt, und die Gleichung der Fläche lautet:

$$z = \int(\psi\cos\omega\, dx + \psi\sin\omega\, dy)$$

Ein Beispiel, wo jene Integration sich ausführen lässt, bietet der Fall

$$\psi = \frac{h}{Ax+By}$$

dar. Ebenso wie Gleichung (2) kann man auch die durch Substitution $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ hervorgehende Differentialgleichung behandeln. Zur speciellen Betrachtung wird der Fall gewählt, wo $\psi$ nur von $r$ abhängt, und besonders der Fall $\psi = \frac{r}{a}$ hervorgehoben, wo die Integration der simultanen Gleichungen auf die Lemniscatengleichung führt. H.

---

H. W. L. Janner. On the differential equations of some families of surfaces. Messenger (2) VI. 120-131.

Die gewöhnliche Methode zur Gewinnung dieser Gleichungen ist indirect. Zuerst wird ein System von Gleichungen gebildet, welches durch eine passende Bestimmung der willkürlichen Grössen auf die Gleichung einer speciellen Fläche der Gruppe reducirt werden kann. Die Elimination der willkürlichen Grössen durch Differentiation giebt die Differentialgleichung und die Gleichungen der Oberflächenfamilie. In der vorliegenden Arbeit werden die Differentialgleichungen direct abgeleitet aus den Eigenschaften, durch welche die Gruppe von Flächen definirt wird. Es werden einige Beispiele gegeben für das umgekehrte Problem, nämlich die Eigenschaften einer Flächengruppe zu finden, deren Differentialgleichungen gegeben sind. Es ist das eine geometrische Integration des Systems von Gleichungen.

Die Arbeit ist in vier Theile getheilt. 1) Rollflächen, Gleichungen $1^{\text{ter}}$ Ordnung. 2) Rollflächen, Gleichungen der $2^{\text{ten}}$ Ordnung. 3) Rollflächen im Allgemeinen. 4) Andere Oberflächen, Linien mit der Krümmung Null. Glr. (O.)

---

P. Mansion. On the partial differential equation of ruled surfaces. Messenger (2) VI. 45-48.

Neue Methode zur Integration der partiellen Differential-

gleichung, die entsteht durch Elimination von $\omega$ zwischen den Relationen

$$\omega^2 \frac{d^2z}{dx^2} + 2\omega \frac{d^2z}{dxdy} + \frac{d^2z}{dy^2} = 0$$

$$\omega^3 \frac{d^3z}{dx^3} + 3\omega^2 \frac{d^3z}{dx^2dy} + 3\omega \frac{d^3z}{dxdy^2} + \frac{d^3z}{dy^3} = 0.$$

Es giebt zwei Fälle. Im einen ist $\frac{d\omega}{dx} + \frac{d\omega}{dy} = 0$, im andern $r\omega + s = 0$. Glr. (O.)

---

Ch. Hermite. Sur les cartes topographiques. C. R. LXXXII. 326-329.

Der Verfasser schlägt vor 1) die Horizontalen (Linien gleichen Niveaus) in der Kartenzeichnung nur für solche Terrainabschnitte zu verwenden, bei denen die Neigung 14 Grad nicht überschreitet; 2) dagegen die mit grösseren Unebenheiten behafteten Gegenden darzustellen durch ihre Gratlinien und Gipfel, ihre Thallinien und durch eine besondere Art Linien (lignes de raccordement), d. h. Linien plötzlicher Neigungsänderung; 3) die Höhen auszudrücken durch Punkte auf diesen Linien, die gleiche Niveauunterschiede haben, also durch die Schnittpunkte dieser Linien mit der Horizontalen; endlich 4) durch äusserst feine Schraffirungen die Illusion des Reliefs hervorzurufen.

Der Winkel von 14 Grad entspricht erfahrungsgemäss den grössten Neigungen, wie sie im Mergel und Thonboden vorkommen, und für welche noch geordnete taktische Bewegungen militärischer Abtheilungen ausführbar sind. Es ist deshalb von praktischem Nutzen, dass sich dies Terrain von dem zerrissenen Gebirgsterrain bei der vorgeschlagenen Darstellungsweise deutlich abhebt. Einen weiteren Vortheil aber sieht der Verfasser darin, dass diese Darstellung der Gebirge ohne eine Vergrösserung des Massstabes ein viel deutlicheres Bild giebt, als die Horizontalen, welche in den Thallinien sehr scharfe Winkel bilden und auf den französischen Generalstabskarten bei einem Massstabe von 1:8000 und der festgesetzten Niveaudifferenz bei einer Neigung von 33°—35°, wie sie bei Thalwänden durchschnittlich vorhanden

ist, so eng an einander gezogen werden müssen, dass sechs auf ein Millimeter kommen; dagegen ist die Neigung der Thallinie selten grösser als 3 Grad, und fast nie grösser als 6 Grad, so dass auf ihr die Niveaupunkte sehr wohl angegeben werden können.

Die Linien plötzlicher Neigungsänderung werden an der Grenze zweier Gesteinsarten von verschiedener geologischer Widerstandsfähigkeit, an den Stellen, wo einzelne Felsklippen hervorragen, an den oberen und unteren Thalrändern auftreten, ebenso als Begrenzung eines Plateaus oder der Gipfelfläche eines Berges, ferner als Spuren vergangener Terrainverhältnisse z. B. alter Wasserläufe auf später verworfenen Schichten u. dgl. Der Wechsel im Steigen und Fallen der Gratlinien und der Linien plötzlicher Neigungsänderung, so wie der Strassen wird durch die darauf verzeichneten Niveaupunkte erkennbar. Die Richtung des Abhanges kann für Strassen und Linien plötzlicher Neigungsänderung dadurch angegeben werden, dass man die Niveaupunkte auf der einen oder der andern Seite jener Linien anbringt.

A.

---

A. Cayley. On the flexure of a spherical surface. Messenger (2) VI. 88-90.

Es ist bekannt, dass eine undehnbare sphärische Fläche oder, um die Begriffe zu fixiren, das sphärische Viereck, welches zwischen zwei Meridianen und Parallelkreisbogen liegt, so gebogen werden kann, dass es Theil einer Rotationsfläche wird, und die Meridiane und Parallelkreise der sphärischen Fläche Meridiane und Parallelkreise der neuen Fläche sind, und weiter, dass der Radius jedes Parallels der sphärischen Fläche in der neuen Fläche verändert wird in dem Verhältniss von $k$ zu $l$. In der vorliegenden Arbeit wird diese Deformation der sphärischen Fläche für die beiden Fälle $k < l$ und $k > l$ betrachtet.

Glr. (O.)

---

A. Fais. Nota intorno ad alcune formole e proprietà delle curve gobbe. Battaglini G. XIV. 219-240.

Es werden zunächst die bekannten Formeln für ein Curven-

element des geometrischen Ortes der Krümmungsmittelpunkte einer Raumcurve, für den Winkel, welchen dasselbe mit der Hauptnormalen bildet, für die Entfernung des Krümmungsmittelpunktes von dem Centrum der Schmiegungskugel, den Radius derselben, ein Curvenelement des geometrischen Ortes dieser Centra und den Krümmungsradius desselben auf mehrfache Weise durch einfache geometrische Betrachtungen abgeleitet. Diese Formeln werden dann angewendet auf eine Schraubenlinie $A$, welche auf einem Cylinder mit beliebigem Normalschnitt aufgewickelt ist, insbesondere zur Untersuchung der Frage, wann die Curve der Centra der Schmiegungskugeln, welche in diesem Falle selbst eine cylindrische Schraubenlinie $A_1$ ist, in einem beliebigen Punkte gleichen Krümmungsradius hat wie die Grundcurve $A$ in dem entsprechenden Punkte. Der Herr Verfasser gelangt zu dem Resultat, dass dies der Fall ist, wenn der Normalschnitt des Cylinders der gegebenen Schraubenlinie $A$ eine Kreisevolvente ist. Die Beziehungen dieser beiden Schraubenlinien und ihrer Cylinder werden erörtert, und ferner die erst erwähnten Formeln noch auf sphärische Curven und auf Curven constanter Krümmung angewendet.

Schz.

---

E. Catalan. Quelques théorèmes sur la courbure des lignes. N. C. M. II. 178.

Verschiedene Formeln, unter denen sich folgende auszeichnet. Die Krümmungsradien $A$, $B$, $C$ der Projectionen einer Curve $L$ auf drei rechtwinklige Ebenen sind so beschaffen, dass

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\sin^6\alpha}{A^2} + \frac{\sin^6\beta}{B^2} + \frac{\sin^6\gamma}{C^2},$$

wo $\varrho$ der Krümmungsradius von $L$, und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel der Tangente an $L$ in dem betrachteten Punkte mit den Axen sind.

Mn. (O.)

---

Biehringer. Ueber Curven auf Rotationsflächen. Schlömilch Z. XXI. 229-264.

Die in derselben Zeitschrift XVIII. 532 begonnene, in F. d. M. V. 411 besprochene Discussion wird fortgesetzt, dann die erhaltenen Formeln auf die Bestimmung der Bahn eines Punktes ohne äussere Kräfte auf der rotirenden Erdoberfläche, namentlich mit Bezugnahme auf den Wind, angewandt. H.

---

## B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

L. SALTEL. Mémoire sur de nouvelles lois générales qui régissent les surfaces à points singuliers. Mém. in 8°. de Belg. XXVII.

Die Einleitung enthält verschiedene Bemerkungen über fehlerhafte Verallgemeinerungen von Sätzen über ebene Curven, die man nicht auf Oberflächen ausdehnen kann, weil diese nicht nur vielfache Punkte, sondern auch vielfache Linien haben. Ein einleitendes Capitel beschäftigt sich mit dem Studium der zweiten argesischen Transformationen für Curven und Flächen (siehe F. d. M. V. 423-425). Diese Transformationen sind so beschaffen, dass zwischen den Coordinaten der Punkte der beiden Figuren die Relationen $xx' = yy' = zz' = uu'$ existiren, wobei es sich um Punkt- oder Tangenten-Coordinaten handelt. Die Transformirte einer Oberfläche von der Ordnung $m$ mit vier vielfachen Punkten von den Ordnungen $a$, $b$, $c$, $d$ ist eine Oberfläche der Ordnung $m'$ mit denselben vielfachen Punkten von den Ordnungen $a'$, $b'$, $c'$, $d'$. Man hat:

$$m'-m = a'-a = b'-b = c'-c = d'-d = 2m-(a+b+c+d).$$

Man kann die Oberflächen, welche unter einander argesische Transformirte sind, in eine Gruppe vereinigen. Das folgende Capitel behandelt einfache Punkte, die drei Oberflächen mit $p$ gemeinschaftlichen vielfachen Punkten gemeinsam sind. Zwei vielfache Punkte $A$ und $B$ von der Ordnung $a$, $b$, die zu einer Oberfläche von der Ordnung $m$ gehören, bilden eine Combination der Ordnung $r_{ab} = (a+b-m)$. Fundamentaler Hülfssatz: „Wenn eine

Oberfläche von der Ordnung $m$ zwei vielfache Punkte von der Ordnung $a$, $b$ hat, die eine positive Combination $r_{ab}$ bilden, so ist die Gerade $AB$ für diese Oberfläche eine vielfache Linie von der Ordnung $r_{ab}$". Lehrsatz: „Wenn drei Oberflächen, die allgemeinsten ihrer Art von der Ordnung $m_1$, $m_2$, $m_3$ drei gemeinsame vielfache Punkte $A$, $B$, $C$ von der Ordnung

$$(a_1\ a_2\ a_3)\ (b_1\ b_2\ b_3)\ (c_1\ c_2\ c_3)$$

haben, die drei positive Combinationen

$$(r_{a_1b_1},\ r_{a_2b_2},\ r_{a_3b_3})(r_{b_1c_1},\ r_{b_2c_2},\ r_{b_3c_3})(r_{a_1c_1},\ r_{a_2c_2},\ r_{a_3c_3})$$

bilden, so ist die Zahl der einfachen den drei Oberflächen gemeinsamen Punkte gleich

$$m_1\ m_2\ m_3 - a_1\ a_2\ a_3 - b_1\ b_2\ b_3 - c_1\ c_2\ c_3 + r_{a_1b_1}.r_{a_2b_2}.r_{a_3b_3} + r_{b_1c_1}.r_{b_2c_2}.r_{b_3c_3} + r_{c_1a_1}.r_{c_2a_2}.r_{c_3a3}\text{“}.$$

Man beweist diesen Lehrsatz, indem man die Ordnung und die Eigenschaften der Schnittcurve zweier der Flächen und dann die Zahl der Schnittpunkte dieser Curve mit der dritten sucht. Es werden die Fälle, wo die Zahl der positiven Combinationen kleiner als 4 ist, wo die Zahl der vielfachen Punkte gleich 4 ist und wo die Zahl $\mu$ grösser ist als 4, aber durch eine argesische Transformation reducirt werden kann, untersucht. Capitel 3 enthält nur Anwendungen des vorhergehenden Satzes, namentlich zur Bestimmung der Classe einer Fläche. Das letzte Capitel behandelt folgendes Problem: „Eine Fläche von gegebener Ordnung besitzt $\mu$ vielfache Punkte und ist die allgemeinste ihrer Art; es soll die Zahl der einfachen Punkte, die man mit diesen vielfachen Punkten verbinden muss, um sie zu finden, bestimmt werden". Der Verfasser löst dieses Problem in sehr geschickter Weise für den Fall $\mu = 1, 2, 3, 4$, wie für den vorhergehenden Fall, und spricht für den Fall, wo $p > 4$, ein allgemeines Resultat als sehr wahrscheinlich aus. Schliesslich wird an Alle, welche sich mit abzählender Geometrie beschäftigen, die Frage gerichtet, ob die Lösungen der drei Fragen schon vor 1870 von andern Geometern gefunden seien. Mn. (O.)

Th. Reye. Ueber Systeme und Gewebe von algebraischen Flächen. Borchardt J. LXXXII. 1-21.

Wenn man die Coefficienten in der Gleichung einer algebraischen Fläche $n^{ter}$ Ordnung $F^n$ oder $n^{ter}$ Klasse $\Phi^n$ als die Coordinaten der Fläche bezeichnet, so ist durch $p$ homogene von einander unabhängige Gleichungen zwischen diesen Coordinaten im Allgemeinen eine mehrfach unendliche Mannigfaltigkeit von Flächen bestimmt, die im Falle von Punktcoordinaten ein $F^n$-System, im Falle von Ebenencoordinaten ein $\Phi^n$-Gewebe von $N(n)-p^{ter}$ Stufe heissen soll (wo

$$N(n) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} - 1$$

ist). Ein solches System heisst vom $g^{ten}$ Grade, wenn es mit einem linearen, d. h. durch lineare Gleichungen zwischen den Flächencoordinaten definirten $F^{(n)}$-Systeme $N(n)-p^{ter}$ Stufe im Allgemeinen $p$ einzelne Flächen gemein hat. Die nähere Betrachtung solcher Systeme und Gewebe, besonders der linearen und der mehreren gemeinsamen Gebilde, die manche Analogien mit Flächen und ihren Schnitten zeigen, bildet den Gegenstand der vorliegenden Arbeit, in der auch noch die projectivische Beziehung von zwei Systemen oder Geweben hergestellt ist. Indem wir bezüglich der grossen Zahl von einzelnen Sätzen auf die Abhandlung selbst verweisen müssen, wollen wir noch zwei Begriffe anführen, die in ihr, ausser den obigen, neu gebraucht sind. Ist symbolisch $a_x^n = 0$ die Gleichung einer Fläche $n^{ter}$ Ordnung $F^n$, und $\xi_\alpha^n = 0$ die einer Fläche $n^{ter}$ Klasse $\Phi^n$, so soll gesagt werden „$\Phi^n$ ruhe oder stütze sich auf $F^n$" oder umgekehrt „$F^{(n)}$ stütze oder trage $\Phi^n$", wenn die symbolische Gleichung $a_\alpha^n = 0$ besteht. Solche Flächen hatte Reye früher zu einander apolar genannt (Borchardt J. Bd. LXXVIII. p. 97, Bd. LXXIX. p. 159, F. d. M. VI. p. 478), während für Curven Rosanes den Ausdruck „conjugirt" und Lindemann den „vereinigt liegen" gebraucht hatten.
Lth.

TH. REYE. Ueber lineare Systeme und Gewebe von Flächen zweiten Grades. Borchardt J LXXXII. 54-84.

Indem wir bezüglich der Begriffe auf das vorstehende Referat über die Arbeit desselben Autors „über Systeme und Gewebe von algebraischen Flächen“ verweisen, beschränken wir uns bei der reichen Fülle von einzelnen Sätzen auf eine summarische Inhaltsangabe der grösseren Abtheilungen.

Zuerst werden $F^2$ Systeme betrachtet, niedrigeren Grades, die Analogien mit Curven und Flächen $2^{ten}$ und $3^{ten}$ Grades zeigen, wenn man die Flächencoordinaten durch Punktcoordinaten ersetzt. Dann folgt die Aufzählung der $F^2$ Systeme und der dual entsprechenden $\Phi^2$ Gewebe, deren Flächen singulär sind, mit Angabe des Grades der Mannigfaltigkeiten, und zwar sowohl wenn die singulären Elemente beliebig sind, als auch wenn sie Nebenbedingungen erfüllen müssen. In den folgenden Paragraphen werden die linearen $F^2$ Systeme $p^{ter}$ Stufe und die linearen $\Phi^2$ Gewebe $8-p^{ter}$ Stufe für $p = 8, 7, 6, 5, 4$ näher betrachtet, wobei von den früher von Reye eingeführten Begriffen „Polfünfeck“, und Polsechseck“ vielfacher Gebrauch gemacht und eine „cubische Polcurve“ einer $\Phi^2$ neu definirt wird. Lth.

H. G. ZEUTHEN. Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques. Clebsch Ann. X. 446-546.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5 B. p. 365.

EM. WEYR. Weitere Bemerkungen über die Abbildung einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung auf einen Kegelschnitt. Wien. Ber. LXXIII. 203-220.

Die directe geometrische Beziehung der Raumcurve auf einen Kegelschnitt wird zur Ableitung einiger weiteren Eigenschaften über besondere Schmiegungsebenen, Trisekanten etc. der Curve benutzt. Nr.

J. Wolstenholme. Solution of a question (5080). Educ. Times XXVI. 83-86.

Die Coordinaten *xyz* einer Curve sind 3 gegebenen Functionen $3^{ten}$ Grades eines Parameters proportional. Es wird die Existenz des Knotens bewiesen, seine Lage als Function der Coefficienten ausgedrückt, und die Methode auf beliebige unicursale Curven ausgedehnt. O.

---

## C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

O. Hesse. Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. Revidirt und mit Zusätzen versehen von Dr. S. Gundelfinger. III. Aufl. Leipzig. Teubner.

Auf Wunsch der Frau Professor Hesse hat Herr Professor Gundelfinger nach dem Tode des Verfassers die neue Auflage des klassischen Werkes seines Lehrers besorgt. Er hat das Buch im Wesentlichen in der Gestalt gelassen, die ihm Hesse in der $2^{ten}$ Auflage gegeben hatte, und nur die Vorlesungen über die Focalcurven und über die Kreisschnitte zum Theil umgearbeitet, die in ihrer früheren Gestalt Manches zu wünschen übrig liessen. Der Herausgeber hat vier Supplemente neu hinzugefügt, die weiteren Ausführungen der Lehre von der Transformation quadratischer Formen auf Grund der neueren Arbeiten gewidmet sind. Das I. und II. Supplement geben die Zerlegung einer Form in eine Summe von Quadraten und nach Beweis des Trägheitsgesetzes die darauf zu basirende Eintheilung der Flächen $2^{ter}$ Ordnung und ihrer ebenen Schnitte. Neben der vorgetragenen Darboux'schen Methode der Zerlegung, die noch willkürliche Parameter einschliesst, hätte Referent hierbei gerne die einfachste und für die praktische Ausführung wohl zumeist passende erwähnt gefunden. Im III. und IV. Supplement giebt der Herausgeber eine Darstellung der Weierstrass'schen Theorie der gleich-

zeitigen Transformation zweier quadratischen Formen, und leitet daraus nicht nur das Verhalten von zwei Flächen gegeneinander ab im Zusammenhange mit den Eigenschaften ihrer simultanen Invarianten, sondern auch die 13 verschiedenen Gestalten der Schnittcurve beider Flächen, indem er sie den möglichen Combinationen der Elementartheiler der Determinante zuordnet, wie dies zuerst von Killing in seiner 1872 zu Berlin erschienenen Inauguraldissertation geschehen ist. Lth.

---

P. Cassani. Intorno ad un teorema del signor E. Lucas. Battaglini G. XIV. 347-351.

Es werden in dieser Arbeit einige weitere Betrachtungen an das vier Kreise in der Ebene betreffende Theorem von Lucas geknüpft, das lautet: Errichtet man in den Centren von vier Kreisen Lothe zu ihrer Ebene, die resp. den Potenzen irgend eines Punktes der Ebene in Bezug auf die vier Kreise proportional sind, so bestimmen die Endpunkte dieser Lothe ein Tetraeder von constantem Inhalt. Nach diesen Erörterungen folgt eine allgemeine Bemerkung. Bezeichnet man nämlich mit $C_1$, $C_2, \ldots$ geometrische Oerter, deren Gleichungen $p$ nothwendige Coefficienten enthalten, so erhält man stets durch Elimination der variablen Terme aus $p+1$ solchen Gleichungen eine Identität, und daher sind $p+1$ derartige Orte nicht von einander unabhängig, sondern einer ist linear durch die übrigen ausdrückbar. Mz.

---

F. Aschieri. Sulle superficie gobbe di 2[do] grado rappresentato in coordinate di rette. Rend. d. Ist. Lomb. (2) IX. 222-227.

---

G. v. Escherich. Flächen zweiter Ordnung mit einer Symptosenaxe. Grunert Arch. LX. 22-43.

Der gegenseitige Durchschnitt zweier Flächen 2[ter] Ordnung ist eine Raumcurve 4[ter] Ordnung, welche in besonderen Fällen

aufgelöst sein kann in zwei Kegelschnitte. Die beiden Durchschnittspunkte dieser Kegelschnitte sind die Punkte, in denen sich die beiden Flächen berühren. Fallen noch specieller die beiden Kegelschnitte in einen einzigen zusammen, so berühren sich die Flächen längs des Kegelschnittes. (Eine andere Specialisirung ist, dass einer der beiden Kegelschnitte oder beide in zwei Gerade zerfallen). Es können nun die Durchschnittspunkte dieser beiden Kegelschnitte imaginär werden, es können ferner die Punkte eines der beiden Kegelschnitte oder beider ganz imaginär werden, während die Ebenen der Kegelschnitte reell bleiben, es können endlich die Ebenen der Kegelschnitte imaginär werden u. s. w.

Es ist nun der Zweck der vorliegenden Abhandlung, die gegenseitige Lage der Flächen 2ten Grades unabhängig von diesen Gebilden, die entweder reell oder imaginär sein können, zu betrachten, also gewisse geometrische Eigenschaften von allgemeinem Charakter aufzusuchen, welche auf alle Fälle gleichmässig Anwendung finden.

Der Verfasser nennt demgemäss, nach einem Vorschlage von Chasles, eine Symptosenebene zweier Flächen 2ter Ordnung eine Ebene, welche die Eigenschaft besitzt, dass die Polarebenen eines jeden ihrer Punkte in Bezug auf beide Flächen sich in einer Geraden schneiden, die ebenfalls der Ebene angehört, und eine Symptosenaxe nennt er eine Gerade, deren jeder Punkt bezüglich beider Flächen dieselbe Polarebene hat.

Diese Definitionen sind identisch mit denen der Ebene eines zwei Flächen gemeinsamen Kegelschnittes und der Durchschnittslinie zweier solcher Ebenen.

Mit Hülfe dieser Definitionen und einfacher geometrischer Betrachtungen wird nun die Discussion durchgeführt, und es werden noch einige weitere Folgerungen daran geknüpft, z. B. solche, die sich auf drei Flächen mit einem gemeinsamen Kegelschnitt beziehen, u. dgl. A.

E. W. Hyde. To fit together two or more quadrics so that their intersections shall be plane. Analyst III. 97-99.

Aufstellung der Bedingungen, die erfüllt werden müssen, damit der Schnitt zweier Flächen 2ten Grades eben sei.

Glr. (O.)

---

Geiser. Zum Hauptaxenproblem der Flächen zweiten Grades. Borchardt J. LXXXII. 47-54.

Herr Kummer hat zuerst bewiesen, dass die Discriminante derjenigen cubischen Gleichung, von welcher die Hauptaxen einer Fläche zweiten Grades abhängen, in eine Summe von Quadraten zerlegt werden kann. In der vorliegenden Arbeit wird ein eigenthümlicher Beweis für dieselbe Behauptung geführt, welcher darauf beruht, dass das Problem zu einem anderen in Beziehung gesetzt wird, wodurch die Möglichkeit jener Zerlegung aus geometrischen Gründen erkannt wird.

Dieses andere Problem ist die Aufsuchung des geometrischen Ortes für alle die Punkte $xyz$, von welchen aus ein Rotationskegel einem gegebenen Ellipsoide (oder einer andern centrischen Fläche zweiten Grades) umschrieben werden kann. Ist die Fläche gegeben durch die Gleichung

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{a^2}+\frac{\mathfrak{y}^2}{b^2}+\frac{\mathfrak{z}^2}{c^2}=1,$$

so sind die Hauptaxen eines umschriebenen Kegels mit dem Scheitel $xyz$ bestimmt durch die cubische Gleichung

$$\text{(I.)}\quad \begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2}-\lambda & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+\mathfrak{A}\lambda^2+\mathfrak{B}\lambda+\mathfrak{C}=0,$$

wo

$$\text{(II.)}\quad a_{1,1}=-\frac{1}{a^2}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),\quad a_{2,3}=a_{3,2}=\frac{yz}{b^2c^2}$$

ist, etc.

Hieraus folgt

$$\text{(III.)}\quad\begin{cases}\mathfrak{A} = -\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\left[(b^2+c^2)x^2+(c^2+a^2)y^2+(a^2+b^2)z^2\right.\\ \qquad\qquad\left.-(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)\right],\\ \mathfrak{B} = -\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)\\ \qquad\qquad(x^2+y^2+z^2-(a^2+b^2+c^2)),\\ \mathfrak{C} = -\dfrac{1}{a^2b^2c^2}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)^2.\end{cases}$$

Soll der Kegel ein Rotationskegel sein, so muss die Discriminante der cubischen Gleichung verschwinden, also

$$\text{IV.}\quad \begin{vmatrix} 9\mathfrak{C}+\mathfrak{A}\mathfrak{B}, & -6\mathfrak{A}\mathfrak{B}+2\mathfrak{B}^2 \\ 6\mathfrak{B}+2\mathfrak{A}^2, & 9\mathfrak{C}+\mathfrak{A}\mathfrak{B}\end{vmatrix} = 0.$$

Setzt man für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ die obigen Werthe ein, so erhält man eine Gleichung zwölften Grades in $xyz$, welche aber den singulären Factor

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)^2$$

enthält.

Der Ort der Scheitel der Rotationskegel besteht also aus dem doppelt gedachten Ellipsoide als singulärem Bestandtheile und aus einer gewissen Fläche achten Grades $F_8 = 0$.

Diese Fläche achten Grades ist aber nichts anderes, als die Enveloppe aller confocalen Flächen

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}-1 = 0.$$

Obwohl die Gleichung dieser Fläche reelle Constanten enthält, hat sie doch nur eine einfache Schaar reeller Punkte, nämlich die sogenannten Focalkegelschnitte der Fläche

$$x = 0,\ -(c^2-a^2)\,y^2+(a^2-b^2)\,z^2-(c^2-a^2)(a^2-b^2) = 0 \text{ etc.},$$

von denen übrigens beim Ellipsoid nur zwei reelle Punkte enthalten. Diese Kegelschnitte sind Doppelcurven der Fläche $F_8 = 0$. Hieraus folgt, dass sich $F_8$ in eine Summe von Quadraten zerlegen lassen muss. Diese Zerlegung führt nun der Herr Verfasser auf zwei Weisen aus, und erhält das eine Mal eine Summe von sieben, das andere Mal von zehn Quadraten.

Nun hängt aber das Hauptaxenproblem für eine centrische Fläche zweiten Grades

$$a_{1,1}\,x^2 + a_{2,2}\,y^2 + a_{3,3}\,z^2 + 2a_{2,3}\,yz + 2a_{3,1}\,xz + 2a_{1,3}\,xy = D$$

von der cubischen Gleichung

$$(V.)\qquad \begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda, & a_{2,1}, & a_{3,1}, \\ a_{1,2}, & a_{2,2}-\lambda, & a_{3,2}, \\ a_{1,3}, & a_{2,3}, & a_{3,3}-\lambda, \end{vmatrix} = 0$$

ab, die der Form nach mit der obigen vollkommen übereinstimmt, nur dass hier die $a_{1,1}$, $a_{2,1}$, $a_{3,1}$ etc. Constante sind. Man kann nun eben vermöge der Gleichungen II. die Grössen

$$x^2,\ y^2,\ z^2,\ yz,\ zx,\ xy,\ a^2,\ b^2,\ c^2$$

durch die Coefficienten $a_{1,1}$ etc. von I. ausdrücken und diese Werthe in die Gleichungen III. resp. IV. einsetzen, um die Zerlegung der Discriminante von V. in eine Summe von Quadraten zu erhalten. Der Herr Verfasser führt nun die Berechnung der $x^2$... etc. wirklich aus und zeigt, dass dadurch keine Irrationalitäten in die Ausdrücke hineinkommen. Hierdurch ist das Kummer'sche Theorem erwiesen. A.

---

P. Cassani. Sopra alcune proprietà delle quadriche.
Battaglini G. XIV. 146-151.

Es handelt sich um die Analogien, welche zwischen gewissen Problemen der Geometrie der Ebene und des Raumes eintreten, wobei die Distanz eines veränderlichen Punktes von festen Punkten ersetzt wird durch die Distanz von festen Geraden im Raume. Der Ort der Punkte, für welche das Verhältniss der Abstände von zwei festen Geraden im Raume constant ist, ist ein einschaliges Hyperboloid. Dieses Hyperboloid ist kein allgemeines, sondern ein solches, bei welchem je eine Generatrix jeder Schaar ein Loth auf je einer der Schaaren von Kreisschnitten ist, und hat deshalb auch die Eigenschaft, dass es der projectivische Durchschnitt zweier Ebenenbüschel ist, deren entsprechende Glieder sich rechtwinklig durchschneiden, wie das zuerst von Binet, später von Steiner untersucht ist. In diesem Zusammenhange liegt eine beschränkte Analogie zu bekannten

Eigenschaften des Kreises, welche für die Ebene und Kugelfläche von Darboux bedeutend verallgemeinert sind (Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces etc. Mém. de Bordeaux VIII. und IX., siehe F. d. M. V. p. 404 und 405). Der Ort der Punkte, für welche die Summe der Quadrate der Entfernungen von beliebig vielen festen Geraden constant ist, ist natürlich auch ein Hyperboloid, aber kein specielles. Mit den hier angedeuteten Betrachtungen werden in der Arbeit einige einfache mechanische Deutungen verknüpft, die indessen ohne weitere Anwendung bleiben. A.

---

P. Serret. Note sur une classe particulière de décagones gauches inscriptibles à l'ellipsoide. C. R. LXXXII. 162-165.

P. Serret. Sur une classe particulière de décagones gauches inscriptibles. C. R. LXXXII. 270-272.

Wenn die gegenüberliegenden Seiten eines räumlichen Zehnecks sich in fünf Punkten einer Ebene schneiden, so lässt sich durch die Eckpunkte desselben eine Fläche zweiten Grades legen.

Dieser Satz, welcher dem bekannten Brianchon'schen Satze analog ist, ist in der ersten Note analytisch, in der zweiten geometrisch bewiesen. Der analytische Beweis geht davon aus, dass die Gleichungen der 10 Ebenen, deren successive Durchschnitte das Polygon bilden, in folgende Form gebracht werden können:

$$0 = M+A = M-B = M+C = M-D = M+E$$
$$= M-A = M+B = M-C = M+D = M-E,$$

woraus sich sehr leicht zeigen lässt, dass die zehn Eckpunkte der Gleichung

$$-M^2+AC+BD+CE+DA+EB = 0$$

genügen.

Eine weitere Analogie zeigt sich in folgender Relation. Sind

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 0$$

die Gleichungen von sechs Geraden einer Ebene, die der Bedingung

$$\lambda_1 P_1 P_2 + \lambda_2 P_2 P_3 \cdots \lambda_6 P_6 P_1 = 0$$

genügen, so sind diese Geraden in der betrachteten Reihenfolge die Seiten eines Brianchon'schen Sechsecks. Bezeichnet man die oben betrachteten Ebenen der Reihe nach mit $P_1$ bis $P_{10}$, so genügen sie der specielleren analogen Relation, die man erhält, wenn man für die $\lambda$ abwechselnd $+1$ und $-1$ einsetzt. Es ist aber auch das betrachtete Zehneck kein allgemeines, und es entsteht die Frage, ob man vielleicht für das allgemeine eingeschriebene Zehneck eine analoge Relation aufstellen könnte, wodurch das wichtige Problem gelöst wäre, die Relation zwischen 10 beliebigen Punkten einer Fläche 2ter Ordnung in geometrisch einfacher Weise herzustellen. Der Verfasser wirft diese interessante Frage auf, ohne sie zu beantworten. Der geometrische Beweis, den die zweite Note giebt, ist noch einfacher, als der analytische, und stützt sich ausser auf den Carnot'schen Satz nur auf ganz elementare Sätze, z. B. die Transversalensätze des Dreiecks, die bekanntlich specielle Fälle des Carnot'schen Satzes sind.

Ausserdem enthält die zweite Note noch den folgenden Satz: Jedes räumliche Achteck, dessen gegenüberliegende Seiten sich in vier Punkten einer Ebene durchschneiden, ist unendlich vielen Flächen 2ten Grades eingeschrieben, und zwar so, dass jede Fläche, welche durch sieben Eckpunkte gelegt ist, auch durch den achten Punkt hindurch geht (dieser letzte ist also ein sogenannter nothwendiger Punkt). Der Beweis kann geometrisch analog wie für den ersten Satz geführt werden. A

---

P. Serret. Sur une nouvelle analogie aux théorèmes de Pascal et de Brianchon. C. R. LXXXII. 208-210.

Diese Arbeit enthält eine andere räumliche Analogie zu dem Brianchon'schen resp. Pascal'schen Satze, die aber ebenso wie eine bereits früher von Chasles aufgestellte den Uebelstand hat, überbestimmt zu sein, da sie sich wie jene auf 12 Elemente der durch neun Elemente bestimmten Fläche 2ter Ordnung bezieht.

Der Satz lautet:

Die Kanten eines Octaeders, dessen drei Diagonalen sich in einem Punkte schneiden, sind Tangenten einer Fläche 2ter Ordnung, und zwar ist diese nicht reell geradlinig, wenn das Octaeder reell ist.

Sind die Diagonalen die Coordinatenaxen, und haben die Eckpunkte auf jeder dieser Axen die Coordinaten $a, b, c, a', b', c'$ so ist die Fläche:

$$\left[x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)+y\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)+z\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c'}\right)-2\right]^2$$
$$-2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)^2x^2-2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}\right)^2y^2-2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{c'}\right)^2z^2=0,$$

wie man leicht verificiren kann. Die Form der Gleichung zeigt, dass die Fläche keine reellen geraden Linien enthalten kann, wenn $a, b, c, a', b', c'$ reell sind.

Eine weitere Folgerung, die man ebenfalls sofort aus der Form der Gleichung der Fläche erkennt, ist diese: Die vier Durchschnittskanten je zweier gegenüberliegender Seitenflächen liegen in der Ebene

$$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)+y\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)+z\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c'}\right)-2=0,$$

und diese bildet mit den drei durch je zwei Diagonalen gelegten Ebenen (den Coordinatenebenen) ein Tetraeder, welches derjenigen Fläche 2ten Grades conjugirt ist, welche die zwölf Tetraederkanten berührt. Auch dieser Satz ist die Analogie eines Satzes in der Ebene.

Schliesslich kommt der Verfasser auf denjenigen Satz zu sprechen, welcher dem hier erwähnten reciprok entspricht, wie der Pascal'sche dem Brianchon'schen. Der Verfasser spricht die Ansicht aus, dass für das reciproke Gebilde die Analogie eine „latente" sei, ohne jedoch diesen Ausspruch, der dem Referenten nicht recht verständlich ist, näher zu begründen.

A.

---

DEMARTRES. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 561-562.

Eine Oberfläche 2ten Grades sei einem Tetraeder umschrieben. Man ziehe durch einen Punkt der Oberfläche eine Parallele zu einer der Kanten. Sind dann $\varrho$, $\varrho'$ die Segmente, welche durch das Tetraeder auf dieser Geraden bestimmt werden, $D$ der parallele Durchmesser, so ist $\Sigma \frac{\varrho\varrho'}{D^2}$, ausgedehnt über die sechs Kanten, gleich Null. O.

---

H. Jacob. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 331-333.

Es sei $A$ der Nabelpunkt einer Fläche 2ten Grades $S$ und $\varrho$ der 2te Schnittpunkt der Normale in diesem Punkte mit der Oberfläche. Man verbindet irgend einen Punkt $m$ von $S$ mit den Punkten $\varrho$ und $A$. Durch diesen letzten Punkt zieht man eine Ebene senkrecht zur Geraden $Am$, welche $\varrho m$ in $\mu$ schneidet. Dann beschreibt der Punkt $\mu$ eine Ebene, die den Kreisschnitten von $S$ parallel ist. O.

---

Laguerre. Sur les lignes géodésiques des surfaces du second ordre. Nouv. Ann. (2) XV. 10-11.

Maclaurin hat gezeigt, dass wenn man in einem Punkte $M$ einer Ellipse auf der Tangente eine Strecke gleich $\frac{1}{\varrho}$ ($\varrho$ Krümmungsradius in $M$) und auf der Normale eine Strecke gleich $-\frac{1}{3}\frac{d\varrho}{ds}\frac{1}{\varrho}$ aufträgt, die Resultante dieser zwei Längen, als Kräfte zusammengesetzt, senkrecht auf dem Durchmesser $OM$ ist. Nimmt man nun einen Punkt $M$ einer auf einer Fläche gezogenen geodätischen Linie und trägt auf der Tangente $MT$ von $M$ aus $\frac{1}{\varrho}$, auf der Hauptnormale $-\frac{1}{3}\frac{d\varrho}{ds}\frac{1}{\varrho}$, auf der Normale in der Osculationsebene $\frac{1}{r}$ ($r$ Torsionsradius), so ist die Resultante senkrecht zu der $MT$ conjugirten Diametralebene. O.

---

Laguerre. Sur les courbes gauches et sur la valeur de la torsion en un point d'une ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre. Bull. S. M. F. IV. 160-163.

„Wenn eine geodätische Linie auf einer Fläche 2ter Ordnung gegeben ist, und man in jedem Punkt der Curve auf der Hauptnormalen Stücke von der Länge $\sqrt[3]{\varrho}$ aufträgt (wo $\varrho$ die Länge des Hauptkrümmungshalbmessers ist), so besitzen die so erhaltenen Segmente die Eigenschaft, dass die algebraische Summe der Projectionen von zweien unter ihnen auf die Sehne, die ihre Fusspunkte verbindet, identisch Null ist". Vermöge dieses Satzes lässt sich der Torsionsradius einer solchen Curve als Function von $\varrho$ darstellen. Bl.

---

H. J. S. Smith. On the equation $P \times D =$ constant, of the geodesic lines of an ellipsoid. Messenger (2) V. 144.

Elementarer Beweis des Satzes: $P.D =$ const. (siehe Salmon Raumgeometrie, erste Aufl. II. Art. 124 u. f.) ohne Transformation auf die Form

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = a^2.$$

Glr. (O.)

---

B. Williamson, J. J. Walker, H. T. Gerrans. Solutions of a question (4930). Educ. Times XXV. 51, 65-66.

Die Ebene, welche durch den Schnitt von irgend drei conjugirten Durchmessern einer centralen Fläche 2ter Ordnung und einer concentrischen Kugel bestimmt wird, umhüllt eine ähnliche Fläche 2ten Grades. O.

---

H. Brocard. Notes sur diverses propriétés de l'ellipsoide et de l'ellipse. N. C. M. II. 136-142.

Elementarer Beweis der beiden Sätze: „Der Ort der Spitzen eines Trieders mit drei rechten Winkeln, welches einem Ellipsoid

umschrieben wird, ist eine concentrische Kugel". „Der geometrische Ort der Scheitel eines körperlichen Dreiecks mit 3 rechten Winkeln, dessen Kanten Tangenten zu einem Ellipsoide sind, ist ein dem ersten concentrisches Ellipsoid, dessen Axen dieselbe Richtung haben". Mit zahlreichen Folgerungen.

Mn. (O.)

---

J. Hammond and J. Wolstenholme. Solution of a question (4774). Educ. Times XXV. 24-25.

Das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

werde durch die Ebene $lx+my+nz=0$ geschnitten. Die Axen des Schnittes sind dann die Linien, in welchen die Ebene durch den Kegel

$$\frac{l(b^2-c^2)a^2}{x}+\frac{m(c^2-a^2)b^2}{y}+\frac{n(a^2-b^2)c^2}{z}=0$$

geschnitten wird. O.

---

A. Tourrettes, A. Genty. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 269-274.

Gegeben ein Ellipsoid, eine Ebene und ein Punkt in dieser Ebene. Der Ort der Scheitel der dem Ellipsoide umschriebenen Kegel, deren Schnitt mit der gegebenen Ebene zugleich den gegebenen Punkt zum Brennpunkt hat, besteht aus zwei Geraden. Herr Genty hat diese Aufgabe verallgemeinert. O.

---

J. J. Walker, R. Townsend, R. F. Davis and A. B. Evans. Solutions of a question (4801). Educ. Times XXV. 25-26.

Wenn

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy=0$$

die Gleichung eines geraden Kegels ist, der durch ein System von drei conjugirten Durchmessern des Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

geht, so ist

$$Aa^2+Bb^2+Cc^2=0.$$

O.

---

A. CAYLEY. On spheroidal trigonometry. Monthl. Not. XXXVII. 93.

Man betrachte ein rechtwinkliges Dreieck $PSS_0$ auf einem Sphäroid, in dem $PS_0S$ der rechte Winkel ist. Es sei ferner $S$ die Länge der geodätischen Linie $SS_0$ und $L$ der Winkel $SPS_0$. Dann werden die Werthe von $S$ und $L$ gegeben in Ausdrücken der entsprechenden sphärischen Grössen bis zu Gliedern $6^{\text{ter}}$ Ordnung in $e$, der Excentricität des Sphäroids. Glr. (O.)

---

F. E. ECKARDT. Ueber diejenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden. Clebsch Ann. X. 227-273.

Abdruck einer Programmarbeit des inzwischen verstorbenen Verfassers (Chemnitz 1875). Siehe F. d. M. VII. p. 491.

A.

---

P. APPELL. Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoidal d'un corps solide. Ann. de l'Éc. Norm. (2) V. 246-274.

Indem die Coordinaten der Punkte einer cubischen Raumcurve als rationale Functionen $3^{\text{ten}}$ Grades eines Parameters $\lambda$ dargestellt werden, wird die symmetrische Relation zwischen drei Parametern, die in jedem von ihnen linear ist, nämlich

$$A\lambda_1\lambda_2\lambda_3+B(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)+C(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+D=0$$

aufgestellt: Herr Appell sagt dann von den $\infty^2$ Punktetripeln der Curve, sie bilden eine Involution $3^{\text{ten}}$ Grades, obwohl dies Wort wohl schon eine andere Bedeutung hat. Es giebt drei Tripel, bei denen alle drei Punkte sich in einen vereinigen; diese drei

Punkte seien $\lambda'$ $\lambda''$ $\lambda'''$ und bilden selbst wiederum ein Tripel. Die Ebenen aller Tripel gehen durch einen und denselben Punkt $O$, nämlich den Schnitt der Osculationsebenen der Punkte $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$, deren Ebene selbst durch $O$ geht. Es giebt zwei Punkte, für welche der dritte Punkt unbestimmt ist: es sind die Schnittpunkte der aus $O$ kommenden Sehne der Curve. In dieser Weise werden die bekannten (aber nicht als solche bezeichneten) polaren Eigenschaften der Raumcurve bewiesen, die zu dem Nullsysteme oder linearen Complexe — welche Begriffe aber nicht erwähnt werden — führen, insbesondere wird auch die Axe des Nullsystems besprochen. Neu schien dem Referenten der — jedoch nicht weiter benutzte — Satz, dass, wenn das binäre Punktgebiet auf die Raumcurve projicirt gedacht wird, der harmonische Mittelpunkt (die zweite Polare) eines Punktes $\lambda$ der Curve in Bezug auf die Punkte $\lambda'$, $\lambda''$, $\lambda'''$ der dritte Schnitt der Ebene ist, welche die Tangente von $\lambda$ mit $O$ verbindet. Im zweiten Theile wird, da nach Chasles (C. R. 16 S. 1420) bei der unendlich kleinen Bewegung eines Körpers ebenfalls ein Nullsystem entsteht, wobei jedem Punkt die ihn enthaltende auf seiner Fortschreitungsrichtung normale Ebene entspricht, die Aufgabe gelöst: wenn eine solche Bewegung, die sich ja stets auf eine Schraubenbewegung zurückführen lässt, also auf ein Gleiten längs einer Geraden und gleichzeitiges Drehen um dieselbe, gegeben ist, die zugehörigen cubischen Raumcurven zu finden, sowie die umgekehrte Aufgabe.

Ist $V$ die Translationsgeschwindigkeit, $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit um die Axe der Schraubenbewegung, welche als $z$-Axe gewählt wird, ferner

$$x = x_0 + \frac{A}{\lambda - a} + \frac{B}{\lambda - b} + \frac{C}{\lambda - c}.$$

$$y = y_0 + \frac{A'}{\lambda - a} + \frac{B'}{\lambda - b} + \frac{C'}{\lambda - c}$$

angenommen, so ist die entstehende Differentialgleichung, der die dritte Coordinate $z$ als Function von $\lambda$ zu genügen hat, zu integriren unter der Bedingung, dass diese Function rational sei; es müssen dann

$$\frac{AB'-A'B}{(a-b)^2}, \quad \frac{BC'-B'C}{(b-c)^2}, \quad \frac{CA'-C'A}{(c-a)^2}$$

denselben Werth $h$ haben (was auch geometrisch interpretirt wird) und es ergiebt sich:

$$\frac{V}{\omega}(z-z_0) = xy_0 - yx_0 + h\left(\frac{c-b}{\lambda-a} + \frac{a-c}{\lambda-b} + \frac{b-a}{\lambda-c}\right);$$

die Zahl ($\infty^7$) der möglichen Raumcurven wird nicht abgeleitet.

Bei der umgekehrten Aufgabe sind die Coordinaten der Punkte der Raumcurve wie oben als rationale Functionen eines Parameters gegeben; es werden die Componenten der Translations- und der Rotationsgeschwindigkeit ermittelt, sowie die Lage der Axe der Schraubenbewegung. Am Schlusse werden noch folgende Sätze bewiesen: Der Torsionsradius eines Punktes der Raumcurve ist dem Quadrate seiner Geschwindigkeit in der Schraubenbewegung proportional, und wird in jedem Punkte $M$ der Curve senkrecht zur Osculationsebene eine dem Torsionsradius proportionale Länge $MM'$ aufgetragen, so erzeugen die Punkte $M'$ eine der gegebenen coaxiale cubische Raumcurve.

Sm.

---

H. M. Jeffery. On cubics of the third class with triple foci. Quart. J. XIV. 127-141.

Die Kegel 3ten Grades und mit ihnen die ebenen Curven 3ten Grades, welche als Schnitte derselben aufgefasst werden können, sowie die entsprechenden sphärischen Curven können nach ihren projectivisch sich verhaltenden Eigenschaften eingetheilt werden in einläufige, zweiläufige, solche mit einem Selbstschnitt mit imaginären Aesten, d. h. mit einer isolirten Geraden resp. einem isolirten Punkte, solche mit einem Selbstschnitt mit reellen Aesten, und solche mit einer Rückkehrkante, resp. einem Rückkehrpunkte. Nach Cayley werden diese fünf Genera genannt simplex, complex, acnodal, crunodal, cuspidal. Dem entsprechend kann man auch die Kegel 3ter Klasse, sowie ihre sphärischen und ebenen Schnitte eintheilen in einläufige, zweiläufige, solche mit einer Doppeltangentialebene, resp. Tangente, solche mit einer

wirklichen Doppeltangentialebene, resp. Tangente, und solche mit einer Wendetangentialebene, resp. Wendetangente. Diese bezeichnet der Verfasser als simplex, complex, acubitangential, veribitangential und inflexional.

Die Eintheilung der ebenen Klassencurven kann ausserdem noch auf die Focaleigenschaften Rücksicht nehmen. Eine ebene Curve 3^ter^ Klasse hat im Allgemeinen neun Brennpunkte, nämlich die neun Durchschnittspunkte der drei von einem unendlich entfernten Kreispunkt $J$ gelegten Tangenten mit den vom conjugirten Kreispunkt $\mathfrak{J}$ gelegten Tangenten. Von diesen neun Punkten sind drei reell, sechs imaginär.

Geht die Curve durch $J$ und $\mathfrak{J}$, so fallen zwei der Tangenten durch $J$ und zwei durch $\mathfrak{J}$ zusammen und zwar in die Tangenten in $J$ und $\mathfrak{J}$. Demgemäss fallen von den neun Brennpunkten einmal vier und zweimal zwei zusammen, einer bleibt von den übrigen getrennt. Specieller von den reellen Brennpunkten fallen zwei zusammen, der dritte ist getrennt.

Sind die Punkte $J$ und $\mathfrak{J}$ Rückkehrpunkte der Curve, so fallen die drei Tangenten von $J$ in die eine Rückkehrtangente in $J$ zusammen, ebenso die drei Tangenten von $\mathfrak{J}$ in die Rückkehrtangente in $\mathfrak{J}$, und alle Brennpunkte fallen in einen Punkt, den Durchschnitt der beiden Rückkehrpunkte zusammen. Hiernach theilt der Verfasser die Curven 3^ter^ Klasse in solche mit drei getrennten reellen Brennpunkten, in solche mit zwei zusammenfallenden und einem davon getrennten reellen Brennpunkte, und endlich in solche mit drei zusammenfallenden reellen Brennpunkten. Die Herleitung dieser Eintheilung hat Herr Cayley durch einige Zusatzparagraphen genauer durchgeführt. Referent möchte dazu nur bemerken, dass diese Eintheilung die parabolischen Curven ausser Acht lässt, für welche die Sache sich folgendermassen gestaltet. Hat die Curve einen parabolischen Punkt, so wird aus dem einen reellen Brennpunkt ein unendlich entfernter aber unbestimmter Punkt (jeder beliebige reelle oder imaginäre Punkt der unendlich entfernten Geraden) in jeden der Punkte $J$ und $\mathfrak{J}$ fallen zwei imaginäre Brennpunkte. Die übrigen zwei reellen und zwei imaginären Brennpunkte sind

endlich. Hat die Curve zwei parabolische Punkte, oder berührt sie die unendlich entfernte Gerade doppelt, so werden aus zwei reellen und zwei imaginären Brennpunkten völlig unbestimmte Punkte der unendlich entfernten Geraden, ein Brennpunkt wird reell und endlich, und in jeden der Punkte $J$ und $\mathfrak{J}$ fallen zwei imaginäre Brennpunkte. Ebenso ist es, wenn die unendlich entfernte Gerade eine Wendetangente der Curve ist.

Sind endlich die beiden Punkte $J$ und $\mathfrak{J}$ parabolische Punkte der Curve, so werden sämmtliche Brennpunkte unbestimmte Punkte der unendlich entfernten Geraden.

Der Verfasser wendet sich nun zunächst zur genauern Untersuchung von ebenen Curven 3ter Klasse mit einem dreifachen (reellen) Brennpunkte, unter welchen es nach der Haupteintheilung drei Arten giebt: einfache (unipartite), zweifache (bipartite) und solche mit einer wirklichen Doppeltangente (veribitangential). Die letztere ist die Cardiode und bildet den Uebergang zwischen den beiden erstgenannten. Die vierte Art, welche der Verfasser nur beiläufig erwähnt, bei welcher der dreifache Brennpunkt im Unendlichen liegt, ist acubitangential, da die unendlich entfernte Gerade sie in den beiden Kreispunkten berührt; sie ist als ein singulärer Fall zu betrachten, da der Brennpunkt unbestimmt ist.

Es werden nun die verschiedenen Formen der bezeichneten Curven untersucht, darauf die anharmonischen Verhältnisse der Tangentialpunkte und endlich die Evolute der Curven betrachtet. In gleicher Weise werden später die sphärischen Curven 3ter Klasse betrachtet. Bei einer sphärischen Curve versteht man unter einem Brennpunkt den Durchschnittspunkt zweier gemeinsamer (sphärischer) Tangenten der betrachteten Curve und des unendlich entfernten Kugelkreises. Die Zahl der Brennpunkte einer sphärischen Curve $n$ter Klasse ist $n(2n-1)$, wobei selbstverständlich diametrale Punkte als identisch gelten und nicht doppelt gezählt werden. Von diesen Brennpunkten sind $n$ reell.

Sollen nun die drei reellen Brennpunkte einer sphärischen Curve zusammenfallen, so muss die Curve den unendlich entfernten Kugelkreis in zwei conjugirten Punkten osculiren.

Die sphärische Verbindungslinie der beiden conjugirten

Osculationspunkte giebt einen dreifachen cyclischen Bogen der Curve. Die sphärischen Curven dieser Art enthalten alle fünf Genera; auch hier werden die verschiedenen Formen discutirt, gewisse anharmonische Relationen aufgestellt und die Evoluten untersucht. A.

---

J. Tannery. Sur le plan osculateur aux cubiques gauches. Darboux Bull. XI. 183-192.

Im Hinweis auf eine Arbeit von Apell, welche ein System von Polen und Polarebenen bei Raumcurven 3[ter] Ordnung behandelt, betrachtet der Verfasser die Schmiegungsebenen derselben Curven und gelangt so auf anderem Wege zu denselben Resultaten, sowie zu einigen weiteren Folgerungen.

Die Gleichungen der Raumcurve in homogenen Coordinaten $P, P_1, P_2, P_3$ können in folgender Form gegeben sein:

$$\begin{aligned} P &= at^3 + 3bt^2s + 3cts^2 + ds^3 \\ P_1 &= a't^3 + 3b't^2s + 3c'ts^2 + d's^3 \\ P_2 &= a''t^3 + 3b''t^2s + 3c''ts^2 + d''s^3 \\ P_3 &= a'''t^3 + 3b'''t^2s + 3c'''ts^2 + d'''s^3, \end{aligned}$$

so dass jedem Werthe $\frac{t}{s}$ ein Punkt der Curve entspricht; dann ergiebt sich die Gleichung der Schmiegungsebene im Punkte $t, s$ in der Form:

$$\begin{vmatrix} x, & at+bs, & bt+cs, & ct+ds \\ y, & a't+b's, & b't+c's, & c't+d's \\ z, & a''t+b''s, & b''t+c''s, & c''t+d''s \\ u, & a'''t+b'''s, & b'''t+c'''s, & c'''t+d'''s \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dass durch jeden Punkt des Raumes drei Schmiegungsebenen der Curve gehen.

Ordnet man dieselbe nach Potenzen von $s$, so nimmt sie die Form an

$$Xs^3 - Ys^2t + Zst^2 - Ut^3 = 0,$$

von $X, Y, Z, U$ lineare Functionen von $x\ y\ z\ u$ sind. Sieht man diese

Grössen als neue homogene Coordinaten an, so wird die Gleichung der Curve

$$X = t^3,\ Y = 3t^2s,\ Z = 3ts^2,\ U = s^3,$$

und die Gleichung der abwickelbaren Fläche, welche durch die Tangenten der Curve beschrieben wird, ist die Determinante der Gleichung der Schmiegungsebene. Hat ein bestimmter Punkt der Curve die Parameter $t'$, $s'$ und die Coordinaten $X'$ $Y'$ $Z'$ $U'$, so kann man mit Hülfe der letzten Gleichungen die Parameter durch die Coordinaten ausdrücken und erhält die Gleichung der Schmiegungsebene in der Form

$$(XU'-X'U)-\tfrac{1}{3}(YZ'-Y'Z) = 0.$$

Sieht man in dieser Gleichung $X$ $Y$ $Z$ $U$ als gegeben an, so drückt sie die Gleichung der Ebene aus, welche durch die Berührungspunkte derjenigen drei Schmiegungsebenen geht, die sich durch einen beliebigen Punkt $P$ legen lassen Man kann diese Ebene die Polarebene des Punktes $P$ nennen, und die Form der Gleichung zeigt, dass wenn $Q$ ein Punkt der Polarebene von $P$ ist, auch reciprok $P$ ein Punkt der Polarebene von $Q$ ist. Auch zeigt die letzte Gleichung, dass die Polarebene eines Punktes $P$ diejenige Gerade enthält, welche durch $P$ geht und zwei gewisse Gegenkanten des Tetraeders

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0,\ U = 0$$

schneidet. Dieselbe Gleichung kann auch als die Darstellung eines Complexes ersten Grades angesehen werden, der in besonderer Beziehung zur Curve steht. Vermöge einer linearen Substitution

$$t = \lambda t_1 + \lambda' s_1,$$
$$s = \mu t_1 + \mu' s_1$$

erkennt man, dass das Tetraeder $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $U = 0$ auf unendlich vielfache Weise durch ein anderes ersetzt werden kann.

Hieraus wird nun noch eine weitere Reihe von Sätzen gewonnen, welche sich auf die Eigenschaften der Schmiegungsebenen beziehen, so z. B. der Chasles'sche Satz, dass die Schaaren der Schmiegungsebenen auf den Tangenten der Raumcurve projectivische Punktreihen bestimmen; ferner der Satz:

Wenn vier Punkte $ABCD$ gegeben sind und in der Ebene $ABC$ ein Kegelschnitt $\alpha$, der $AB$ in $A$, $BC$ in $B$ berührt, ebenso in der Ebene $BCD$ ein Kegelschnitt $\delta$, der $CD$ in $D$ und $BC$ in $B$ berührt, dann giebt es eine Raumcurve 3[ten] Grades, welche $AB$ in $A$, $CD$ in $D$ berührt, deren Schmiegungsebenen in $A$ und $D$ die Ebenen $ABC$ und $BCD$ sind, und deren abwickelbare Tangentenfläche durch die Kegelschnitte $\alpha$ und $\delta$ geht.

Wenn man von einem Punkte $Q$, der auf der gemeinsamen Tangente $BC$ der Kegelschnitte $\alpha$ und $\delta$ liegt, die beiden andern Tangenten $QE$ und $QF$ zieht, welche $AB$ und $CD$ bezüglich in $P$ und $R$ treffen, dann ist $QEF$ eine Schmiegungsebene der Raumcurve, $EF$ eine Tangente derselben und der Berührungspunkt von $EF$ liegt harmonisch zum Durchschnittspunkte von $EF$ und $QR$ in Bezug auf die Punkte $E$ und $F$. A.

---

Gambey. Solution d'une question. Nouv. Ann. XV. 516-518.

Bemerkungen zu der Arbeit von Laguerre, die in F. d. M. V. p. 396 besprochen ist. O.

---

C. Le Paige. Sur l'enveloppe d'un cylindre de révolution. N. C. M. II. 296-300.

Der Cylinder hat einen constanten Radius. Die Axe bildet constante Winkel mit der Tangente, Normale und Binormale an eine Raumcurve in dem Punkte, in dem er diese Curve schneidet. Die Enveloppe setzt sich zusammen aus einer röhrenförmigen und einer Regelfläche. Mn. (O.)

---

Weitere Aufgaben, gelöst von R. Townsend, M. Nash, R. F. Davis, E. B. Elliott, J. R. Wilson, H. S. Monck, Moret-Blanc, Bouquet, A. Pellissier finden sich Educ. Times XXV. 49; XXVI. 46; Nouv. Ann. (2) XV. 333, 334, 514.

O.

---

## D. Andere specielle Raumgebilde.

Bourguet. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 223-227.

Alle abwickelbaren Flächen, welche durch eine gegebene ebene Curve gehen, und deren Rückkehrcurve auf einer gegebenen Fläche 2[ter] Ordnung liegt, zu suchen, und zu beweisen, dass die Differentialgleichung 1[ter] Ordnung, auf deren Integration die Lösung des Problems hinauskommt, sich stets auf einfache Quadraturen zurückführen lässt.

Die Untersuchung geht von dem speciellen Fall aus, dass die Fläche ein Cylinder ist mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Die Generatrices haben die Gleichung

$$y=mx+\sqrt{m^2a^2+b^2},\quad z=px+q.$$

Dann ergeben die gestellten Bedingungen zwischen $p$ und $q$ eine Differentialgleichung von der Form $\frac{dq}{dp}=F\left(\frac{q}{p}\right)$, welche sich bekanntlich integriren lässt. Mit Hülfe dieser Vorbetrachtung wird nun für eine beliebige Fläche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z-h)^2}{c^2}-1=0$$

die analoge Untersuchung angestellt, wenn $X$, $Y$ die durch eine Gleichung verbundenen Coordinaten der gegebenen ebenen Curve und $x=mz+X$, $y=nz+Y$ die Gleichungen der Generatrix der abwickelbaren Fläche sind. Es handelt sich darum, $m$ und $n$ als Functionen von $X$ oder $Y$ darzustellen. Die Bedingungen, dass zwei benachbarte Generatrices sich schneiden, und dass der Durchschnitt auf der gegebenen Fläche liege, führen auf eine Gleichung, deren Differentiation ergiebt

$$\frac{d^2m}{dX^2}\left[\frac{dm}{dX}\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{mX}{a^2}+\frac{nY}{b^2}+\frac{h}{c^2}\right)\right]=0.$$

Das Verschwinden des ersten Factors $\frac{d^2m}{dX^2}$ ergiebt einen Kegel, dessen Scheitel auf der gegebenen Fläche liegt. Hierin liegt

also eine singuläre Lösung. Der zweite Factor ergiebt, wenn man differentiirt, um $n$ zu eliminiren:

$$\frac{d^2m}{dX^2}\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}-1\right)+\frac{dm}{dX}\left[X\left(1-\frac{XY'}{Y}\right)-\frac{Y'}{Y}\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)\right]$$
$$-\frac{m}{a^2}\,\frac{Y-XY'}{Y^2}+\frac{h}{c^2}\,\frac{Y'}{Y}=0.$$

Variirt man die Constanten so, dass während $\frac{h}{c}$ endlich bleibt, $\frac{1}{c}$ unendlich klein wird, so verschwindet der letzte Summand der linken Seite. In diesem Falle aber ist die Fläche eine Cylinderfläche, und es ist das Integral der speciellen Differentialgleichung aus der Vorbetrachtung bekannt. Also lässt sich auch das allgemeine Integral der allgemeinen Gleichung nach bekannten Methoden der Analysis auffinden. Da die Coordinaten nicht rechtwinklig zu sein brauchen, ist das Problem hiermit allgemein auf Quadraturen zurückgeführt, welches auch die Gleichung zwischen $X$ und $Y$ sei. Freilich ist die Differentialgleichung durch die Elimination einer Constanten eine Gleichung 2[ter] Ordnung geworden, während die Laguerre'sche Proposition auf eine solche 1[ter] Ordnung hinwies. A.

---

Gambey. Solution de la question d'analyse proposée au concours d'agrégation de 1875. Nouv. Ann. (2) XV. 503-507.

Die hier gelöste Aufgabe ist, die asymptotischen Linien eines Conoids, projicirt auf die zur Axe normale Ebene, darzustellen, nebst einer speciell gegebenen Anwendung. Unter einem Conoid wird eine Fläche verstanden, erzeugt von einer Geraden die bei sonst beliebiger Bewegung eine feste Axe unter rechtem Winkel schneidet, so dass ihre Gleichung ist:

$$z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Nimmt man, wie es hier an die Hand gegeben ist, $x$, $y$ zu Parametern, so ergiebt sich für die zweite asymptotische Linie (eine ist offenbar die Erzeugende selbst) ohne Schwierigkeit die Gleichung:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{\varphi''(u)}{2\varphi'(u)}\,du \quad \left(u = \frac{y}{x}\right)$$

fertig zur Integration, die der Verfasser unvollzogen lässt. Das gegebene Beispiel bildet die Fläche

$$z = \frac{2axy}{x^2+y^2}.$$

Hier wird die Projection der asymptotischen Linie eine Lemniscate.

H.

---

D. Regis. Sulle sviluppabilità circoscritte a due superficie della seconda classe. Atti di Torino XL. 971-984.

---

P. Serret. Note sur les courbes gauches du quatrième ordre. C. R. LXXXII. 322-326, 370-371.

Die Note bezieht sich auf die Aufgabe, „geometrisch die vier Punkte zu bestimmen, in denen eine Raumcurve $R_4$ vierten Grades erster Art (d. h. eine solche, durch die ein Büschel von Flächen zweiten Grades hindurchgeht,) von einer Ebene geschnitten wird, und zwar, wenn die Raumcurve durch acht ihrer Punkte gegeben ist.

Der Verfasser hat dieses Problem bereits früher in geometrischer Weise in seiner „Géométrie de direction“ Paris 1869, (Gauthier-Villars) behandelt, und zeigt jetzt, wie die speciellen Fälle, wo die Ebene durch 1, 2 oder 3 der gegebenen acht Punkte geht, einfacher behandelt werden können, als dies in dem genannten Werke geschehen ist.

Der Verfasser benutzt hierbei die einem Kegelschnitte conjugirten Vierecke und Fünfecke. Ein Viereck heisst einem Kegelschnitte conjugirt, wenn der Pol jeder Seite auf der gegenüberliegenden Seite liegt, ein Fünfeck, wenn der Pol jeder Seite der gegenüberliegende Eckpunkt des Fünfecks ist. Es giebt zu jedem beliebigen Fünfeck im Allgemeinen einen und nur einen conjugirten Kegelschnitt. Ein räumliches Fünfeck ist einem ebenen Kegelschnitte conjugirt, wenn dasjenige Fünfeck, dessen Eck-

punkte die Durchschnitte der fünf Seiten des räumlichen Fünfecks mit der Ebene des Kegelschnittes sind, diesem Kegelschnitte conjugirt ist. Die Untersuchung stützt sich auf folgenden Satz: „Wenn ein räumliches Fünfeck und ein ebenes Dreieck einer $R_4$ eingeschrieben sind, so sind sie demselben Kegelschnitte conjugirt.“ A.

---

R. Gantzer. Untersuchungen über eine algebraische Fläche vierten Grades. Pr. Stendal.

Die untersuchte Fläche ist der geometrische Ort für alle die Punkte, deren Entfernungen von zwei festen sich schneidenden Geraden eine constante Summe (oder Differenz) $2k$ haben. Wählt man als Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten den Durchschnittspunkt der festen Geraden, als $x$- und $y$-Axe die beiden Halbirungslinien der von den Geraden gebildeten Winkel, ($2\alpha$ und $\pi - 2\alpha$), so wird die Gleichung der Fläche

$$(x^2 \sin^2\alpha - k^2)(y^2 \cos^2\alpha - k^2) = k^2 z^2.$$

Dieselbe schneidet die $xy$-Ebene in vier Geraden, welche ein Rechteck bilden, die Eckpunkte dieses Rechtecks sind Doppelpunkte der Fläche. Die Schnitte der Fläche parallel der $xz$- oder $yz$-Ebene sind Kegelschnitte, die auf der Grenze des Rechtecks in zwei sich deckende Gerade degeneriren, während sie innerhalb des Rechtecks Ellipsen, ausserhalb desselben Hyperbeln sind. Das Volumen des von dem Rechteck begrenzten Theils ist $\frac{k^3 \pi^2}{\sin 2\alpha}$. Die Krümmungslinien der Fläche sind für den Fall untersucht, dass die gegebenen festen Geraden sich rechtwinklig schneiden. Ihre Projectionen auf die $xy$-Ebene sind gleichseitige Hyperbeln, welche die Axen zu Asymptoten haben. Es sind diese Krümmungslinien, wie der Verfasser nicht ausdrücklich erwähnt, diejenigen Raumcurven vierten Grades, in welchen sich je zwei um die Axen beschriebene Cylinder schneiden, für welche die Summe oder die Differenz der Radien $2k$ ist. Auch die zweite Schaar der Krümmungslinien wird durch Raumcurven vierten Grades gebildet; ihre Projectionen auf die $xy$-Ebene sind

Hyperbeln, welche durch die vier Doppelpunkte der Flächen hindurchgehen. Zum Schlusse untersucht der Verfasser die Enveloppe der Flächenschaar, die entsteht, wenn der Parameter $k$ variirt; diese Untersuchung erscheint überflüssig, da man leicht erkennt, dass die Enveloppe mit dem Tangentenkegel vom Anfangspunkte übereinstimmt, und dieser bis auf gewisse singuläre Bestandtheile imaginär wird. Die Rechnungen sind in der Arbeit meist etwas umständlich und ohne rechte Beziehung zu ihrer geometrischen Bedeutung nach den allgemeinen Formeln durchgeführt. A.

---

E. W. Hyde. The section of a circular torus by a plane passing through the centre and tangent at opposite sides. Analyst III. 78-79.

Der Schnitt besteht, wie bewiesen wird, aus 2 gleichen Kreisen. Glr. (O.)

---

A. Mannheim. Nouvelles propriétés géométriques de la surface de l'onde, qui s'interprètent en optique. C. R. LXXXV. 368-370.

Zu den Theoremen über die Wellenfläche, denen eine einfache Bedeutung für optische Vorgänge beizulegen ist, fügt Herr Mannheim folgende:

I. Man lege irgend einen Durchmesser durch die Wellenfläche und ziehe die Normale in einem Endpunkt desselben. Diese beiden Geraden bestimmen eine Ebene, und in dieser Ebene zeichne man senkrecht zum ersten Durchmesser eine Gerade, welche durch den Mittelpunkt der Wellenfläche geht. Längs dieser liegen zwei Durchmesser; zwischen diesen beiden und dem ersten Durchmesser besteht die Relation, dass die Summe der inversen Werthe der Quadrate dieser drei Durchmesser unveränderlich bleibt, wie auch der erste gelegt sein mag.

II. Man ziehe durch den Mittelpunkt der Wellenfläche einen Durchmesser, und in einem seiner Endpunkte die Normale und die Berührungsebene. Der Durchmesser und die Normale bestimmen

eine Ebene; senkrecht zu dieser und parallel zur Normale lege man zwei Tangentialebenen an die Fläche. Ihre Lage ist mit der ersten Tangentialebene durch das Gesetz verknüpft, dass die Summe der Quadrate der Distanzen dieser drei Ebenen vom Centrum der Fläche unveränderlich ist, wie auch der erste Durchmesser gezogen sein mag.

III. Ein rechtwinkliges Dreikant möge seine Spitze im Centrum der Wellenfläche haben. Längs jeder Kante giebt es zwei Durchmesser. Bildet man den inversen Werth des Quadrats vom Product dieser zwei Durchmesser und addirt die drei entstehenden Quadratwerthe, so erhält man einen unveränderlichen Werth, wie auch sonst die Lage des Dreikants sein mag.

IV. Denkt man parallel den Ebenen eines rechtwinkligen Dreikants, dessen Ecke im Mittelpunkt der Wellenfläche gelegen ist, Berührungsebenen an die Fläche gelegt, so entstehen zwei rechtwinklige Dreikante, welche der Fläche umgeschrieben sind, und deren Ebenen bezüglich parallel sind. Bildet man das Product der Abstände zweier solcher paralleler Ebenen vom Centrum der Fläche und erhebt dieses Product zum Quadrat, so erhält man, entsprechend den drei Paaren paralleler Ebenen, drei Quadrate. Die Summe dieser drei Quadrate ist constant, wie auch die Lage des ursprünglichen Dreikants sonst verändert werde.

Da nun der Länge eines Durchmessers die Geschwindigkeit eines Lichtstrahls und der Distanz einer Berührungsebene die Geschwindigkeit einer ebenen Welle entspricht, so lassen sich die oben ausgesprochenen geometrischen Theoreme leicht in ihrer optischen Bedeutung erkennen. Schn.

---

W. M. Hicks. Practical method of modelling the wave surface. Messenger (2) V. 183-186.

Beschreibung einer Methode zur Modellirung der Wellenfläche, welche die grosse Arbeit der Berechnung einer Reihe von ebenen Schnitten erspart, wie es gewöhnlich geschieht. Man kann mit derselben sehr leicht einen beliebigen ebenen Schnitt

durch den Mittelpunkt erhalten. Ein danach construirtes Modell findet sich in Cavendish Physical Laboratory zu Cambridge.

Glr. (O.)

---

LAGUERRE. Sur une surface de 4^me classe, dont on peut déterminer les lignes de courbure. Liouville J. (3) II. 145-155.

Der Verfasser untersucht eine Fläche 4ter Klasse mit doppelt berührendem Kegel 2ter Ordnung, collinear verwandt mit der Parallelfläche des Ellipsoids und durch Construction aus einer Fläche 2ter Ordnung ableitbar. Sie ist eine „Antikaustik" einer Fläche 2ter Ordnung, indem ihre Elemente zu den von dieser Fläche gebrochenen Strahlen eines parallel zu einer Axe einfallenden Büschels senkrecht stehen, und dadurch ausgezeichnet, dass ihre Krümmungslinien durch Construction gefunden werden können. Sie umfasst unter Anderm als speciellen Fall die Cyclide.

Bl.

---

A. CAYLEY. On a quartic surface with twelve nodes. Quart. J. XIV. 103-106.

Die Fläche, deren Gleichung ist

$$p(yz+xw)^2+q(zx+yw)^2+r(xy+zw)^2=0,$$

wobei

$$p+q+r=0,$$

wird als einhüllende Fläche einer gewissen Schaar von Flächen 2ter Ordnung erzeugt. Es ist eine Fläche mit zwölf Knoten, und es wird gezeigt, wie sie aus einer allgemeineren mit acht Knoten durch die Forderung, dass noch weitere vier Doppelpunkte existiren sollen, hervorgeht.

Lth.

---

A. CAYLEY, On a sextic torse. Quart. J. XIV. 229-235.

Die abwickelbare Fläche, die sich zu einem Modell eignet, wird untersucht, deren Rückkehrcurve in rechtwinkligen Coordinaten durch die Gleichungen

$$x=\cos\varphi,\quad y=\sin\varphi,\quad z=\cos 2\varphi$$

gegeben ist. Die Gleichung der Fläche selbst wird in verschiedenen Coordinaten dargestellt; in rechtwinkligen lautet sie

$$\{z(x^2-y^2)-3x^2-3y^2+2\}^2+4x^2y^2(z^2-4x^2-4y^2+3)=0.$$

Lth.

---

A. Cayley. On a torse depending on elliptic functions. Quart. J. XIV. 235-242.

In dieser Abhandlung untersucht Cayley diejenigen abwickelbaren Flächen, deren Rückkehrkante auf einem Kreiscylinder gelegen ist und durch die Abwickelung in einen Kreisbogen übergeht. Die Coordinaten eines Punktes der Rückkehrkante hängen von elliptischen Functionen eines Parameters ab.

Lth.

---

A. Cayley. On certain octic surfaces. Quart. J. XIV. 249-265.

Cayley stellt zuerst die Gleichung derjenigen abwickelbaren Fläche auf, deren Rückkehrkante der Schnitt von zwei Flächen zweiter Ordnung ist. Es zeigt sich, dass sie ein specieller Fall einer allgemeineren Fläche 8^ter Ordnung ist, die in den Seitenflächen des den beiden Flächen 2^ter Ordnung gemeinsamen Polartetraeders je einen Kegelschnitt als Doppelcurve besitzt. Diese allgemeinere Fläche geht auf vier Arten in eine windschiefe Fläche über, die ebenfalls jene vier Kegelschnitte zu Doppelcurven hat, und wenn zwei dieser vier windschiefen Flächen zusammenfallen, so geschieht es in die anfangs aufgestellte abwickelbare Fläche. Im zweiten Theile der Arbeit stellt Cayley die allgemeine Gleichung derjenigen Fläche 8^ter Ordnung auf, welche vier Kegelschnitte, die in einem gewissen Zusammenhange stehen, zu Doppelcurven hat, und zeigt, dass diese Fläche auf zwei Arten in eine windschiefe Fläche übergeht. Lth.

---

F. Nicoli. Intorno ad una interpretazione geometrica. Mem. di Modena XVI. 141-158.

---

S. PUICHERLE. Sopra alcuni problemi relativi alle superficie d'area minima. Rend. d. Ist. Lomb. IX. 444-456.

S. PUICHERLE. Nota sulle superficie d'area minima. Battaglini G. XIV. 75-82.

Der Herr Verfasser vergleicht die von Herrn Beltrami (Mem. di Bologna, 1867) für die Minimalflächen gegebenen analytischen Darstellungen:

$$d(x+i\xi) = f(u)\sin u\,du,$$
$$d(y+i\eta) = f(u)\cos u\,du,$$
$$d(z+i\zeta) = -if(u)du,$$

wo $x$, $y$, $z$ Functionen der beiden Parameter $\alpha$, $\beta$ sind, mit denen des Herrn Weierstrass (Berl. Ber. 1866, 612):

$$d(x+i\xi) = (1-u^2)F(u)du,$$
$$d(y+i\eta) = i(1+u^2)F(u)du,$$
$$d(z+i\zeta) = iuF(u)du,$$

und weist nach, dass beide aus einer allgemeineren Darstellung fliessen. Durch die Substitutionen

$$\frac{d(x+i\xi)}{du} = a^2-b^2, \quad \frac{d(y+i\eta)}{du} = -i(a^2+b^2),$$
$$\frac{d(z+i\zeta)}{du} = 2ab,$$

wo $a = p+qi$, $b = r+is$ willkürliche complexe Funktionen sind, gelangt er zu der allgemeinen Formel

$$\alpha + i\beta = \varpi\left(i\log\frac{a}{b}\right),$$

wo $\varpi$ eine willkürliche Function, die den Bedingungen der conformen Abbildung der Kugel auf die Ebene entsprechend gewählt werden muss. Man erhält somit eine unendliche Anzahl analytischer Darstellungen. Daran knüpft der Verfasser Sätze über die Beziehungen zwischen zwei Minimalflächen, die im Bonnet'schen Sinne conjugirt sind. M.

---

A. CAYLEY. On a special surface of minimum area. Quart. J. XIV. 190-196.

Der Herr Verfasser beschäftigt sich mit der Minimalfläche:

$$(1) \qquad 1+\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu = 0,$$

welche Herr Schwarz in seiner Preisschrift („Bestimmung einer speciellen Minimalfläche“, Berlin 1871, siehe F. d. M. III. 411) untersucht hat. Es wird der Nachweis, dass die Gleichung 1) eine Minimalfläche darstellt, auf anderem Wege geführt, indem die Existenz einer Minimalfläche

$$1+\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu = 0$$

mit den Bedingungsgleichungen

$$\lambda'^2 = a\lambda^4+b\lambda^2+c,$$
$$\mu'^2 = a\mu^4+b\mu^2+c,$$
$$\nu'^2 = a\nu^4+b\nu^2+c$$

$\left(\text{wo } \lambda' = \frac{d\lambda}{dx}, \text{ etc.}\right)$, nachgewiesen wird. Für die Coefficienten $abc$ ergeben sich vier homogene quadratische Gleichungen, deren Lösungen für $a = 1$ sind:

$$b = \tfrac{10}{3},\ c = 1;\ \ b = -1,\ c = 1;\ \ b = -\tfrac{2}{3},\ c = -\tfrac{1}{3}.$$

Daraus folgen die beiden Gleichungen:

$$\lambda'^2 = \lambda^4 - 2\lambda + 1 = (\lambda^2-1)^2,$$

d. h. die Fläche des Herrn Schwarz, aus der nur $x+y+z = \text{const.}$ folgt, und:

$$\lambda'^2 = \lambda^4 - \tfrac{2}{3}\lambda^2 - \tfrac{1}{3} = (\lambda^2-1)(\lambda^2+\tfrac{1}{3}),$$

eine Fläche, welche ganz analoge Eigenschaften mit der ersteren hat. M.

---

L. Henneberg. Ueber solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur geodätischen Linie haben. Diss. Zürich.

Weitere Ausführung der vom Herrn Verfasser der Facultät zu Zürich eingereichten Preisbewerbungsschrift, in welcher — ebenso wie in der Arbeit von A. Herzog (siehe F. d. M. VII. 507) — eine Lösung des von der Facultät gestellten Problems versucht wird: „Eine Minimalfläche analytisch zu bestimmen durch die Bedingung, dass eine vorgeschriebene ebene Curve eine kürzeste Linie derselben sein soll“. Die von denselben Principien ausgehende Behandlung, auf denen die Arbeit des

Herrn Herzog beruht (siehe das oben citirte Referat), führt zu dem Satze: „Dieselbe Relation, welche zwischen den beiden Coordinaten $x$ und $y$ eines Punktes der ebenen geodätischen Linie besteht, verbindet überhaupt die beiden Functionen $U$ und $V$ mit einander, deren reelle Theile die beiden ersten Coordinaten eines Punktes der Minimalfläche sind". Darauf werden die drei speciellen Fälle eingehend behandelt, in denen die ebene geodätische Linie der Fläche eine Ellipse, eine Hyperbel und die Evolute eines Kegelschnittes ist. M.

L. Henneberg. Ueber diejenige Minimalfläche, welche die Neil'sche Parabel zur ebenen geodätischen Linie hat. Wolf Z. XXI. 17-21.

Fortsetzung der Untersuchungen, welche der Herr Verfasser in dem letzten Beispiel seiner Dissertation (siehe oben) veröffentlicht hat. Die Bemerkungen betreffen weitere Eigenschaften der Minimalfläche, welche die Neil'sche Parabel zur ebenen geodätischen Linie hat. M.

L. Kiepert. Ueber Minimalflächen. Borchardt J. LXXXI. 337-348.

Die hier zusammengestellten Sätze und Formeln, welche den von Weierstrass, Schwarz, O. Bonnet und Anderen gegebenen verwandt sind, sollen die Grundlage zu nachfolgenden Arbeiten des Verfassers über Minimalflächen bilden. Den Ausgangspunkt bildet die Darstellung der Minimalflächen durch die Gleichungen:

$$x+iy=\int U^2du+\int V^2dv,$$

$$x-iy=\int U_1^2du+\int V_1^2dv,$$

$$z=i\int UU_1du-i\int VV_1dv,$$

wo $U$, $V$ beliebige complexe Functionen von $u=\xi+i\eta$, $v=\xi-i\eta$, und $U_1$, $V_1$ deren conjugirte sind. Es ist leicht, diese Form in

die von Herrn Weierstrass (Berl. Ber. 1866, 612) gegebene überzuführen. Es ergiebt sich sofort der bekannte Satz, dass sich die Minimalfläche auf die $\xi\eta$-Ebene in den kleinsten Theilen ähnlich abbilden lässt; die Gleichungen $\eta$ = constans, $\xi$ = constans bestimmen auf der Minimalfläche ein System rechtwinkliger Trajectorien.* Dann folgt die Reduction des Doppelintegrals

$$J = \int_0^c d\eta \int_a^b d\xi (UV_1 + U_1 V)^2$$

— für ein einfachzusammenhängendes, von Singularitäten freies Flächenstück — auf ein einfaches (vgl. Schwarz, Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen, Wolf Z. XIX. 243; Borchardt J. LXXX.; siehe F. d. M. VI., 517). Daran schliessen sich die Gleichungen der Asymptoten- und Krümmungslinien (vgl. Ossian Bonnet, Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables, Liouville J. (2) V. 153), die Formeln für die kürzesten Linien und für die Biegungsflächen der Minimalflächen. Die Bedingung, dass eine Minimalfläche durch eine gegebene Curve hindurchgehe, führt schliesslich zu dem von Herrn Schwarz gestellten und von den Herren Herzog und Henneberg behandelten Problem (siehe das obige Referat p. 527). M.

---

## Capitel 4.

## Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

H. Frombeck. Die Grundgebilde der Liniengeometrie. Wien. Ber. 1876.

Neben den linearen Gebilden, welche man in der Liniengeometrie vom projectiven Standpunkte aus zu unterscheiden hat, dem linearen Complex, der Congruenz, der Regelschaar, betrachtet der Verfasser noch besonders gewisse durch metrische Eigenthümlichkeiten ausgezeichnete Fälle, z. B. den „Plancomplex", der von allen geraden Linien gebildet wird, die einer festen Ebene parallel sind, und dergl. Kln.

---

W. Fiedler. Geometrie und Geomechanik. Wolf Z. XXI. 186, 228.

Der Verfasser bespricht in zusammenfassender Darstellung die Fortschritte, welche die Mechanik starrer Körper in neuerer Zeit durch Hereinziehen geometrischer, zumal liniengeometrischer Vorstellungen gemacht hat. In dem Ball'schen Werke (The Theory of Screws, a study in the Dynamics of a rigid body; Dublin 1876; vergl. auch Clebsch Annalen IX. p. 541) erblickt er die endliche Realisation der Idee, der sich von Chasles und Poinsot an die folgenden Forscher successive genähert haben. Kln.

---

A. Voss. Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf die Flächen zweiten Grades. Clebsch Ann. X. 143-189.

Eine consequente Ausbildung der Liniengeometrie im Sinne von Plücker verlangt, alle räumlichen Gebilde aufzufassen, insofern sie durch gerade Linien bestimmt werden, also z. B. eine Fläche als die Gesammtheit ihrer geradlinigen Tangenten. Es entsteht somit die Aufgabe, auch die bereits ausgebildeten Theile der Raumgeometrie von diesem Gesichtspunkte aus einer neuen Bearbeitung zu unterziehen. Eine Andeutung über solche Untersuchungen gab der Verfasser bereits in den Göttinger Nachrichten vom Februar 1875; in dem vorliegenden Aufsatze giebt er ausführlicheren Bericht über dieselben, aber nur erst über den Theil, der sich auf Flächen $2^{\text{ten}}$ Grades bezieht.

Die Tangenten einer Fläche bilden einen Complex, den man als speciellen Liniencomplex zu bezeichnen pflegt, und der dadurch ausgezeichnet ist, dass er einer gewissen partiellen Differentialgleichung genügt, der der Verfasser die folgende Form gegeben hat:

$$\Sigma\left(\frac{d\varphi}{dx_i}\right)^2 = \Delta - \Sigma x_i^2,$$

wo $x_1 \dots x_6$ Liniencoordinaten sind, die der Identität genügen

$$\Sigma x_i^2 = 0.$$

Der Verfasser beginnt nun damit, überhaupt quadratische Formen von beliebig vielen Veränderlichen zu untersuchen, die einer

solchen Differentialgleichung genügen, wobei es sich hauptsächlich um Feststellung der Elementartheiler der Determinante von $\varphi-\lambda\Sigma x^2$ handelt. Die Anwendung der erhaltenen Formeln auf Liniengeometrie giebt zunächst den Begriff von *Polarsextuplen* einer Fläche 2ten Grades: Aggregate von sechs linearen Complexen, die in ähnlicher Weise gruppirt sind, wie die sechs Kanten eines Polartetraeders. Sind zwei Flächen 2ten Grades gegeben, so haben sie im Allgemeinen nur ein Polarsextupel gemein, welches kein anderes ist als das gemeinsame Polartetraeder; aber die besonderen Fälle, die hier eintreten können, sind sehr zahlreich und viel mannigfaltiger, als die Unterscheidungen, die man gewöhnlich beim Systeme zweier Flächen 2ten Grades macht.

Kln.

---

E. d'Ovidio. Alcune proprietà metriche dei complessi e delle congruenze lineari in geometria projettiva. Acc. R. d. Linc. (2) III. 260-268.

E. d'Ovidio. Sulle reti di complessi lineari nella geometria metrico-projettiva. Acc. R. d. Linc. (2) III. 561-581.

E. d'Ovidio. Le serie triple e quadruple di complessi lineari nella geometria metrico-projettiva. Acc. R. d. Linc. (2) III. 723-755.

Diese Aufsätze schliessen sich unmittelbar an diejenigen des Verfassers an, über welche Bd. VII. der Fortschritte p. 514 u. 515 referirt ist. Handelte es sich damals um die Maassfunctionen, welche bei allgemeiner projectiver Massbestimmung in der Untersuchung des Systems zweier linearer Complexe oder Congruenzen auftreten, so werden jetzt der Reihe nach betrachtet: 1) ein Complex und eine Congruenz, 2) zweifach unendliche lineare Systeme (Netze) linearer Complexe in Zusammenstellung mit einem Complex, einer Congruenz, einem Netz, 3) dreifach und vierfach unendliche Systeme von Complexen. Jedesmal werden gewisse Grössen definirt, welche bei der betreffenden Aufgabe als „Abstände" oder „Momente" oder „Projectionen" etc. be-

zeichnet werden können, und diese in doppelter Weise analytisch ausgedrückt: einmal in der Weise, dass die Congruenz, das Netz etc. durch zwei, drei etc. ihm angehörige Complexe vertreten wird und die auf diese bezüglichen Combinanten benutzt werden, das andere Mal so, dass der Congruenz, dem Netz etc. selbst Coordinaten beigelegt und diese bei Aufstellung der Formel gebraucht werden. An diese Entwickelungen knüpft der Verfasser jedesmal noch die Aufstellung identischer Relationen, welche den polyedrometrischen Beziehungen der elementaren Geometrie analog sind. Man sieht, es handelt sich im Grunde um das Studium der Invarianten des simultanen Systems, welches im Raume von einer Fläche $2^{ten}$ Grades und beliebigen linearen Aggregaten linearer Complexe gebildet werden; vielleicht würde die Klarheit der Exposition gewinnen, wenn die Erläuterungen, welche sich allein auf diese linearen Aggregate beziehen, getrennt gehalten würden von denjenigen, in welche die Betrachtung der Fläche $2^{ten}$ Grades mit eingeht. Kln.

---

L. Cremona. Sur les systèmes de sphères et les systèmes de droites. Rep. Brit. Ass. 1876.

Die Mittheilung enthält die Auseinandersetzung einer Methode zur Transformation von Congruenzen (eines zweifach unendlichen Systems) von Linien, welche in einem gegebenen linearen Complexe der Art enthalten sind, dass jeder Linie der Congruenz ein Punkt einer Oberfläche entspricht und umgekehrt. Die Methode entspringt aus der Combination von Transformationen des Raumes von drei Dimensionen, die der Verfasser in Brioschi Ann. (2) V. gegeben hatte, mit den von Noether und Lie gegebenen Transformationen eines linearen Complexes im gewöhnlichen Raume.

Csy. (O.)

---

# Capitel 5.

# Verwandtschaft, eindeutige Transformation, Abbildungen.

## A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

P. Mansion. Sur la théorie des transformations linéaires. N. C. M. II. 15, 41.

Zusammengestellt nach Salmon und Chasles. 1) Fundamentaleigenschaft. 2) Unumkehrbarkeit der linearen Transformationen.

Mn. (O.)

---

M. Legout. Sur la correspondance de deux séries de points d'une courbe. Bull. d. l. S. de Pau (2) IV.

---

W. Fiedler. Die birationalen Transformationen in der Geometrie der Lage. Wolf Z. XXI. 369-383.

Der Verfasser dringt darauf, den systematischen Gang der Geometrie der Lage bis zu den eindeutigen Transformationen in Gebilden höherer Stufe hin zu erweitern. In der That habe man nur mehrere solcher Systeme, wie sie in zwei ineinanderliegenden Ebenen oder Räumen betrachtet werden, also Collineation oder Reciprocität oder deren Involutionen, zusammenzufassen, um die einfachsten eindeutigen Transformationen zu erhalten. So vermitteln ja bekanntlich zwei Kegelschnitte, oder zwei Polarsysteme, die gewöhnliche quadratische Transformation und liefern deren Construction, und im Raume kann man so zu speciellen Fällen der allgemeinen bilinearen Transformation gelangen und immer einfache Constructionen derselben finden.

Es wird dabei nicht erwähnt, dass der systematische Gang der Geometrie der Lage mit demselben Recht auch zu der allgemeinen bilinearen Transformation führt (wie bei Cremona,

Flächen 3[ter] Ordnung), ja, wenn man die Elementargebilde verlässt und zu bestimmten Systemen von Curven, Flächen etc. übergeht, was wohl ebenfalls in jenem Gange liegt, zu allen eindeutigen Transformationen. Aber mit dieser allgemeineren Auffassung steht man dann zugleich auf dem Boden der jetzigen Geometrie überhaupt.

In dem Aufsatze wird, bei den drei Polarsystemen im Raume, L. J. Magnus, „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes", Berlin, 1837, § 83 citirt. Das in diesem Paragraphen behandelte System ist indess das mit den Kanten des Tetraeders als Fundamentalcurve. Ich erwähne bei dieser Gelegenheit eine Lücke, die sich in sämmtlichen mir bekannten Literatur-Zusammenstellungen über eindeutige Raumtransformationen findet. Die Transformation, welche durch drei bilineare Gleichungen vermittelt wird, ist in allgemeinster Form zuerst in dem eben citirten Werke von Magnus, § 84, p. 408 ff. analytisch und geometrisch entwickelt worden. Dabei wird das Entsprechen der beiden Räume im Einzelnen durchgeführt, so das von Gerade und Raumcurve 3[ter] Ordnung, von Ebene und Fläche 3[ter] Ordnung, unter Bestimmung der dabei auftretenden Fundamentalcurven (Cardinalcurven genannt) und -punkte; und ferner werden auch Particularisationen der Transformation in einfachere (quadratische) gegeben. Dagegen findet sich die Anwendung auf die Methode, die Geometrie eines Gebildes aus der des entsprechenden abzuleiten, nur angedeutet, und hierbei besonders wird die eindeutige Transformation von der mehrdeutigen ungenügend unterschieden. Nr.

---

M. C. Paraira. Jets over eene transformatie van den tweeden graad. Nieuw Arch. II. 62-73.

Diese Abhandlung enthält zuerst einige allgemeine Betrachtungen über die Transformation von homogenen Gleichungen vom 2[ten] Grade mit einer unbestimmten Zahl veränderlicher Grössen. Sodann wird eine Anwendung auf geometrische Figuren gemacht, wodurch einige bekannte Eigenschaften von Punktreihen und Flächensystemen erhalten werden. Schliesslich geht der Verfasser

zu einem besondern Falle über, worin die zu transformirende Gleichung die Axengleichung der Ellipse mit dem Anfangspunkte im Mittelpunkte ist. Dabei wird dann auch über die Methode der circularen Inversion gehandelt. G.

---

O. Tognoli. Rappresentazione piana di una classe di superficie algebriche dotata di una curva multipla. Battaglini G. XIV. 263-280, 378-380.

Abbildung der Fläche $(2m+1)^{ter}$ Ordnung mit $m$-facher Raumcurve $3^{ter}$ Ordnung auf die Ebene, nach einer Methode, welche die directe Erweiterung der von Clebsch (Math. Ann. I.) für den Fall $m = 2$ benutzten ist. Die Beziehung ist nämlich gegeben durch die Gleichungen

$$\sum_i x_i \varphi_i(y_1 y_2 y_3) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

wo die $\varphi_i$ homogene Functionen $m^{ter}$ Ordnung der $y$ sind, in Verbindung mit zwei weiteren analogen Gleichungen, in die nur lineare Functionen der $y$ eintreten. Sie ist also eine Verallgemeinerung der für $m = 1$ auftretenden bilinearen Beziehung.

Nr.

---

J. Korteweg. Ueber einige Anwendungen eines besondern Falles der homographischen Verwandtschaft (Affinität). Schlömilch Z. XXI. 28-37.

Herr Korteweg giebt hier einige interessante Anwendungen der räumlichen Affinität, d. h. desjenigen Specialfalls der Collineation (Homographie), bei dem die unendlich fernen Ebenen sich entsprechen, auf die Fragen nach den grössten und kleinsten ein- bez. umgeschriebenen Figuren und auf die Theorie der Trägheitsellipsoide.

Sind zwei Figuren mit einer dritten $A$ affin, so ist auch die kleinste (grösste) der mit einer Figur $B$ affinen der einen von ihnen um- (ein-) geschriebenen Figur homolog mit der kleinsten (grössten) der mit $B$ affinen der andern um- (ein-) geschriebenen.

Gehört demnach von zwei derselben Figur um- und eingeschriebenen die erste zu den kleinsten umgeschriebenen von allen ihren Affinen, so gehört die letzte zu den grössten eingeschriebenen von allen ihren Affinen. Soll z. B. in ein Tetraeder das grösste Ellipsoid eingeschrieben werden, so wird das Tetraeder das kleinste von allen diesem Ellipsoide umgeschriebenen sein. Man construire um eine Kugel das kleinste Tetraeder, beziehe dies affin auf das gegebene, so ist die affine Figur der Kugel das grösste eingeschriebene Ellipsoid. Die Schwerpunkte der Seitenflächen gehen durch Affinität wieder in Schwerpunkte über; also wird das gegebene Tetraeder von dem grössten eingeschriebenen Ellipsoide in den Schwerpunkten seiner Seitenflächen tangirt.

Unter dem Trägheitsellipsoid eines Punktes ist zunächst das Poinsot'sche verstanden, bei dem es sich um die Trägheitsmomente in Bezug auf die durch den Punkt gehenden Axen handelt.

Ist nun ein Körper die affine Transformation eines andern, der in einem gegebenen Punkte $P$ eine Trägheitskugel hat, so ist die affine Figur der Kugel das dem homologen Punkte $P'$ von $P$ zugehörige Trägheitsellipsoid im Culmann'schen Sinne, bei dem es sich um die Trägheitsmomente in Bezug auf die Ebenen durch $P'$ handelt. Es hat, wie bekannt, dieselben Axen wie das Poinsot'sche Trägheitsellipsoid von $P'$, und beide werden gleichzeitig Rotationsflächen. Man mache ein beliebiges Tetraeder mit einem regulären affin; die Trägheitsfläche des letzteren für seinen Schwerpunkt ist eine Kugel, die mit der eingeschriebenen homothetisch ist; folglich hat das Trägheitsellipsoid des beliebigen Tetraeders für seinen Schwerpunkt mit dem grössten demselben eingeschriebenen Ellipsoide identische Axen.

Es lässt sich zu jedem Körper für jeden Punkt $O$ eine Reihe affiner und unter einander ähnlicher Körper construiren, welche im homologen Punkte von $O$ eine Trägheitskugel haben.

Sm.

---

## B. Conforme Abbildung.

G. Holzmüller. Lemniscatische Geometrie, Verwandtschaft und Kinematik, abgeleitet mit Hülfe der Function complexen Arguments $Z = \sqrt{z}$. Schlömilch Z. XXI. 325-363.

Der Verfasser behandelt diejenige conforme Abbildung einer Ebene $xy$ auf einer andern Ebene $XY$, welche durch die Beziehung

$$X + iY = \sqrt{x+iy}, \text{ oder } Z = \sqrt{z}$$

vermittelt wird. Die bekannten Eigenschaften dieser Abbildung, dass jedem Punkte der einen Ebene $xy$ ein Punktepaar der andern $XY$, jeder Geraden der ersten eine gleichseitige Hyperbel der andern, jedem Kreise der ersten eine Lemniscate der andern entspricht etc., werden abgeleitet und eingehend discutirt. Ein Büschel von Kreisen, die in der Ebene $xy$ durch zwei feste Punkte gehen, geht in ein Büschel von Lemniscaten der Ebene $XY$ über, die durch vier feste Punkte gehen und sämmtlich geschlossene Curven bilden. Diejenigen Kreise, welche die des ersten Büschels senkrecht schneiden, gehen dabei in Lemniscaten über, die aus zwei getrennten Theilen bestehen und jene vier Punkte umhüllen. Diese beiden orthogonalen Lemniscatenbüschel und die sich daraus ergebenden Sätze sind jedoch nicht neu (cf. F. d. M. V. p. 427-429).

Die obige Beziehung wird weiter benutzt, um bekannte Sätze, die von Geraden und Kreisen der einen Ebene gelten, auf gleichseitige Hyperbeln und Lemniscaten der andern Ebene zu übertragen, wobei jedoch sämmtliche Hyperbeln und Lemniscaten ihr Centrum im Punkte $Z = 0$ haben. Die durch diese Uebertragung gewonnenen Sätze bezeichnet der Verfasser als lemniscatische Geometrie. Der Satz z. B., dass durch zwei Punkte nur eine Gerade möglich ist, geht dadurch über in den, dass durch zwei Punktepaare nur eine gleichseitige Hyperbel möglich ist (die beiden Punkte eines Punktepaares sind von dem Punkte $Z = 0$ gleich weit entfernt und liegen mit ihm auf einer Geraden). Gleichen Strecken entsprechen correspondirende Hyperbelbogen,

die nicht gleich sind, sondern in einer gewissen anderen Beziehung stehen. Congruenten Kreisen entsprechen correspondirende Lemniscaten, d. h. solche, für welche (ausser dem Mittelpunkte) der Parameter (das constante Product der Radienvectoren) derselbe ist, während der Brennpunktsabstand ein anderer wird. Namentlich werden so einige Sätze über harmonisches Verhältniss von Punkten und Strahlen, sowie über projectivische Punktreihen und Strahlenbüschel in analoge Sätze der lemniscatischen Geometrie übertragen.

Daran schliesst sich folgende Betrachtung: Wenn man in der Ebene $xy$ eine Figur durch reciproke Radienvectoren in eine andere derselben Ebene transformirt und nun den Complex beider Figuren durch die obige Abbildung auf die Ebene $XY$ überträgt, so wird die Beziehung zwischen den beiden Figuren der letzteren Ebene lemniscatische Reciprocität oder isothermische Spiegelung gegen die Lemniscate genannt. Ueber diese neue Transformation wird eine Reihe von Sätzen aufgestellt, die einzeln anzuführen hier zu weit führen würde. Bemerkt mag nur werden, dass bei jener Transformation alle Lemniscaten, die der spiegelnden confocal sind, in confocale Lemniscaten übergehen, jede Hyperbel, die jene confocale Schaar senkrecht schneidet, in sich selbst, jede andere Hyperbel in eine Lemniscate, etc. Durch diese Transformation ergeben sich gewisse Sätze über lemniscatische Verwandtschaft, die Sätzen von der Kreisverwandtschaft analog sind. Endlich gelingt es durch diese Betrachtungen auch, gewisse Abbildungsaufgaben zu lösen, namentlich die Aufgabe: Den von zwei Lemniscaten eines Büschels (cf. die obige Definition) und zwei orthogonalen Lemniscaten begrenzten rechtwinkligen Raum auf den Einheitskreis abzubilden.

Zum Schluss wird noch die Kinematik eines lemniscatisch veränderlichen Systems besprochen, d. h. die (mit Gestaltveränderung verbundene) Bewegung, welche ein System der Ebene $XY$ in ein anderes überführt, falls beide zwei verschiedenen Lagen eines und desselben starren Systems der Ebene $xy$ entsprechen.

Wn.

---

T. N. Thiele. Om Betydningen af cosinus til komplexe Tal. Zeuthen Tidsskr. (3) VI. 177-180.

Der Verfasser betrachtet eine Transformation, welche durch die Formel $x+yi = \cos(X+Yi)$ dargestellt ist. Bei dieser werden die transformirten Coordinaten $x$ und $y$ einfache Functionen der Brennstrahlen in der transformirten Figur, wenn die Punkte $\pm 1$ als Brennpunkte aufgefasst werden. Speciell geht eine mit der $X$-Axe parallele Gerade in eine Ellipse, eine mit der $Y$-Axe parallele in einen einzelnen Hyperbelzweig über, für welche beiden Curven die Punkte $\pm 1$ Brennpunkte sind. Die ganze Ebene $(x+yi)$ wird doppelt genommen erzeugt durch die Transformation desjenigen Theiles der ursprünglichen Ebene, welcher zwischen zwei Abscissen liegt, deren Differenz $2\pi$ ist. Die Transformation kann man sich auf eine mechanische Weise ausgeführt denken, wenn man sich die Ebene als elastisch vorstellt, dieselbe auf einen Cylinder aufwickelt und demnächst wieder auf eine besondere Weise in eine Ebene ausspannt.

Gm.

---

R. Hoppe. Ein Theorem über conforme Abbildung der Flächen auf Ebenen. Grunert Arch. LIX. 58-64.

Das Theorem lautet: „Kann man auf einer reellen Fläche eine stetige Schaar imaginärer Linien analytisch darstellen, deren Bogenelement constant null ist, so ist die Aufgabe der conformen Abbildung eben dieser Fläche auf einer Ebene gelöst“. Dasselbe lässt sich folgendermassen beweisen. Wenn man aus der Gleichung

$$(1)\qquad dx^2+dy^2+dz^2 = 0$$

und der Flächengleichung $z$ eliminirt denkt, so erhält man eine Differentialgleichung 1ter Ordnung und 2ten Grades zwischen $x$ und $y$. Kennt man das Integral derselben

$$(2)\qquad f(x, y) = c,$$

so stellt dies, mit der Flächengleichung zusammen, eine imaginäre Curve auf der Fläche mit dem Parameter $c$ dar, deren Bogen-

element constant null ist. Setzt man dann

$$(3) \qquad f(x, y) = F(u + iv),$$

wobei $F$ eine willkürliche Function ist, so genügen die aus (3) durch Zerlegung in einen reellen und imaginären Theil hervorgehenden Gleichungen zwischen $x, y, u, v$ den Bedingungen, die erfüllt werden müssen, um die gegebene Fläche auf der Ebene mit der rechtwinkligen Coordinate $u, v$ conform abzubilden.

Die einfachste Anwendung dieses Theorems ist die, dass man von einer gegebenen imaginären Raumcurve mit einem veränderlichen Parameter, deren Bogenelement constant $= 0$ ist, ausgeht und dann diejenige reelle Fläche bestimmt, welche durch jene Curvenschaar bei variirendem Parameter erzeugt wird. Von einer Schaar von imaginären Geraden ausgehend, gelangt man so zur bekannten Abbildung der Kugelfläche, von einer gewissen Schaar von Raumcurven 3ter Ordnung ausgehend, zur Abbildung des Kegels. Alle möglichen Curven von der verlangten Eigenschaft (mit Ausnahme der imaginären Geraden) erhält man aus dem Gleichungssystem

$$x + iy = \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}, \quad x - iy = a - 2v + 2u \frac{\partial v}{\partial u},$$

$$z = b - \frac{\partial v}{\partial u} + u \frac{\partial^2 v}{\partial u^2},$$

wobei $v$ eine willkürliche Function von $u$ ist, während $a, b$ willkürliche Constanten sind. Wn.

---

HILLERET. Nouveau système de cartes maritimes, pour la navigation par arcs de grands cercles. C. R. LXXXII. 1095-1096.

Bekanntlich geschieht die Bestimmung des Curses bei der Schifffahrt durch loxodromische Linien, d. h. die Linien, welche alle Meridiane unter constantem Winkel schneiden, und sich demgemäss in Mercators Projection als gerade Linien abbilden. Da diese Linien aber sehr von den geodätischen Linien abweichen, so wird durch diese Art der Cursbestimmung stets ein Umweg bedingt, welcher zwischen Brest und New-York 100,

zwischen Valparaiso und Shangai 687 Seemeilen beträgt. Dem würde, ganz abgesehen von allem Anderen, für ein grosses Packetboot ein Unterschied an Heizungskosten von 800, resp. 5500 Franks entsprechen. Der Verfasser empfiehlt deshalb, Karten anzulegen, welche eine Cursbestimmung durch grösste Kreise gestatten, in welcher sich also diese als gerade Linien abbilden. Dies geschieht bekanntlich bei der gnomonischen Projection, d. h. bei derjenigen perspectivischen Projection, bei der das Projectionscentrum im Mittelpunkte der Kugel liegt. Der Verfasser wählt nun als Projectionsebene die Tangentialebene in einem Punkte des Aequators, erhält also eine sogenannte gnomonische Meridianprojection (vgl. Gretschel, Lehrbuch der Kartenprojection Weimar 1873, S. 47) und berechnet das Netz derselben sowie die sonstigen für seine Zwecke nöthigen Ausdrücke, natürlich ohne Rücksicht auf die Abplattung der Erde. A.

---

W. W. Johnson. Note on the correction of an error in the theory of polyconic projections. Analyst III. 15-16.

Verbesserung eines Fehlers, der sich auf die Darstellung einer Kugel bezieht und sich in der United States Coast survey Report für 1853 findet. Glr. (O.)

---

J. E. Hilgard. Note on the polyconic projection. Analyst III. 117.

Herr Hilgard bemerkt, dass der angezeigte Fehler bereits 1856 von Professor Johnson in derselben Publikation verbessert ist. Er giebt zugleich eine Zeichnung der Kugelprojection.

Glr. (O).

# Zehnter Abschnitt.

## Mechanik.

### Capitel 1.

### Allgemeines. (Lehrbücher etc.)

G. Kirchhoff. Vorlesungen über mathematische Physik. I. Mechanik. Leipzig. Teubner.

Der Verfasser erklärt in der ersten Vorlesung, abweichend von der gewöhnlichen Erklärung, die Mechanik als die Wissenschaft von der Bewegung, und stellt als Aufgabe derselben hin, die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben. Vollständig, d. h. es soll keine Frage, die in Betreff der Bewegungen gestellt werden kann, unbeantwortet bleiben. Darin liegt eine Einschränkung gegenüber der gewöhnlichen Definition. Diese Einschränkung hat der Verfasser acceptirt, um damit die Unklarheiten und Dunkelheiten zu vermeiden, wie sie durch die hergebrachte Definition der Mechanik als Wissenschaft von den Kräften hervorgebracht wurden. Der Verfasser wendet sich sodann zu den weiteren Erklärungen. Indem er sich zunächst auf den Körper mit unendlich kleinen Dimensionen, den materiellen Punkt, beschränkt, erklärt er, was unter Componenten der Geschwindigkeit, Componenten der Beschleunigung zu verstehen sei. Zur Erläuterung der Begriffe dient der Fall eines schweren Punktes

und die Planetenbewegung. Nachdem er sodann den Satz vom Parallelogramm der Kräfte besprochen, stellt er die Gleichungen des Problems der drei Körper auf. In der zweiten Vorlesung geht er dann zur Bewegung eines unfreien Punktes mit Anwendung auf das einfache Pendel über und wendet sich dann, nachdem der Begriff der Masse beleuchtet ist, zu den Lagrange'schen Gleichungen. Es folgen dann in den weiteren Abschnitten die Sätze über Gleichgewicht, Schwerpunkt, Drehungsmomente und die Bewegung eines starren Körpers. In der achten Vorlesung wird das Pendel und der Einfluss der Höhe und der geographischen Breite auf die Schwere besprochen. Die neunte Vorlesung ist dem Einfluss der Drehung der Erde gewidmet.

Nachdem so in den neun ersten Vorlesungen nur materielle Punkte und starre Körper behandelt sind, werden nunmehr die relativen Verschiebungen nicht starrer Körper untersucht. Den Ausgangspunkt bildet die Annahme, dass die Körper stetig ausgedehnte Materie sind, und dass die Bewegung in ihnen sich stetig mit dem Orte ändert. Daraus ergeben sich dann die Druckcomponenten bei Flüssigkeiten und elastischen festen Körpern. Es folgt die Hydrostatik, Gleichgewicht rotirender Flüssigkeiten, Archimedisches Princip, dann die Theorie der Capillarerscheinungen. Die Grundlage bildet hier das Gauss'sche Princip: Wenn zwei verschiedenartige Körper in einer Fläche sich berühren, so wirken in Folge hiervon Kräfte, die ein Potential haben, welches gleich der Grösse der Berührungsfläche, multiplicirt mit einer von der Natur der beiden Körper abhängigen Constanten ist. Das Princip selbst wird nicht abgeleitet, sondern in dieser Hinsicht auf Gauss verwiesen. Die Differentialgleichungen der capillaren Flächen, sowie die Grenzbedingungen werden aufgestellt. Die Differentialgleichung für die Berührungsfläche zweier schwerer Flüssigkeiten wird für den Fall angenähert integrirt, dass sie eine Rotationsfläche ist und die Abstände der betrachteten Punkte von der Rotationsaxe sehr klein oder sehr gross sind. Nun folgen die Differentialgleichungen der Hydrodynamik in der Euler'schen und Lagrange'schen Form. Daran schliesst sich eine Darstellung der neueren hydrodynamischen Untersuchungen, der

von Helmholtz über Wirbelbewegungen, der von Helmholtz und Kirchhoff über freie Flüssigkeitsstrahlen, der Bewegungen eines Körpers in einer Flüssigkeit, namentlich des Ellipsoids und der Kugel. Dabei werden einige Eigenschaften des Potentials abgeleitet, der Ausdruck für das Potential des Ellipsoids verificirt, die Potentialgleichung transformirt.

Es folgen die Schallbewegungen der Luft, wobei die von Helmholtz in seiner „Theorie der Luftschwingungen in Röhren" (Crelle LVII.) entwickelten Resultate abgeleitet werden, sowie die Theorie der cubischen Pfeifen. Nachdem weiter noch der Ausfluss schwerer Flüssigkeiten, sowie einige andere hydrodynamische Probleme ohne Berücksichtigung der Reibung behandelt sind, z. B. die Wellenbewegung, folgen die hydrodynamischen Gleichungen mit Berücksichtigung der Reibung, sowie einige Anwendungen derselben. Den Schluss bilden Abschnitte der Elasticitätstheorie. Diese Abschnitte enthalten hauptsächlich die Resultate früherer Arbeiten von Herrn Kirchhoff selbst, nämlich ausser der Ableitung der allgemeinen Elasticitätsgleichungen die Theorie des unendlich dünnen elastischen Stabes und der unendlich dünnen Platte.

O. Wn.

---

Ph. Gilbert. Cours de mécanique analytique. Paris. Gauthier-Villars

Ch. Sturm. Cours de mécanique. Paris. Gauthier-Villars.

---

H. Résal. Traité de mécanique générale. C. R. LXXXII. 1199.

Uebergabe des 5ten Bandes durch den Verfasser. Ueber den 2ten Band dieses Werkes ist in Band VI. p. 537 berichtet worden. Die beiden folgenden Theile gehören nur noch zum Theil in den eigentlichen Bereich des Jahrbuches. Das ist namentlich mit der ersten Abtheilung des dritten Bandes der Fall, die von der Transformation der Bewegung und der Tansformation der Arbeit handelt. Die zweite Abtheilung desselben Bandes enthält die Anwendung auf

Uhren. Der zweite Theil handelt endlich nach der oben citirten Notiz des Verfassers 1) des moteurs animés, de l'eau et du vent comme moteurs, des machines hydrauliques et élévatoires; 2) Construction des chaudières; théorie des pistons de machines à vapeur; solutions des questions relatives au rendement de ces machines; la déscription et l'étude des principales machines à air chaud et à gaz. O.

---

G. H. Niewenglowski. Lehrbuch der rationellen Mechanik. (Polnisch). Zwei Theile. Paris.

Diese verdienstvolle Arbeit, die Frucht langjähriger Lehrthätigkeit des Autors, ist nach dem Muster französischer Lehrbücher verfasst. Sie empfiehlt sich durch klare Darstellung, durch gut gewählte Beispiele und völlig durchgeführte Rechnungen. Alles Wichtigste aus der Mechanik ist in dem Werke enthalten, und mehrere Partien (z. B. die Attraction, die dynamischen Principien u. a.) sind sehr ausführlich behandelt. Auch sind den beiden Theilen Noten beigefügt, in welchen sich mehrere Zusätze und mathematische Erklärungen befinden. Dn.

---

V. Poncelet. Traité de mécanique appliquée aux machines. Seconde partie. C. R. LXXXII. 1434-1435.

Uebergabe des Bandes an die Akademie durch Herrn Bertrand und Mittheilung eines Theiles der Vorrede zur ersten, 1832 erschienenen Ausgabe. O.

---

A. Ritter. Lehrbuch der technischen Mechanik. 4te Aufl. Hannover.

---

D. Padeletti. Sulle relazioni fra cinematica e meccanica. Battaglini G. XIV. 193-218, 280-297.

Der Verfasser stellt zunächst den Unterschied zwischen Kinematik und Mechanik fest, bespricht dann die Grundbegriffe

Zeit, Raum, Bewegung, Geschwindigkeit, Beschleunigung 1ter und 2ter Ordnung, Hodograph, Aehnlichkeit von Bewegungen, relative Bewegung, Masse, Kräfte etc. Er gelangt durch seine Untersuchung zu einer Theilung der gesammten Mechanik in Kinematik (Zeit), Statik (Kräfte), Geometrie der Massen (Barigeometrie) und Dynamik oder Kinetik (Verbindung aller drei). Nach einer kritischen Besprechung der gewöhnlichen Definitionen für Kraft und Masse wendet er sich im zweiten Theile zur Betrachtung des D'Alembert'schen Princips und der Principien der Mechanik, um zum Schluss noch den Begriff der Maschine zu untersuchen.

O.

---

P. Breton (de Champ). Explication d'un passage de la mécanique analytique de Lagrange relatif à la composition des moments en statique. Liouville J. (3) II. 175.176.

Der Verfasser kommt noch einmal auf die im vorigen Bande bereits besprochene Streitfrage über eine Stelle in Lagrange's „mécanique analytique" (siehe F. d. M. VII. p. 526) zurück. Er recapitulirt den Gedankengang von Lagrange und folgert daraus, dass auch das Wort „elles" (es war in der neuen Ausgabe „ils" daraus gemacht) einen völlig klaren Sinn gäbe und es daher unrecht gewesen sei, in der neuen Ausgabe diese Veränderung vorzunehmen.

O.

---

## Capitel 2.

## Kinematik.

E. Beltrami. Formules fondamentales de cinématique dans les espaces de courbure constante. Darboux Bull. XI. 233.

Bedeuten $x_1\ x_2 \ldots x_n$ die linearen Coordinaten irgend eines Punktes in einem $n$fachen Raume, $x$ aber eine überzählige

Variabele, welche mit jenen Werthen durch die Gleichung verbunden ist:

$$x^2+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=a^2,$$

worin $a$ den Werth einer endlichen Constanten angiebt, so ist, wenn $R$ den constanten pseudosphärischen Radius bezeichnet, das Linearelement $ds$ gegeben durch die Relation

$$\frac{ds^2}{R^2}=\frac{dx^2+dx_1^2+dx_2^2+\cdots+dx_n^2}{x^2}.$$

Betrachtet man nunmehr ein continuirliches System von Punkten und giebt diesem eine unendlich kleine Verrückung, so wird $ds$ eine Variation $\delta ds$ erleiden. Setzt man diese gleich Null und drückt dadurch aus, dass das betrachtete System ein starres sei, so stellen sich die Variationen der Coordinaten, welche aus der Verschiebung des definirten starren Systems hervorgehen, in folgender Form als Functionen der Coordinaten dar:

$$\delta x_r=c_r+\sum_{i=1}^{i=n}c_{ir}x_i-\frac{x_r}{a^2}\sum_{i=1}^{i=n}c_i x_i.$$

Hierin sind die $c_i$ und $c_{ir}$ als willkürliche Functionen der Zeit, multiplicirt mit $\delta t$, der unendlich kleinen Dauer der Verschiebung, aufzufassen. Die Grössen $c_{ir}$ sind nicht unabhängig von einander, sondern durch die Relation $c_{rs}+c_{sr}=0$ für jedes $r$ und $s$ verknüpft, so dass im Ganzen $\frac{n(n+1)}{2}$ willkürliche Grössen $c_r$ und $c_{ir}$ in den $n$ Gleichungen auftreten, welche aus obiger Formel hervorgehen, wenn $r$ die Zahlenwerthe $1, 2, \ldots n$ erhält. Diese $n$ Gleichungen entsprechen vollkommen den Euler'schen, welche sich auf die Kinematik starrer Körper beziehen; denn in diesem Falle ist $n=3$, und die Zahl der willkürlichen Constanten gleich jenen sechs Grössen, welche die Parallelverschiebung und die Drehung des starren Körpers bedingen.

Aus der Reihe interessanter Folgerungen, welche aus jenen $n$ Fundamentalgleichungen hervorgehen, möge die eine hier Platz finden, welche ein eigenthümliches Licht auf die gewöhnliche Theorie der Kinematik zurückwirft. Bekanntlich existirt für die Gebilde in der Ebene bei jeder Verrückung ein Drehungscentrum, nicht aber im Allgemeinen für Gebilde von drei Dimensionen

des Euklidischen Raums; ist dagegen ein Punkt vorhanden, welcher bei einer Verschiebung des Gebildes keine Verrückung erleidet, so tritt mit ihm zugleich eine ganze Schaar von Punkten auf, welche bei der gegebenen Verschiebung unveränderlich bleiben und die Drehaxe bilden. In dem $n$fachen Raume von constanter Krümmung, den Herr Beltrami betrachtet, zeigt sich nun für die Gesetze der Kinematik ein wesentlicher Unterschied, je nachdem $n$ eine grade Zahl oder eine ungrade ist. Ist $n$ eine grade Zahl, so existirt stets ein Punkt, welcher den Charakter eines Drehungscentrums hat; ist dagegen $n$ eine ungrade Zahl, so ist im Allgemeinen kein solcher Punkt vorhanden. Tritt aber bei einer besonderen Verschiebung ein solcher auf, so giebt es mit ihm zugleich eine unendliche Anzahl solcher Punkte, und zwar bilden diese eine Gerade. Schn.

---

F. Lucas. Démonstration nouvelle du théorème de Coriolis. Nouv. Ann. (2) XV. 58-61.

Wenn die Bewegungselemente eines Punktes und diejenigen eines starren Systems in jedem Momente bekannt sind, so sind durch diese Grössen die Elemente der Bewegung bedingt, welche der Punkt zu jeder Zeit relativ gegen das starre System hat. Das Theorem von Coriolis stellt nun bekanntlich die relative Beschleunigung gegen das starre System als Resultante von drei anderen Beschleunigungen dar, nämlich von der absoluten Beschleunigung des Punktes und jenen beiden Beschleunigungen, welche er Beschleunigung der Zugkraft und Beschleunigung der zusammengesetzten Centrifugalkraft genannt hat. Der Beweis, welchen der Verfasser für diese Zusammensetzung giebt, wird durch einfache synthetische Betrachtungen gewonnen.

Schn.

---

G. Schouten. Oploesing der prijsvrag No. 7. Nieuw Arch. II. 76-96.

Die aufgeworfene Frage ist: Wenn ein Punkt eine Bahn

beschreibt und aus einem willkürlich angenommenen Punkte sind Geraden gezogen worden, welche in jedem Augenblicke die Geschwindigkeit des bewegten Punktes in Richtung und Grösse darstellen, so bilden die Endpunkte dieser Linien eine Curve, den sogenannten Hodograph. Man will nun die Curve für verschiedene Bewegungsfälle aufsuchen und ihren Zusammenhang mit der Bewegung des Punktes untersuchen.

Die Auflösung enthält zunächst eine allgemeine, doch sehr elementare Theorie des Hodographen und dann eine Anwendung auf die einfachsten Bewegungsfälle, insbesondere die Bewegung eines Punktes in Kegelschnitten nach dem Newton'schen Gesetze.

G.

---

H. Brocard. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 221-223.

Zwei Punkte durchlaufen zwei Gerade in derselben Ebene. Es sei zur Zeit $t$ $c$ der durchlaufene Raum, $v$ die Geschwindigkeit des ersten Punktes, $c_1$, $v_1$ dasselbe für den zweiten Punkt. Besteht dann die Relation $v(a_1+b_1c_1) = v_1(a+bc)$, wo $a$ und $b$ Constante, so umhüllt die Verbindungsgerade der beiden Punkte einen Kegelschnitt, dessen Natur untersucht wird. O.

---

Moret-Blanc. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 36-37.

Für zwei krumme Oberflächen mit gemeinsamer Generatrix $A$ werden die Berührungspunkte bestimmt. Dann bleibt die eine fest, während die andere eine Translationsbewegung parallel $A$ und eine Rotationsbewegung um $A$ hat. Der Verfasser leitet die Gleichungen her, welche die Lage der Berührungspunkte am Ende der Zeit $t$ bestimmen. O.

---

C. Moshammer. Zur Geometrie der Schraubenbewegung und einer Regelfläche dritter Ordnung. Wien. Ber. 1876.

Nach den umfassenden Arbeiten von A. Mannheim und

Ch. Brisse, welche die Bewegung starrer Systeme zum Gegenstande haben, bieten die vorliegenden Studien wenig Interesse.

Schn.

---

S. Roberts. Further note on the motion of a plane under certain conditions. Proc. L. M. S. VII. 216-225.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. C.

---

A. Mannheim. Sur les surfaces trajectoires des points d'une figure invariable. Mém. prés. de Paris. XXV.

---

C. Seidelin. Konstruktion af Krumningscentre for plane Kurver, frembragte ved en uforanderlig Figurs Bevägelse i Planen. Zeuthen Tidsskr. (3) VI. 57-63.

Es werden hier mehrere bekannte Constructionen über Krümmungscentra ebener Curven im Zusammenhange dargestellt und mit ziemlich einfachen rein geometrischen Beweisen versehen. Die Hauptconstruction ist die unter dem Namen Savary's bekannte, welche mittelst der Theorie der augenblicklichen Drehungspunkte bewiesen wird. Diese Construction wird zuerst auf verschiedene specielle Curven angewandt und dann für alle solche Curven erweitert, welche durch die Bewegung einer unveränderlichen ebenen Figur in der Ebene erzeugt werden können, indem gezeigt wird, dass solche Bewegung stets auf die Betrachtung rollender Curven zurückgeführt werden kann. Von derselben Construction werden noch verschiedene Modificationen angegeben.

Gm.

---

S. A. Renshaw, Wolstenholme. Solution of a question (4985). Educ. Times XXVI. 37.

Es mögen $P$ und $Q$ 2 Punkte einer Parabel mit den Durchmessern $PE$ und $QD$ sein. Die Tangente $PT$ ($T$ auf $QD$) werde

in $C$ halbirt. Wenn dann um $C$ eine Gerade $MCN$ oscillirt, deren Punkte $M$ und $N$ sich auf $PE$ und $QD$ bewegen, so bewegt sich der Schnittpunkt $R$ der um $P$ und $Q$ sich drehenden Geraden $PN$ und $QM$ auf der Parabel. O.

---

A. Minozzi. Nota sul movimento d'una curva sopra un' altra adesso eguale. Battaglini G. XIV. 190-192.

Von einem Punkte $A$ der festen Curve $F$ wird ein Loth auf die gemeinsame Tangente der Curven gefällt und ebenso von dem homologen Punkte $A'$ der rollenden Curve $F'$. Es wird der Ort des Schnittpunktes $K$ von $AA'$ mit der gemeinsamen Tangente auf analytischem Wege bestimmt und dies auf die Kegelschnitte angewandt. O.

---

S. Roberts. On three-bar motion in plane space. Proc. L. M. S. VII. 14-23.

Wenn in der Ebene drei starre gerade Strecken $OA$, $AB$, $BO'$ so mit einander in Verbindung gedacht werden, dass sie in $A$ und $B$ beweglich sind, so wird, wenn $OA$ sich um den festen Punkt $O$ und $O'B$ sich um den festen Punkt $O'$ dreht, die Strecke $AB$ eine bestimmte Bewegung machen, und jeder Punkt $C$, welcher mit $A$ und $B$ in starrer Verbindung steht, eine dieser Bewegung entsprechende Bahn beschreiben. Diese Bahn ist eine Curve 6ter Ordnung mit drei Doppelpunkten und hat die Kreispunkte der Ebene zu dreifachen Punkten. Die Doppelpunkte liegen auf einem Kreise, welcher durch $O$ und $O'$ hindurchgeht, und in welchem der Peripheriewinkel über $OO'$ die Grösse des Winkels $C$ hat. Auf diesem Kreise liegen zugleich noch drei andere bemerkenswerthe Punkte; es sind das die drei reellen Durchschnittspunkte der imaginären Kreisasymptoten, welche Herr Laguerre die foyers singuliers genannt hat. Von diesen drei Brennpunkten fallen zwei mit $O$ und $O'$ zusammen, der dritte aber $O''$ liegt so, dass er mit $O$ und $O'$ ein Dreieck bildet, welches mit $ABC$ ähnlich ist, und zwar entspricht der Winkel $O$

dem Winkel $A$, der Winkel $B$ dem Winkel $O'$ und der Winkel $C$ dem Winkel $O''$.

Da die drei Brennpunkte in solcher Beziehung zur Bahn des Punktes $C$ stehen, so hätte diese auch erzeugt werden können, wenn man $O$ und $O''$ als feste Centra von Leitkreisen genommen und den betreffenden Strecken passende Längen gegeben hätte, und in gleicher Weise hätte man auch $O'$ und $O''$ unter den drei Brennpunkten als feste Centra auswählen können. Was endlich die Beziehungen betrifft, welche zwischen den Radien der verschiedenen Leitkreise und den Seiten der zugehörigen Dreiecke bestehen, so ergiebt die Untersuchung Folgendes:

Bilden die drei Brennpunkte ein Dreieck $OO_1O_2$ und sind $ABC$, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ die bewegten Dreiecke, welche bezüglich den Centren $(O_1O_2)$, $(OO_2)$ und $(OO_1)$ entprechen, so ist, wenn $a$, $b$, $c$ die den Winkeln $A$, $B$, $C$ gegenüberliegenden Seiten bedeuten und für die anderen Dreiecke die analoge Bezeichnung gewählt wird,

$$O_1A = c_2 \qquad O_2B_1 = a \qquad OC_1 = a_2$$
$$O_1A_2 = b \qquad O_2B = c_1 \qquad OC_2 = b_1.$$

Es findet daher die Relation statt;

$$OC_1 . O_1A_2 . O_2B = OC_2 . O_1A . O_2B_1.$$

Die Seiten der drei Dreiecke sind, wenn $r$ und $s$ die Radien der Leitkreise mit den festen Centren $O_1$ und $O_2$ bezeichnen, in der Form

$$(a, b, c), \quad \left(\frac{a}{c}\cdot s, \ \frac{b}{c}\cdot s, \ s\right), \quad \left(\frac{a}{c}\cdot r, \ \frac{b}{c}\cdot r, \ r\right)$$

darzustellen. Schn.

---

A. Cayley. Three-bar motion. Proc. L. M. S. VII. 136-166.

Wenn zwei Stangen, von denen eine jede um einen festen Punkt drehbar ist, mit einer dritten Stange durch bewegliche Glieder verknüpft sind, so ist diesem Dreistangensystem eine bestimmte Bewegung möglich. Bei derselben wird jeder Punkt, welcher mit der mittleren Stange fest verbunden ist, eine Bahn

durchlaufen; die Natur derselben bildet den Gegenstand vorliegender Abhandlung. Herr Roberts hatte (siehe p. 551) eine Reihe interessanter Eigenschaften derselben entwickelt, unter anderem die, dass die Curve drei Brennpunkte und drei Doppelpunkte besitzt, und dass dieselbe Bahncurve auf dreifache Art durch eine Dreistangenbewegung erzeugt werden kann. Diese Eigenthümlichkeiten werden hier von anderen Gesichtspunkten aus entwickelt, und eine Reihe anderer hinzugefügt. Von diesen mag noch eine an dieser Stelle Erwähnung finden, welche sich auf die Lage der Brennpunkte und Doppelpunkte und ihre Bedeutung für die Natur der Curve bezieht. Der beschreibende Punkt bestimmt mit der mittleren Stange ein in sich starres Dreieck; ein bestimmter Punkt hat gegen die Drehpunkte der Seitenstangen dieselbe Lage, wie jener zu der Mittelstange, d. h. er bestimmt mit ihnen ein Dreieck, welches ähnlich mit jenem ist. Die Eckpunkte dieses Dreiecks bilden die drei Brennpunkte und auf dem durch sie bestimmten Kreise liegen die drei Doppelpunkte. Die Bahncurve ist von der Länge der drei Seitenstangen abhängig und von der Gestalt des Dreiecks, welches der beschreibende Punkt mit der mittleren Stange bildet. Ist dieses in seiner Gestalt gegeben, d. h. sind seine Winkel gegebene Grössen, so ist die Bahncure allein durch die Länge der drei Stangen bedingt. Da die drei Brennpunkte aber durch die Gestalt jenes Dreiecks in ihrer gegenseitigen Lage gegeben sind, so müssen die Doppelpunkte aller Curven, welche bei Veränderung jener drei Parameter möglich sind, auf dem Kreise liegen, welcher durch die Brennpunkte bestimmt ist. Indessen ist es nicht möglich, diese drei Doppelpunkte willkürlich auf dem Kreise zu nehmen, vielmehr ist einer die Folge der beiden anderen. Das Gesetz, welches sie verknüpft, ist folgendes: Wenn man von einem beliebigen Punkte aus auf jenem Kreise die Länge der drei Bogen misst, welche zu den Brennpunkten, und andererseits diejenigen, welche zu den Doppelpunkten führen, so ist die Summe jener gleich der Summe dieser drei Bogen. Durch Annahme zweier Doppelpunkte auf dem Kreise sind zwei Parameter bestimmt; da der dritte eine Folge jener Annahme,

so bleibt ein variabeler Parameter übrig, d. h. es giebt eine einfach unendliche Schaar von solchen Bahncurven, wie sie die Dreistangenbewegung erzeugt, welche dieselben drei Brennpunkte und dieselben drei Doppelpunkte besitzen. Schn.

---

W. Hayden. On parallel motion. Rep. Brit. Ass. 1876.

In dieser Arbeit werden einige Fälle von angenäherter paralleler Dreistangen-Bewegung mitgetheilt, die sich auf gewisse numerische Uebereinstimmungen gründen. Csy. (O.)

---

J. Wilson. On parallel motions. Proc. of Edinb. IX. 161-170.

Bericht über einige parallele Bewegungen. 1) Watt's parallele Bewegung. 2) Der Reciprocator (Peaucellier's Bewegung). 3) Das Gorgonenwerk. Dies ist ein aus zwei Stangen bestehendes Stangenwerk, wo das eine Ende der einen Stange sich auf einer geraden Linie bewegt, während sich das andere Ende auf einer zur ersten senkrechten bewegt. 4) Hypocycloidische parallele Bewegung. Glr. (O.)

---

P. Mansion. Les compas composés de Peaucellier, Hart et Kempe. N. C. M. II. 129-130.

Zeichnung der Geraden und des Kreises mit dem siebenstäbigen Apparat von Peaucellier, dem fünfstäbigen von Hart und dem quadruplanen von Kempe. Mn. (O.)

---

A. B. Kempe. On a general method of describing plane curves of the $n^{th}$ degree by linkwork. Proc. L. M. S. VII. 213-216.

Beschreibung eines Stabwerkes und Nachweis, dass, wenn ein Punkt desselben eine Gerade beschreibt, ein anderer eine Curve beschreibt. O.

---

W. W. JOHNSON. Recent results in the study of linkages. Analyst III. 42-46, 70-74.

Vollständiger Bericht über die Arbeiten von Sylvester, Hart, Kempe, Cayley und Darwin über Gelenkführungen, die zuerst durch Peaucellier's Untersuchung über genaue geradlinige Bewegung hervorgerufen wurde. Ein genaueres Referat zu geben ist überflüssig, da über die Originalarbeiten bereits in den Fortschritten berichtet ist. Glr. (O.)

---

W. W. JOHNSON. Note on the kite-shaped quadrilateral. Messenger (2) V. 159-160.

Das sechsstangige Gliederwerk, welches von Sylvester „quadratic binomial extractor“ genannt worden ist, kann durch ein vierstangiges ersetzt werden. Es sei $OCBA$ ein Viereck, in dem $OC = CA = b$, $OB = BA = a$. Wenn dann $PC = b$ auf der Verlängerung von $AC$ und $BQ = b$ auf der Verlängerung von $AB$, so sind $P, O, Q$ Anfangs-, Mittel- und Endglied einer Kette, in welcher $r^2 - \varrho^2 = 4(a^2 - b^2)$. Mit Hülfe dieser Kette kann allgemein ein Kreis in eine Curve $6^{ten}$ Grades transformirt werden. Der Verfasser betrachtet auch ein Gliederwerk, durch welches ein Kreis in eine bicirculare Curve $4^{ten}$ Grades transformirt werden kann. Glr. (O.)

---

W. W. JOHNSON. Note on four-bar linkages. Messenger (2) V. 190-192.

Wenn über den Seiten $AB$, $AC$, $DB$, $DC$ (wobei zwischen $AB$ und $BA$ unterschieden wird) ähnliche Dreiecke ähnlich liegend construirt werden, so bilden die Spitzen dieser Dreiecke ein Parallelogramm, dessen Seiten ein constantes Verhältniss zu den Diagonalen haben und constante Winkel mit ihnen bilden. Diese Verhältnisse sind die der Seiten der construirten Dreiecke zu ihren Basen und die Winkel sind die Basiswinkel der Dreiecke. In 2 Fällen, wo die Diagonalen constante Winkel machen, wird das Parallelogramm constante Winkel haben. So ist aus Hart's

Contraparallelogramm Sylvester's Quadruplane hergeleitet. Dieselbe Construction wird auch auf das Viereck, dessen Diagonalen rechte Winkel bilden, angewandt. Glr. (O.)

---

Weitere Aufgaben aus der Kinematik, gelöst von A. TOURNOIS, MORET-BLANC, finden sich Nouv. Ann. (2) XV. 229, 230.

O.

---

## Capitel 3.

## Statik.

### A. Statik fester Körper.

L. CREMONA. Elemente des graphischen Calculs. Autorisirte deutsche Ausgabe, unter Mitwirkung des Verfassers übertragen von Maximilian Curtze. Leipzig. 1875.

Siehe F. d. M. VI. p. 541. Ein Referat von Cantor über die Uebersetzung findet sich in Schlömilch Z. XXI. Hl. A. 19-20.

O.

---

L. ROLLE. Elementi di statica grafica. Milano. Hoepler.

Dies Buch ist für Schüler geschrieben, welche die ersten Elemente der elementaren Statik kennen. Neues enthält es nicht. Der Verfasser beginnt mit der Auseinandersetzung der von Culmann gegebenen Regeln für die graphische Zusammensetzung von Kräften in einer Ebene und für die Reduction und Zusammensetzung der Momente paralleler Kräfte. Dies geschieht in gewöhnlicher Weise, doch sind die Beweise nicht überall sorgfältig durchgeführt. Auch Form, Stil und Sprache lassen zu wünschen übrig. Jg. (O.)

---

F. Steiner. Die graphische Zusammensetzung der Kräfte. Wien. Gerold.

Das Buch behandelt die Zusammensetzung der Kräfte im Raume. O.

---

H. Léauté.. Note sur le tracé des engrenages par arcs de cercle; perfectionnement de la méthode de Willis. C. R. LXXXII. 507-509.

Es handelt sich darum, bei Construction von Zahnrädern die Epicycloiden durch Kreise zu ersetzen. Im ersten Theil untersucht der Verfasser daher, welcher Kreis am geeignetsten zum Ersatz des Epicycloidenbogens dienen könne, und giebt dann im zweiten Theile die Methode zur Construction an. Eigentlich mathematisch Interessantes bietet die Arbeit nicht. O.

---

H. Durrande. Ueber die Anwendung der Determinanten in der Theorie der Kräftemomente. Uebersetzt von K. Zan. Casopis V. (Böhmisch).

Vergl. Nouv. Ann. 1873 (siehe F. d. M. V. p. 455.)

W.

---

G. Darboux. Étude sur la réduction d'un système de forces, de grandeurs et de directions constantes, agissant en des points déterminés d'un corps solide, quand ce corps change d'orientation dans l'espace. C. R. LXXXIII. 1284-1286.

Unter den Kräftesystemen, welche auf einen Körper wirken, sind die wichtigsten vielleicht die, welche nur aus parallelen Kräften bestehen, und die sich zu einer Kraft, parallel der betrachteten, vereinigen lassen, deren Angriffspunkt der sogenannte Kräftemittelpunkt paralleler Kräfte ist. Der Gedanke, zu untersuchen, ob nun auch Systeme beliebiger Kräfte zu Analogien führen

würden, lag nahe, d. h. zu untersuchen, wie die Wirkung eines Systems von Kräften, die in bestimmten Punkten einen festen Körper angreifen, variirt, wenn die Lage des Körpers im Raume sich ändert, während die Grösse und die Richtung der Kräfte unverändert bleiben, oder wenn die Lage des Körpers unverändert bleibt, während die Richtung der Kräfte, unter Beibehaltung der Winkel unter einander, sich ändert. Möbius und Minding haben in dieser Beziehung Untersuchungen angestellt. Letzterer hat namentlich den Satz gefunden, dass, wenn der Körper in eine Lage gebracht wird, wo das Kräftesystem eine einzige Resultante hat, diese zwei Curven schneidet, welche eine feste Lage im Körper haben und focale Ellipse und Hyperbel sind.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit denselben Untersuchungen. Neu eingeführt wird der Begriff eines Centralellipsoids, analog dem, welches in der Theorie der Trägheitsmomente auftritt. Mit Hülfe dieses Ellipsoids wird unter anderm folgender Satz bewiesen: „Wenn ein Körper der Wirkung eines Systems von Kräften unterworfen ist, dessen allgemeine Resultante Null ist, so giebt es wenigstens vier Lagen des Körpers, für welche die Kräfte sich Gleichgewicht halten. Es kann deren auch eine grössere Zahl geben.“ Möbius glaubte, dass, wenn in vier Lagen Gleichgewicht vorhanden sei, dies auch in allen andern der Fall sein müsse. Bei einem beliebigen System von Kräften, die an einem festen Körper angreifen, giebt es für jede Lage eine centrale Axe der Momente. Die Lagen dieser Axen gehören einem Complexe zweiter Ordnung an. Möbius hatte ferner gezeigt, dass jedes Kräftesystem zwei Hauptrotationsaxen hat. Der Verfasser zeigt, dass diese Geraden bei Veränderung der Richtung der Kräfte in dem obigen Sinne die geradlinigen Generatricen einer Familie von homofocalen Flächen zweiten Grades sind.

Das ist nach dem vorliegenden Auszug der Hauptinhalt der Arbeit. Die Notiz giebt dann noch weitere Andeutungen über die Anwendung dieser Theorie. Sodann geht der Verfasser zur Besprechung der drei verschiedenen Arten der Zusammensetzung solcher Kräfte über. 1) Zusammensetzung von Kräften, die in einem Punkte angreifen, 2) Zusammensetzung von parallelen

Kräften, 3) Translation einer Kraft an einen Punkt ihrer Wirkungsrichtung. Er bespricht kurz die Wirkung einer Richtungsveränderung für die drei Fälle. O.

---

A. Kurz. Reduction eines gegebenen Kräftesystems. Hoffmann Z. VII. 377-378.

Der Verfasser zeigt, dass man auch ohne Operation mit Kräftepaaren durch directe Zusammensetzung der parallelen Kraftcomponenten zu der bekannten Reduction gelangen kann, er zeigt aber nicht, dass dies einfacher sei. H.

---

R. Sturm. Sulle forze in equilibrio. Brioschi Ann. (2) VII. 217-246.

Der Verfasser beweist zunächst, dass Kräfte auf vier Geraden einer Regelschaar sich im Gleichgewicht befinden, wenn das Kräftepolygon geschlossen ist. Mit Hülfe der linearen Construction der linearen Congruenz und des linearen Complexes aus vier, resp. fünf Geraden wird dann der Beweis geführt, dass die Wirkungslinien von fünf, resp. sechs in Gleichgewicht befindlichen Kräften sich in derselben linearen Congruenz, resp. demselben Complex befinden, und dies zu weiteren Sätzen über den Ort der Wirkungslinien einer Kraft benutzt, die mit ganz oder nur durch ihre Wirkungslinien gegebenen Kräften äquivalent ist. Im zweiten Theile werden dann Sätze über die Gleichungen zwischen den Coordinaten der Wirkungslinien von in Gleichgewicht befindlichen Linien gegeben, die von Möbius, Sylvester und Cayley herrühren. (Siehe auch das Referat des Verfassers in Königsberger's Repertorium p. 387.) O.

---

J. W. Gibbs. On the equilibrium of heterogeneous substances. Trans. of Conn. III. 108-248.

Da augenblicklich nur ein Theil der Arbeit erschienen ist, wird es gerathen sein, das Referat zu verschieben, bis auch das Ende erschienen sein wird. O.

---

D. Padeletti. Sulla teoria dei poligoni e delle curve funicolari. Battaglini G. XIV. 14-47.

Der Verfasser will in dieser Arbeit die Analogie, welche zwischen der Curve, die unter Wirkung gegebener Kräfte ein biegsames Seil im Gleichgewichte annimmt, und der Bahn eines unter Wirkung derselben Kräfte stehenden materiellen Punktes existirt, darlegen. Er betrachtet daher die Probleme in ihrem Zusammenhange, leitet eine Reihe grösstentheils bekannter Sätze ab und ordnet sie übersichtlich an, so dass diese Analogie überall deutlich in die Augen springt. Auch finden sich überall die nöthigen Literaturnachweise. O.

---

E. Hagenbach. Die auf dem Wasserstrahl schwebende Kugel. Pogg. Ann. 159, 497-514.

Die Arbeit enthält neben der Beschreibung der Erscheinungen, welche die auf dem Wasserstrahl schwebende Kugel zeigt, eine theoretische Erörterung über diesen Gegenstand. Es sei $v$ die Geschwindigkeit des aufstossenden Wassers, $m$ die Masse des in der Längeneinheit des Strahls enthaltenen Wassers, der Punkt $A$, in welchem das Wasser die Kugel trifft, liege um den Bogen $\alpha$ vom tiefsten Punkte der Kugel entfernt. Der Stoss des Wassers wird dann in zwei Componenten zerlegt, eine radiale $R$, eine tangentiale $T$

$$R = mv^2 \cos\alpha, \quad T = \beta mv^2 \sin\alpha.$$

Die Componente $T$ hat noch den Factor $\beta$ erhalten, der kleiner als 1 ist, weil der Strahl die Kugel in der Richtung der Bewegung durch Reibung mitnimmt. Als Angriffspunkt von $T$ wird ferner nicht der Punkt $A$ angenommen, sondern ein von ihm um den Winkel $\varepsilon$ in der Richtung der Bewegung abliegender Punkt $A_1$, weil das Wasser auf einer gewissen ausgedehnten Strecke auf die Kugel wirkt, nicht in einem Punkte. Zu diesen Kräften nimmt der Verfasser noch eine dritte hinzu. Die Erfahrung zeigt nämlich, dass das abgelenkte Wasser der Kugeloberfläche eine gewisse Strecke weit folgt in Folge der

Adhäsion zwischen Kugel und Wasser. Diese Kraft wird aufgefasst als eine Centrifugalkraft, die die Kugel in der Richtung des Radius nach aussen zieht. Folgt das Wasser der Kugel längs eines Bogens $= 2\varphi_1$, so wird die Resultante dieser Centrifugalkraft

$$C = 2mv^2 \sin^2\alpha \sin\varphi_1,$$

ihr Angriffspunkt steht um $\varphi_1$ von $A_1$ ab, ihre Richtung ist die des Radius des Angriffspunktes. Die genannten drei Kräfte, die in derselben Ebene liegen, werden in den Schwerpunkt der Kugel verlegt, dort in eine horizontale und eine verticale Componente zerlegt. Das Schweben der Kugel erfordert dann, dass die Summe der horizontalen Componenten für sich verschwindet, die Summe der verticalen zusammen mit dem Gewicht der Kugel. Es verschwinden aber nicht die von jenen Kräften herrührenden Drehungsmomente, sondern diese geben eine Drehung um eine Axe, die horizontal ist und senkrecht zu der Ebene steht, in der $R, C, T$ liegen. Das Verschwinden der verticalen Componenten giebt immer ein stabiles Gleichgewicht, während die Stabilität des Gleichgewichts der horizontalen Componenten von dem Werthe von $\alpha$ abhängt. Mit einer ausführlichen Discussion über diese Stabilität schliesst die Arbeit. Wn.

---

V. Schlegel. Zwei Sätze vom Schwerpunkt.
Schlömilch Z. XXI. 450-451.

Der Verfasser beweist, unter Anwendung der Methoden der Ausdehnungslehre, die folgenden beiden Sätze:

1) Jede durch den Schwerpunkt von $n$ festen Punkten gelegte Ebene hat die Eigenschaft, dass die Summe der Entfernungen der $n$ Punkte von der Ebene gleich Null ist.

2) Der Abstand des Schwerpunktes der Eckpunkte eines Polygons von einer beliebigen Geraden ist gleich dem arithmetischen Mittel aus den Abständen der Eckpunkte.

Wn.

---

T. E. Thieme. Höhe des Schwerpunktes eines Pyramidenstutzes, dessen Dichtigkeit von der unteren bis zur oberen Fläche sich progressiv verändert. Grunert Arch. LIX. 101-103.

Eine weitere Anwendung der vom Verfasser in Grunert's Archiv LVIII. p. 185 (s. F. d. M. VII. p. 130) publicirten Grenzwerthrechnung zur Lösung der im Titel genannten Aufgabe.

O.

---

H. Résal. Note sur la détermination du centre de gravité du volume du tronc de prisme droit à base triangulaire. Nouv. Ann. (2) XV. 289-292.

E. Brassine. Centre de gravité du tronc de prisme triangulaire oblique. Nouv. Ann. (2) XV. 465-466.

Beide Verfasser zerlegen das Prisma in drei Tetraeder. Herr Brassine folgert noch drei Sätze: 1) Wenn man durch den Schwerpunkt eine Parallele zu den Kanten zieht, die durch die beiden Basen begrenzt wird, so theilt dieser Schwerpunkt sie in gleiche Theile. 2) Die wahren Entfernungen des Schwerpunktes von den Basen verhalten sich wie die Sinus der Neigungswinkel der Seiten gegen diese Basen, etc. O.

---

Walberer. Noch einmal zur Theorie des Keiles. Bayr. Bl. XII. 112-116.

Der Verfasser tritt zu Gunsten der von ihm in der nämlichen Zeitschrift vorgetragenen mehrfach bestrittenen Theorie ein; wir haben bereits im Jahresbericht für 1872 (S. 450 ff.) erörtert, dass und warum uns seine Anschauung mit den Grundgesetzen der Mechanik nicht zu harmoniren scheint. Gr.

---

G. Dötsch. Auch eine Bemerkung zur Theorie des Keiles. Bayr. Bl. XII. 257-259.

**Ableitung der üblichen Annahmen aus der verallgemeinerten Voraussetzung, dass zwei mit dem Keile fest verbundene Kräfte irgendwo und unter beliebigen Winkeln an dessen Seitenflächen angreifen.** Gr.

---

G. Jung. Sul problema inverso dei momenti d'inerzia di una figura piana; soluzione grafica generale. Rend. Ist. Lomb. (2) IX. Polit. XXIV.; Rep. Brit. Ass. 1876.

G. Jung. Sul problema dei momenti resistenti di una sezione piana; soluzione grafica generale. Rend. Ist. Lomb. (2) IX. Polit. XXIV.; Rep. Brit. Ass. 1876.

G. Jung. Sui problemi inversi dei momenti d'inerzia e di resistenza di una sezione piana. Rend. Ist. Lomb. (2) IX. Polit. XXIV.

Wenn $\triangle J$ die Fläche eines Elementes einer ebenen Figur $J$ ist und $x$ seine Entfernung (in der Richtung einer willkürlichen Geraden $\lambda$) von einer gegebenen Axe $\xi$, so wird die Summe

$$\Sigma x^2 \triangle J = T = Jk^2,$$

ausgedehnt über alle Elemente von $J$, das Trägheitsmoment von $J$ bezogen auf die Axe $\xi$ in der Richtung $\lambda$ (und $k$ der Trägheitsradius) genannt.

Wenn $\xi$ durch den Schwerpunkt $O$ von $J$ geht (wenn also $\xi$ barycentrische Axe ist), und es werden die Tangenten an die Begrenzung von $J$ parallel zu $\xi$ gezogen, und es ist $v$ die Entfernung (in der Richtung $\lambda$) des Schwerpunktes von den Tangenten, so wird das Verhältniss

$$\frac{J}{v} = R$$

das „Widerstandsmoment der Figur $J$ in Bezug auf die Axe $\xi$ in der Richtung $\lambda$ genannt". Setzt man $\frac{k}{v} = r$, so ist $R = J.r$, und es ist $r$ „der Widerstandsradius der Figur $J$ in Bezug auf die Axe $\xi$ in der Richtung $\lambda$".

Nach dieser Recapitulation der Definitionen wenden wir uns

zu den vier in den citirten Noten behandelten Problemen. Es sind die folgenden:

Gegeben sind der Schwerpunkt, die Orientation nach zwei Axen und alle Verhältnisse zwischen den Dimensionen einer ebenen Figur der gegebenen Art mit nicht verflochtener Contour und ausserdem der Trägheitsradius *k* oder das Trägheitsmoment *J* oder der Widerstandsradius *r* oder das Widerstandsmoment *R* in Bezug auf eine beliebige barycentrische Axe: die ebene Figur zu construiren. Die graphischen Lösungen sind allgemein, aber völlig elementar, indem sie sich auf die Elemente der projectivischen Geometrie und der graphischen Statik stützen. Der Verfasser beginnt in allen vier Fällen damit, das directe Problem zu lösen, nämlich nach der Culmann'schen Methode zu bestimmen: den Trägheitsradius oder das Trägheitsmoment oder den Widerstandsradius oder das Widerstandsmoment einer Figur *J'*, homothetisch zur gesuchten Figur; und dann eine Figur *J* zu construiren, homothetisch zu *J'*, mit Hülfe einer Beziehung, deren Bestimmung gezeigt wird. *J* löst dann das Problem.

Diese Probleme scheinen von Wichtigkeit in Hinblick auf die Praxis der Constructionen, und grade ihre geometrische Lösung scheint praktischer, als die analytische, wenn man voraussetzt, dass die Figur und ihr Querschnitt in alle Theile zerlegt werden können, so dass man analytisch ihre Trägheitsmomente bestimmen kann, und specielle Kunstgriffe für einige besondere Fälle sucht. (Für die Querschnitte von Eisen ist es nöthig, gewisse bestimmte und leicht berechenbare Typen anzunehmen). Dies geht gleichmässig und allgemein für beliebige Figuren, regelmässige und unregelmässige, für Dreiecke, Richtwerke, wie für Eisen von den Formen T, I, Λ. Nichts desto weniger leidet weder die Kürze noch die Eleganz der Rechnungsmethode dadurch.

Dieselben Noten, welche schon dem Istituto Lombardo mitgetheilt wurden, sind in einer mehr für Ingenieure, welche die projectivische Geometrie nicht kennen, geeigneten Form vom Verfasser im Politecnico, Giornale dell' Ing. Arch. Civ. ed Industr. p. XXIV, Milano, verbunden mit lithographirten Tafeln,

publicirt worden. Um den Vortheil der geometrischen vor der gewöhnlichen analytischen Lösung noch evidenter zu machen, ist eine Zusammenstellung beider Methoden für einen speciellen Fall beigefügt, indem als besonderes Beispiel das *Z*-förmige Eisen behandelt wird.

Am Ende der dritten Note ist eine angenäherte graphische Methode zur Ausziehung der $n^{ten}$ Wurzel des Verhältnisses zweier Segmente oder einer gegebenen Zahl gegeben. Jg. (O.)

---

G. JUNG. On a new construction for the central nucleus of a plane section. Rep. Brit. Ass. 1876.

Der Verfasser stellt zunächst die Trägheitsmomente einer ebenen Figur vermittelst eines Kreises dar. Wenn *AA* und *BB* die Hauptträgheitsaxen der Figur sind (der gemeinsame Punkt *O* ist nicht der Schwerpunkt) und wenn $AA (> BB)$ das Doppelte des Trägheitsradius in Bezug auf die Axe *BB* ist, so ist bekannt, dass *AA* die Focalaxe und *BB* die nicht focale Axe der Centralellipse der Figur ist. Bezeichnet man mit *f* einen der Brennpunkte, mit $\Gamma$ den Kreis, der über dem Durchmesser *Of* beschrieben ist, und mit *C* den über *AA* als Durchmesser beschriebenen Kreis (den centralen Trägheitskreis), so leitet sich diese neue Darstellung der Trägheitsmomente her aus dem Satze: „Der Trägheitsradius einer Figur in Bezug auf eine barycentrische Axe $\xi$ ist gleich dem Segment *NN'* der Senkrechten, gefällt von *f* auf $\xi$ und genommen zwischen den Axen $\xi$ und dem centralen Kreis *C*, oder ist gleich dem Segment *MM'*, genommen zwischen den beiden Kreisen $\Gamma$ und *C* auf der Geraden, welche *f* mit dem Punkte verbindet, in dem $\xi$ und $\Gamma$ sich treffen. Obwohl dies einige Analogie mit der bekannten Darstellung von Mohr zu haben scheint, ist es doch, vom theoretischem Standpunkt aus, sehr verschieden (siehe Mohr, Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenconstructionen. Z. d. Arch. und Ing.-Ver. zu Hannover XVI. 1870. p. 42—63). Auf diese Eigenschaft des centralen Trägheitskreises *C* gründet der Verfasser seine Construction des centralen Kerns, welcher auf diese Weise unabhängig von

der Construction der centralen Ellipse der gegebenen Figur wird. Jg. (O.)

---

R. HOPPE. Kugel von excentrischer Masse und centrischer Trägheit. Grunert Arch. LX. 100-105.

Der Verfasser stellt seine Aufgabe in folgenden Worten: Die gegebene Masse $M$ soll in einer gegebenen Kugel so vertheilt werden, dass sie einen gegebenen Schwerpunkt und für alle Axen, die durch den Mittelpunkt gehen, ein gleiches Trägheitsmoment $J$ hat. Der Verfasser setzt dazu die gesuchte Dichtigkeit

$$Q = q + q',$$

wo $q$ eine willkürliche Function der Coordinaten sein soll, während $q'$ die gestellten Bedingungen erfüllen soll. Dazu wird

$$q' = a + a_1 \cos 2\varphi + a_2 \sin 2\varphi + (a_3 + a_4 \cos\varphi + a_5 \sin\varphi)\cos\vartheta + (a_6 + a_7 \cos\varphi + a_8 \sin\varphi)\sin\vartheta + a_9 \varrho$$

gesetzt. Es ergeben sich dann zehn Bedingungsgleichungen, aus denen sechs der zehn constanten Coefficienten bestimmt werden, während vier, $a$, $a_1$, $a_2$, $a_9$, aus vier linearen Gleichungen sich ergeben. Dadurch ergiebt sich dann die gesuchte Dichtigkeit. Der Verfasser bespricht alsdann die Fälle $q = 0$ und $q$ nicht Null des Näheren. O.

---

H. DURRANDE. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 519-528.

Es ist gegeben ein System materieller Punkte und zwei feste Gerade im Raume. Es wird eine Reihe von Fragen untersucht, wie die nach dem Ort der Geraden, die die festen Geraden schneiden und Hauptträgheitsaxen für einen ihrer Punkte sind, und Aehnliches. O.

---

PELLETREAU. Mémoire sur les murs qui supportent une poussée d'eau. Ann. d. p. et d. ch. XII. 356-438.

Die Arbeit, die von rein technischem Interesse ist, behandelt

folgende Fragen: 1) Theoretische Ableitung des kleinsten Querschnittes der Mauer, der für einen gegebenen Druck genügt; 2) Methode zur schnellen Berechnung desselben in der Praxis für ein gegebenes Material; 3) es wird gezeigt, wie man bei einer Aenderung des angewandten Materials schnell von einem Querschnitt zu einem andern übergehen kann. Wn.

---

Peaucellier. Rapport sur un mémoire relatif aux conditions de stabilité des voûtes en berceau. C. R. LXXXII. 362-365.

Aus dem von den Herren Morin, Tresca und Phillips erstatteten, hier vorliegenden Bericht geht hervor, dass Herr Peaucellier besonders die Curven, welche den grössten und kleinsten Druck darstellen, graphisch darzustellen sucht. Aus der gegenseitigen Lage beider ergeben sich dann die Stabilitätsbedingungen. O.

---

E. Collignon. Note sur quelques traveaux récents relatifs à la théorie des voutes. Ann. d. p. et d. ch. (5) XI. 539-544.

Notiz über Arbeiten von Durand-Claye und Peaucellier, die selbst nichts Neues enthält. O.

---

M. Gros. Tracé de panneaux de douelle et de lit des voussoirs d'une voute biaire à section droite circulaire, lorsque la tête est en talus et que la voûte est appareillée comme une voûte droite. Ann. d. p. et d. ch. (5) XIII. 213-224.

O.

---

de Perrodil. Théorie de la stabilité des voutes. Ann. d. p. et de ch. (5) XI. 178-223.

O.

---

Kleitz. Note sur les calculs de stabilité des poutres continues reposant sur plus de deux points d'appui et ayant des moments d'inertie variables dans les différentes sections verticales. Ann. d. p. et de ch. (5) XI. 115-149.

Die Theorie hatte bisher auf der Hypothese beruht, dass das Trägheitsmoment überall constant sei. Diese Hypothese steht aber in Widerspruch mit der Wirklichkeit. In der vorliegenden Arbeit leitet nun der Verfasser die Relation zwischen den Biegungsmomenten für den Fall her, dass das Trägheitsmoment variabel ist, und gelangt dabei zu einer Gleichung, die im Wesentlichen mit derjenigen übereinstimmt, die Herr Bresse 1871 gefunden. Der Schluss enthält Anwendungen. Die Arbeit berücksichtigt übrigens mehr die technische Seite der Frage. O.

---

J. C. Maxwell. On Bow's mehod of drawing diagrams in graphical statics with illustrations from Peaucellier's linkage. Proc. of Cambr. II. 407-414.

Der Verfasser giebt Bericht über die verschiedenen Methoden zur Darstellung von Kräften auf einem Diagramm und Relationen zwischen dem Diagramm von Balken und dem Diagramm von Kräften. Wenn jedem Schnittpunkt von Linien in dem Kräftediagramm ein geschlossenes Polygon in dem Gestell des Stangenwerks entspricht, so heissen die beiden Diagramme reciprok. Solche sind betrachtet von Rankine, Maxwell, Fleeming, Jenkin, Cremona, Culmann und Maurice Lévy. Neuerdings hat Herr Bow in seinem Werke: „On the economics of construction in relation to framed structures“ den Entwurf der Zeichnung eines Kräftediagramms reciprok zu einem Stangenwerk, das ein System unter sich das Gleichgewicht haltender Kräfte bildet, wesentlich vereinfacht. Statt, wie es allgemein geschieht, die Punkte des Stangenwerks mit Buchstaben zu versehen, oder, wie es Prof. Maxwell thut, die Stücke desselben, stellt der Verfasser einen Buchstaben in jede Polygonfläche, die von den Stücken des Stangenwerks eingeschlossen wird, und auch in jeden der Theile

des übrigbleibenden Raumes, welche durch die Wirkungslinien der äusseren Kreise getrennt werden. Wenn ein Stück des Stangenwerks ein anderes kreuzt, wird der Schnittpunkt behandelt, als wenn es ein reeller Punkt wäre, und die Kräfte jedes der schneidenden Stücke werden zweimal in dem Kräftediagramm dargestellt als entgegengesetzte Seiten des Parallelogramms, welches die Kräfte in dem Schnittpunkte darstellt.

In der vorliegenden Arbeit setzt Herr Maxwell das Bow'sche System auseinander und erläutert es an dem Peaucellier'schen Apparat. Glr. (O.)

---

G. Jung. Rappresentazioni grafiche dei momenti resistenti di una sezione piana; nebst Complement. Rend. Ist. Lomb. (2) IX.; Rep. Brit. Ass. 1876.

Auseinandergesetzt werden verschiedene Methoden zur Construction der Widerstandsradien $r$ einer Figur $Z$ in einer Richtung $\lambda$ (und ebenso die entsprechenden Widerstandsmomente $R = J.r$) mit Bezug auf eine willkürliche barycentrische Axe $\xi$. Der Verfasser findet verschiedene Darstellungscurven in dem Sinne, dass sie zu Radii vectores die Widerstandsradien der Figur $J$ haben. „Ist also gegeben eine dieser Darstellungscurven und die Axe $\xi$, dann erhält man das bezügliche Widerstandsmoment, indem man die Fläche $J$ mit einem gewissen Radiusvector der betrachteten Curve multiplicirt. Bemerkenswerth ist, dass, wenn die Richtung $\lambda$ der Richtung der Axe $\xi$ conjugirt ist, man als Darstellungscurve der Widerstandsmomente den centralen Kern (nocciolo) der Figur $J$ erhält“. Dieser Satz, vorgelegt am 6ten und publicirt am 20ten Juli in den Rend. Ist. Lomb., wurde später auch auf anderem Wege von Prof. Sayno gefunden (siehe die Abh. von Sayno, Rend. Ist. Lomb. 23. XI. 1876 und Polit. Heft XI. November 1876).

Unter den verschiedenen vom Verfasser bewiesenen Eigenschaften des centralen Kerns erwähnen wir speciell die folgende: „Die Curve des grössten Widerstandes einer Figur $J$ ist eine durch reciproke Radii vectores Transformirte des centralen Kerns

von $J$. Ein Radiusvector dieser Transformirten multiplicirt mit $\frac{1}{J}$ giebt den grössten Widerstand von $J$ in Bezug auf die Axe $\xi$, welche seiner Richtung conjugirt ist".

Diese wenigen Andeutungen werden zeigen, dass das in dieser Note Auseinandergesetzte weniger zur wirklichen Lösung von Problemen der Praxis dient, als um die Gesetze zu finden, nach denen sich die Widerstandsmomente und der grösste Widerstand einer gegebenen Figur ändert, wenn man die neutrale Axe $\xi$ im Schwerpunkt verändert. Jg. (O.)

---

G. Fouret. Détermination graphique des moments de flexion d'une poutre à plusieurs travées solidaires. Ann. d. p. et d. ch. XI. 473-495.

Ueber den Inhalt der vorliegenden Arbeit ist bereits im vorigen Jahre berichtet (cf. F. d. M. VII. 559). Hier wird das dort kurz Mitgetheilte nur weiter ausgeführt, und es werden einige Zahlenbeispiele gegeben. Wn.

---

J. Boussinesq. Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents comparé à celui de massifs solides et sur la poussée des terres sans cohésion. Mém. cour. de Belg. XI.

J. M. de Tilly, Folie. Rapports sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XI. 63-73, XLII. 242-243.

Zweck dieser Abhandlung ist, Grundlagen für die Mechanik halbflüssiger Körper, entweder pulverförmiger oder plastischer, zu schaffen. Rankine (Sur la stabilité de la terre sans cohésion, Phil. Trans. 1856—1857) hat die Gleichgewichtsgrenze behandelt, bei welcher pulverförmige Körper zu fliessen anfangen. Er hat als Basis seiner Untersuchung zugelassen, dass die grösste Neigung des Drucks gegen die Normale auf das Ebenenelement, das er angreift, in jedem Punkte einer solchen Masse einen Winkel mit dieser Normale macht gleich dem der inneren Reibung

der fliessenden Erde. Andererseits sind Herr Tresca (Sur le poinçonnage des métaux et la déformation des corps solides, Mém. d. sav. étrang. deParis XX. 1872, F. d. M. II. 723.) und Herr de St. Venant (in verschiedenen Artikeln der C. R. 1870 u. 1871, F. d. M. II., III.) durch die Erfahrung veranlasst worden, als Fundamentalprincip der Mechanik plastischer Körper zuzulassen die Constanz der grössten tangentialen Druckcomponente an den verschiedenen Punkten dieser Körper, von denen vorausgesetzt wurde, dass sie mit einer gewissen Langsamkeit gepresst (pétris) würden. Man hatte aber noch nicht untersucht, wie sich diese pulverigen und plastischen Zustände einer Materie, die man unendlich wenig deformirt, verhalten zu den gewöhnlichen elastischen Zuständen, die weniger ausgedehnten, d. h. innerhalb der Grenzen der Elasticität liegenden Deformationen entsprechen. Ferner hatte man für pulverige Massen keine Kenntniss des Ausdrucks ihrer elastischen Kräfte als Functionen der kleinen Deformationen, hergeleitet aus ihrem natürlichen Zustande. Diese beiden Lücken sucht die Abhandlung des Herrn Boussinesq auszufüllen.

Unter der Voraussetzung, dass die Ausdrücke der elastischen Kräfte sich in sehr convergente Reihen nach ganzen Potenzen der Deformationen entwickeln lassen, sucht der Verfasser die Formen, auf welche sich diese Ausdrücke (vorausgesetzt als von mässiger Grösse) reduciren müssen in den zwei Fällen eines festen Körpers von constanter Elasticität und einer pulverigen Masse, d. h. falls der Körper immer eine endliche Härte besitzt, oder falls er nur dann den Deformationen widersteht, wenn er nach allen Seiten hin einen mehr oder weniger starken Druck erleidet. Im ersten Falle gelangt er zu den bekannten Formeln von Lamé (mit zwei Elasticitätscoefficienten $\lambda$, $\mu$). Im zweiten Falle erhält er für die sechs Componenten $N$, $T$ nach den $x$, $y$, $z$ der auf die ebenen Elemente ausgeübten Pressungen, die normal zu denselben sind, die Relationen

$$N_1 = p\left(-1 + 2m \frac{du}{dx}\right), \quad N_2 = p\left(-1 + 2m \frac{dv}{dy}\right),$$

$$N_3 = p\left(-1 + 2m \frac{dw}{dz}\right),$$

$$T_1 = pm\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right), \quad T_2 = pm\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right),$$
$$T_3 = pm\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right).$$

$m$ bezeichnet dabei einen für jede pulverige Masse constanten Coefficienten, $p$ den mittleren um das betrachtete Theilchen ($x, y, z$) ausgeübten Druck, und $u, v, w$ die Componenten der kleinen Verrückung, welche es erlitten hat. Dieselbe Analyse zeigt ferner, dass die cubische Dilatation vernachlässigt werden kann im Vergleich zu den drei linearen Dilatationen, gleich deren algebraischer Summe sie ist, dergestalt, dass den drei gewöhnlichen Gleichgewichtsgleichungen, in welche die Derivirten der Kräfte $T$, $N$ nach $x$, $y$, $z$ eintreten, die 4ten Gleichung hinzutritt

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

als nothwendig zur Bestimmung der vier unbekannten Functionen $x, y, z, p$.

Es giebt ausserdem specielle Gleichgewichtsbedingungen für die freien Oberflächen der Massen, ferner Bedingungen, die nach den jeweiligen Umständen sehr verschieden sind, für die Trennungsflächen mit dem Boden oder den festen Mauern, die sie aufhalten. Diese letzteren Bedingungen sind ersetzt durch eine Maximumbedingung der inneren Stabilität in dem wichtigsten Fall, d. h. wenn es sich um definitive Gleichgewichtsarten handelt, die sich in langer Zeit herstellen, einmal wenn die kleinen Erschütterungen, denen jede Masse ohne Aufhören ausgesetzt ist, die Pulverkörnerchen auf die am wenigsten gezwungene, also dem natürlichen Zustande nahe kommende Art gruppirt haben.

Die Integration des genannten Gleichungssystems lässt in jedem speciellen Problem die Werthe von $u$, $v$, $w$, $p$ und also auch die der Deformationen erkennen. Es bleibt noch übrig, auszudrücken, dass die drei Haupt-Dilatationen $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ überall einer gewissen Ungleichheit genügen, d. h. nicht hinausgehen über die Elasticitätsgrenzen, die, wie man weiss, jeder Stoff besitzt, der die Eigenschaft hat, die Form, aus der er heraus-

gebracht ist, wieder zu gewinnen. Für den einfachen Fall ebener Deformationen hat man $\delta_2 = 0$, und Herr Boussinesq findet, dass diese Ungleichheit darauf hinauskömmt, für pulverige Massen und die hinreichend plastischen festen Körper die grösste Dilatation $\delta_1$ kleiner als eine specifische Constante anzunehmen. Das Factum der Abwesenheit von Cohäsion bei pulverigen Massen gestattet ihm sogar, für Mauern zu setzen $\delta_1 < \frac{\sin\varphi}{2m}$, wo $\varphi$ ein positiver spitzer Winkel ist, nämlich wie er später zeigt, der Winkel der inneren Reibung.

Die Integrationen sind leicht, wenn die homogene und schwere Masse zur freien Oberfläche eine ebene Böschung hat, die einen gegebenen Winkel $\omega$ mit dem Horizont macht, und sich die erlittenen Deformationen, parallel der vertikalen Symmetrieebene, in allen gleich weit von der oberen Böschung entfernten Punkten als dieselben erweisen. Herr Boussinesq führt diese Integration für eine pulverige oder eine feste Masse aus. Die Resultate werden in den Fällen, wo die Tiefe hinreichend gross ist, einfacher. Dann sind die Hauptdilatationen $\delta_1$, $\delta_2$ dieselben in allen Punkten der pulverigen Masse, dagegen proportional der Entfernung von der oberen Böschung in der festen Masse. Die Halbirungslinie der Winkel ferner, welche von den linearen Elementen gebildet werden, die diese Hauptdilatationen erleiden, haben in allen Punkten der pulverigen Masse constante Richtungen, Richtungen, welche constant zu werden streben, wenn man in die feste Masse eindringt. Der Winkel $\varepsilon$, den irgend eine dieser Richtungen mit der Vertikalen macht, muss bei einer pulverigen Masse von beliebiger Tiefe, und bei einer festen Masse von sehr grosser Tiefe die Ungleichheit befriedigen:

$$\cos^2(\omega - i\varepsilon) > \frac{\sin^2\omega}{\sin^2\varphi}.$$

$\varphi$ bezeichnet dabei für eine pulverige Masse den eben bezeichneten Winkel, für ein festes Massiv den spitzen Winkel, dessen Sinus gleich $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ ist. Diese Ungleichheit ist nicht für einen reellen Werth von $\varepsilon$ erfüllbar, wenn man $\omega > \varphi$ hat, woraus sich

für eine pulverige Masse die Unmöglichkeit ergiebt, stehen zu bleiben unter einem Winkel, der grösser ist als der rutschender Erde, und für eine feste Masse unter einem Winkel, der grösser ist als der, dessen Sinus $= \frac{\mu}{\lambda + \mu}$, und der dem Werthe Null um so näher liegt, je weicher der betreffende Körper ist. Wenn dagegen $\omega < \varphi$, kann $\varepsilon$ unendlich viel Werthe annehmen; sie entsprechen ebenso viel verschiedenen Arten des elastischen Gleichgewichts; alle liegen zwischen zwei Grenzarten, deren eine durch Auflockerung, die andere durch Compression entsteht. Diese Arten sind für pulverige Mittel identisch mit denen, die Herr Rankine entdeckt hatte. Herr Boussinesq zeigt, dass eine dieser Gleichgewichtsarten, und nur eine, dem Fall entspricht, wo die Masse gestützt wird auf der einen Seite durch eine feste Mauer, sei es, dass diese Mauer einen bekannten Grad von Widerstand darstellt und dieses Gleichgewicht sich in langer Zeit geregelt hat, sei es, dass die Mauer eine Wand ohne Schwere ist, die gegen die Masse eine gegebene Kraft unterhält, welche liegt zwischen der, die kaum genügen würde sie zu stützen, und der, welche dieselbe durch Zerquetschung über die obere Böschung heraustreiben würde, sei es noch für andere in der Theorie sehr einfache Umstände, die jedoch in der Praxis schwer realisirbar sind.

Die beiden letzten und längsten Paragraphen der Abhandlung (§ 2 u. 10) sind der Dynamik der cohärenten Massen und der dehnbaren festen Körper gewidmet. Der Verfasser bemerkt zunächst, dass die sehr kleinen elastischen Vibrationen einer pulverförmigen nicht comprimirten Masse nicht von linearen Gleichungen abhängen. Es erklärt das, warum diese Massen nicht pendelnd unter dem Einfluss ihrer Elasticität vibriren können, warum sie den Ton ersticken. Er beschränkt sich weiter auf das Studium der ziemlich langsamen Bewegungen, in denen die Trägheit nur eine zu vernachlässigende Rolle spielt, wenn es nicht Ausnahme-Punkte giebt. Die sechs Pressungen $N$, $T$ unterscheiden sich dabei an jeder Stelle nicht merklich von denen der elastischen Maximalkräfte, die der Stoff besitzt, dergestalt, dass man die charakteristische Gleichung des pulverförmigen oder plastischen

Zustandes erhält, indem man ausdrückt, dass die Elasticitätsgrenzen erreicht sind. Diese Gleichung ist genau entweder die von Herrn Rankine aufgestellte Fundamentalformel, oder die von den Herren Tresca und St. Venant für die Dynamik plastischer Körper. Herr Boussinesq verbindet diese in Bezug auf $N$, $T$ endliche Relation mit den drei bekannten Gleichungen, die das dynamische Gleichgewicht eines parallelepipedischen Volumenelementes ausdrücken, in welche die Derivirten von $N$, $T$ nach $x$, $y$, $z$ eintreten. Aber er bemerkt, dass die im Gleichgewicht befindliche pulverige oder plastische Masse allgemein nicht mehr einen natürlichen Zustand zulässt, wo die Pressungen absolut Null werden. Es müssten alle unendlich kleinen Theilchen von einander getrennt werden, damit sie sich gleichzeitig von einander entfernen können, ohne sich zu stören.

Herr Boussinesq vervollständigt das System von neun allgemeinen Gleichungen, die nothwendig sind zur Bestimmung der sechs Pressungen $N$, $T$ und der drei Componenten $u$, $v$, $w$ der Geschwindigkeit jedes Theilchens, indem er annimmt, dass die verschiedenen Fasern, die sich in demselben Punkte kreuzen, andauernde Dilatationen erleiden proportional ihren actuellen elastischen Dilatationen. Dies einfache Princip liefert ihm leicht die noch folgenden fünf Gleichungen. Endlich verbindet er damit evidente specielle Bedingungen, sei es über die freien Oberflächen, sei es über die mit den festen Wänden in Berührung stehenden Schichten, sei es über die Trennungsflächen der im pulverigen oder plastischen Zustande gebliebenen Theile mit denen, die in den gewöhnlichen Elasticitätszustand übergegangen sind.

Als erste Anwendung zeigt Herr Boussinesq, dass die Ausflussgeschwindigkeit des festen Körpers durch eine Oeffnung sich einer Grenze nähert und schliesslich völlig unabhängig ist von der Höhe der Belastung, sobald diese einen gewissen Werth erreicht, ein Factum, das schon im Alterthum bekannt war und dort zur Messung der Zeit durch Sanduhren benutzt wurde. Er untersucht ferner die Vertheilung des Druckes in einer schweren durch eine Mauer gestützten Masse ohne Cohäsion in den ersten Augenblicken einer Erschütterung, die durch eine Erschütterung der

Mauer hervorgerufen ist. Herr M. Lévy hat in glücklicher Weise eine der beiden von Herrn Rankine gegebenen Lösungen, von denen oben die Rede war, auf das Problem angewandt, (wobei er diese Lösung von Neuem entdeckte). Sie ist indess nur für einen beschränkten Fall gültig, denn sie ist nicht vereinbar mit dem Gleiten der Masse gegen die Mauer, welche ihre hintere Fläche in bestimmter Art gerichtet hat. Herr Boussinesq findet andere, viel allgemeinere Lösungen, die auf beliebige Neigungen dieser Flächen anwendbar sind, sogar für den Fall, wo diese Grenzflächen gekrümmt sind. Diese Lösungen führen zu ziemlich einfachen geometrischen Darstellungen. Sie zeigen, dass je nach dem Fall, ein bestimmter Theil der Masse, der der Unterstützungsmauer benachbart ist, sich im elastischen Zustand befindet oder doch in einen pulverigen Zustand geräth, der ganz verschieden von dem des übrigen Theiles ist.

Ein letzter Paragraph ist der Untersuchung von ebenen Deformationen einer plastischen oder pulverförmigen Masse in Polarcoordinaten gewidmet, die nach verschiedenen Richtungen einem Drucke ausgesetzt ist, der viel grösser ist als ihr Gewicht, namentlich, wenn dieser Druck gleichmässig nun eine Axe vertheilt oder gleich gerichtet ist in allen Punkten eines jeden vom Ausgangspunkte ausgehenden Radius vectors. Herr Boussinesq leitet hier als Annäherungsformeln die einfachen und bemerkenswerthen Ausdrücke ab, zu denen Herr Tresca durch die Erfahrung geführt ist, und welche angeben: 1) die Kraft, die nöthig ist, um einen cylindrischen Stempel längs der Axe eines Bleiblocks von derselben Form, aber grösserem Durchmesser durchzutreiben, der im Uebrigen entweder frei, oder von einem festen Mantel umgeben ist; 2) die Höhe des Propfens, den der Stempel heraustreibt, wenn eine Oeffnung von denselben seitlichen Dimensionen, die er selbst hat, gebohrt ist, nach seiner Verlängerung über die polirte Ebene, die den Block trägt; 3) die Kraft endlich, die nöthig ist, damit ein cylindrisches Bleistück, welches ein eisernes Gefäss erfüllt und durch einen Stempel getrieben wird, durch eine solche Oeffnung ausfliesst. Er leitet ferner die einfachsten Vertheilungsarten des Druckes her, die in einer plastischen oder pulverigen Masse von der Form eines

Dieders auftreten, das von zwei festen Platten gebildet wird, sowohl wenn der Winkel fest ist und die betrachtete Masse der Art fliesst, dass die der Ebene benachbarte Materie zusammenläuft gegen die Wand der beiden Seiten oder sich von der linken Seite entfernt, als auch wenn der Winkel der beiden Ebenen kleiner oder grösser wird, und wenn das Fliessen hervorgebracht wird entweder durch Zerquetschung oder durch seitliche Ausdehnung der Masse.

Die Abhandlung schliesst mit Auseinandersetzung einer graphischen Integrationsmethode von Rankine zur Behandlung des Problems über die Gleichgewichtsgrenze einer pulverigen Masse mit oberer krummer Oberfläche. Rankine hatte sie unter Annahme einer vereinfachenden Hypothese angewandt, die die Frage sehr verändert. Herr Boussinesq zeigt, wie sie mit fast ebenso grosser Einfachheit den wirklichen Gleichungen des Problems angepasst werden kann.

Es fehlt hier an Raum, um die wesentlichsten Formeln zu reproduciren. Referent verweist daher auch auf die Mécanique des corps sémi-fluides; Paris, Gauthier-Villars. Mn. (O.)

---

## B. Hydrostatik.

A. Giesen. Ueber eine einfache Behandlungsweise derjenigen Probleme der Hydromechanik, in welchen Ellipsoide mit kleinen Excentricitäten vorkommen. Schlömilch Z. XXI. 47-72.

In der vorliegenden Arbeit werden einige bekannte Probleme der Hydrostatik durch Ableitung von Näherungsformeln erweitert: und wenn dabei auch keine neuen Methoden gegeben, kein völlig neues Problem behandelt wird, so haben die gewonnenen Resultate doch ein gewisses Interesse. Für ein homogenes Ellipsoid, dessen Excentricitäten sehr klein sind, wird der bekannte Ausdruck des Potentials nach Potenzen dieser Excentricitäten entwickelt, wobei die höheren Potenzen von der dritten ab vernachlässigt werden. Mit Hülfe dieser Entwickelung wird

untersucht, ob ein derartiges flüssiges Ellipsoid eine mögliche Gleichgewichtsfigur für einen Satelliten sein könne, welcher nur der Anziehung seiner eigenen Theile und der eines Centralkörpers unterworfen ist, und welcher sich so um den Centralkörper bewegt, dass er dem letzteren stets dieselbe Seite zuwendet. Der Centralkörper wird dabei als Kugel, die Bahn des Satelliten als kreisförmig angenommen. Die höheren Potenzen der Dimension des Satelliten werden ebenfalls gegen die der Bahn vernachlässigt. Unter diesen Beschränkungen kann jenes Ellipsoid eine Gleichgewichtsfigur sein; und zwar ist die dem Centralkörper zugekehrte Axe die längste, die mittlere tangirt die Bahn, die kleinste steht auf der Bahnebene senkrecht.

Eine zweite Anwendung der oben angeführten Entwickelung macht der Verfasser auf die angenäherte Theorie der Ebbe und Fluth. Er nimmt an, dass die Erde aus einem kugelförmigen Kerne und einer denselben bedeckenden homogenen Flüssigkeit besteht. Auf letztere wirkt ausser der Anziehung des festen Kernes die eines fremden entfernten Körpers. Beide Körper bewegen sich so, als wären sie fest mit einander verbunden. Von der Rotation der Erde wird abstrahirt. Die die Erde umgebende Flüssigkeitsmasse kann dann die Gestalt eines dreiaxigen Ellipsoids mit sehr kleinen Excentricitäten annehmen; und zwar ist die längste Axe dem anziehenden Körper zugewandt.

Weiter werden kleine Oscillationen einer homogenen Flüssigkeitsmasse untersucht, deren Theilchen nur ihrer eigenen Anziehung unterworfen sind. Es wird gezeigt, dass, wenn die ursprüngliche Gestalt der Flüssigkeitsmasse eine Kugel ist, unter den möglichen Bewegungen derselben auch solche regelmässige sehr kleine Oscillationen vorkommen, bei welchen die Oberfläche der Flüssigkeit stets die Gestalt eines Ellipsoids mit sehr kleinen Excentricitäten behält. Der Mittelpunkt des veränderlichen Ellipsoids liegt stets im Kugelmittelpunkt, die Axen haben constante Richtung und ändern bei der Bewegung nur ihre Länge. Die Dauer einer derartigen Oscillation ist

$$T = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{15\pi}{\varrho f}}\,.$$

wo $\varrho$ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, $f$ die Anziehungsconstante bezeichnet. Die Verschiebungen eines beliebigen Flüssigkeitstheilchens, dessen Coordinaten im ursprünglichen Ruhezustande $x_0, y_0, z_0$ waren, sind durch folgende Gleichungen bestimmt, in denen $\mu_1, \mu_2$ zwei willkürliche sehr kleine Constanten sind:

$$\xi = \mu_1 x_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}; \quad \eta = \mu_2 y_0 \sin 2\pi \frac{t}{T};$$

$$\zeta = -(\mu_1 + \mu_2) z_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Die hierdurch dargestellte Bewegung wird genau discutirt.

Im zweiten Theile der Arbeit werden ausser den oben erwähnten Näherungsformeln andere abgeleitet für das Potential einer nicht homogenen ellipsoidischen Schale. Die Flächen, in denen die Dichtigkeit sich stetig oder discontinuirlich ändert, werden dabei, ebenso wie die beiden Grenzflächen, sämmtlich als Ellipsoide mit gleich gerichteten Axen und sehr kleinen Excentricitäten vorausgesetzt. Daraus ergiebt sich dann weiter: Wenn ein System beliebiger Flüssigkeitsschichten über einem wenig excentrischen ellipsoidischen festen Kerne ausgebreitet ist, und das ganze System um eine der Axen des festen Kernes rotirt, so ist nur ein einziger Gleichgewichtszustand möglich. Bei diesem sind alle Grenzflächen der einzelnen flüssigen Schichten Ellipsoide von geringen Excentricitäten, deren Axen sämmtlich mit denen des festen Kernes gleich gerichtet sind. Im Anschluss hieran wird, mit Fortlassung des festen Kernes, eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung abgeleitet, durch welche die Abhängigkeit der Excentricitäten der einzelnen Schichten von der veränderlichen Dichtigkeit bestimmt wird, eine Gleichung, die in fast gleicher Gestalt sich schon bei Laplace findet. Endlich wird für den eben behandelten Gleichgewichtszustand das Clairaut'sche Theorem bewiesen. Wn.

---

J. Purser. On Laplace's second method of treating Legendre's problem. Messenger (2) VI. 18-22.

Das Problem geht dahin zu zeigen, dass ein abgeplattetes

Revolutionssphäroid die einzig mögliche Form des relativen Gleichgewichts für eine homogene rotirende Flüssigkeit ist. Laplace beschränkt sich in seiner Arbeit auf nahezu sphärische Figuren, aber er weist andererseits Legendre's Beschränkung auf Rotationsflächen zurück. Unter dieser Form hat er zwei Beweise gegeben. Von einem derselben hat Herr Liouville nachgewiesen, dass er eine unberechtigte Voraussetzung enthielt. Poisson hat einen Beweis gegeben, der diese Voraussetzung nicht enthielt. Aber in der vorliegenden Arbeit zeigt Herr Purser einen Irrthum in ihr an, der für Poisson's Verfahren wesentlich ist. Ein von Herrn Todhunter gegebener Beweis wird von demselben nicht berührt. Glr. (O.)

---

R. Townsend. Solution of a question (4924). Educ. Times XXV. 80-87.

Eine homogene flüssige Masse hat unter der gleichzeitigen Wirkung einer Rotation um eine durch ihren Trägheitsmittelpunkt gehende Axe und ihrer eigenen Anziehung nach dem gewöhnlichen Attractionsgesetz eine sphäroidische Gestalt angenommen. Dann ist bei jeder mit dieser Form verträglichen Rotationsgeschwindigkeit die Centrifugalkraft der Rotation kleiner als die Attractionscomponente der ganzen Masse. O.

---

L. E. Bertin. Méthode nouvelle pour établir la formule de la hauteur métacentrique. Atti d. Acc. pont. XXIX. 218-220.

Für einen Kreiscylinder, der so in eine Flüssigkeit getaucht ist, dass seine Axe horizontal ist, fällt das Metacentrum stets in die Mitte der Axe; man kann daher leicht die Höhe des Metacentrums über dem Schwerpunkt des eingetauchten Volumens finden. Für Rotationskörper, deren Axe beim Eintauchen horizontal bleibt, lässt sich dann dieselbe Frage leicht erledigen durch Zerlegung in unendlich dünne Cylinder. Für beliebige Körper tritt nur an Stelle der geraden Axe der Rotationskörper die Curve, welche die Schwerpunkte aller Querschnitte verbindet

(courbe des isocarènes), an Stelle des Radius eines Querschnitts des Rotationskörpers tritt der Krümmungsradius jener Curve.

Wn.

---

## Capitel 4.

## Dynamik.

D. Chelini. Intorno ai principii fondamentali della dinamica con applicazioni al pendolo ed alla percussione de' corpi secondo Poinsot. Mem. di Bol. (3) VI., Rend. di Bol. 1876. 54-63.

Der Verfasser giebt zunächst die Definitionen von Translationsbewegung und Rotationsbewegung, bespricht dann die Zusammensetzung gleichzeitiger Bewegungen, erörtert die verschiedenen Verhältnisse bei der krummlinigen Bewegung eines Punktes. Im Weiteren geht er zur Betrachtung der Bewegung von Systemen über, zeigt die Bedeutung der Schwerpunkte und reducirt die allgemeine Bewegung auf Translation und Rotation. Die so gewonnenen Resultate wendet er auf das Pendel und die Percussion der Körper an.

O.

---

E. Lemmi. Sur les cas d'exception au théorème des forces vives. Résumé et conséquences d'un mémoire de M. Betti. Liouville J. (3) II. 233-239.

Ueber die Arbeit von Betti ist F. d. M. III. p. 301—303 berichtet worden. In der vorliegenden Arbeit von Herrn Lemmi wird zunächst der wesentliche Inhalt recapitulirt. Der Verfasser wendet sich sodann zur Bewegung eines Punktes unter der Wirkung einer Kraft, deren Intensität nur von der Lage des Punktes abhängt. Damit die bei der Bewegung eines Punktes von einer Lage in eine andere geleistete Arbeit von dem Wege unabhängig sei, ist hinreichende Bedingung, dass die drei Gleichungen

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}, \quad \frac{dZ}{dx} = \frac{dX}{dz}$$

erfüllt werden. Aus den Entwickelungen des Herrn Betti folgert der Verfasser nun, dass dies nicht immer der Fall zu sein braucht. Der Satz ist richtig, wenn der Raum einfach zusammenhängend erster Art ist, sonst aber nicht. O.

---

R. S. Ball. On an elementary proof of Lagrange's equations of motion in generalised coordinates. Trans. of Dublin. 1876.

Ist $V$ die potentielle, $T$ die kinetische Energie des Systems, dann erhält, wenn $\gamma$ eine der $n$ verallgemeinerten Coordinaten ist und das System eine Verrückung um $\delta\gamma$ erfährt, ein Massentheilchen $m$ eine Verrückung, deren Componenten $\frac{dx}{d\gamma}\delta\gamma$ etc. sind. Die auf $m$ wirkenden Kräfte sind $m\frac{d^2x}{dt^2}$ etc., und die gesammte durch die Verrückung $\delta\gamma$ geleistete Arbeit ist

$$\Sigma m\delta\gamma\left(\frac{dx}{d\gamma}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{d\gamma}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{d\gamma}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Das Summenzeichen muss dabei auf alle Theilchen des Systems erstreckt werden. Die potentielle Energie wird dann verringert um

$$-\frac{dV}{d\gamma} = \Sigma m\left(\frac{dx}{d\gamma}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{d\gamma}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{d\gamma}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Man hat ferner

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}$$

und

$$\frac{dT}{d\gamma} = \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt.d\gamma}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt.d\gamma}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt.d\gamma}\right).$$

Sind $r, s, \dots$ andere verallgemeinerte Coordinaten, so ist

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt}+\frac{dx}{dr}\frac{dr}{dt}+\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}+\dots+$$
$$= \frac{dx}{d\gamma}\cdot\gamma'+\frac{dx}{dr}\cdot r'+\frac{dx}{ds}\cdot s'+\cdots,$$

$$\frac{d}{d\gamma'}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx}{d\gamma},$$

$$\frac{dT}{d\gamma'} = \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx}{d\gamma} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dy}{d\gamma} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{dz}{d\gamma}\right),$$

also durch Differentiation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\gamma'}\right) - \frac{dT}{d\gamma} = -\frac{dV}{d\gamma}.$$

Die anderen $(n-1)$ Gleichungen werden in ähnlicher Weise hergeleitet. Csy. (O.)

---

M. Allé. Ueber die Bewegungsgleichungen eines Systems von Punkten. Wien. Ber. LXXIII.

Lamé hat in seinem Werke: „Leçons sur les coordonnées curvilignes“ die Bewegungsgleichungen eines freien Punktes in orthogonale Coordinaten für den Fall transformirt, dass der Parameter einer der drei orthogonalen Flächen ein Potential sei. Sie nehmen dadurch die Form an:

$$\frac{\partial \frac{v_1}{h_1}}{\partial \varrho_2} - \frac{\partial \frac{v_2}{h_2}}{\partial \varrho_1} = khv, \quad \frac{\partial \frac{v_2}{h_2}}{\partial \varrho} - \frac{\partial \frac{v}{h}}{\partial \varrho_2} = kh_1 v_1,$$

$$\frac{\partial \frac{v}{h}}{\partial \varrho_1} - \frac{\partial \frac{v_1}{h_1}}{\partial \varrho} = kh_2 v_2, \quad v^2 + v_1^2 + v_2^2 = \varrho + \text{const.}$$

Dabei sind $\varrho$, $\varrho_1$, $\varrho_2$ die Parameter der drei orthogonalen Flächen, deren erste eine Niveaufläche, $h$, $h_1$, $h_2$ sind die Differentialparameter 1ter Ordnung und $v$, $v_1$, $v_2$ die Geschwindigkeitscomponenten nach den Richtungen der Normalen an die drei orthogonalen Flächen. Der Verfasser zeigt nun in der vorliegenden Arbeit, dass diese Form nicht allein durch die Vereinfachungen erzielt wird, welche die Einführung einer Niveaufläche mit sich bringt. Dieselbe gilt vielmehr für jedes System krummliniger orthogonaler Coordinaten. Das Charakteristische dieser Gleichungsform bleibt aber noch bei Einführung ganz beliebiger Veränderlichen erhalten, wenn es sich um die Bewegung eines Systems von Punkten handelt. Lamé machte ferner bei der Ableitung der obigen

Gleichungen noch die Voraussetzung, dass die Kräftefunction eine blosse Function der Coordinaten sei, so dass dies auch mit den Geschwindigkeiten der Fall ist. Lässt man diese Beschränkung fallen und sucht die obige Gleichungsform im Fall eines Systems von Punkten für beliebige Veränderliche herzustellen, welche im Stande sind, die ursprünglichen geradlinigen Coordinaten zu ersetzen, so gelangt man, wie der Verfasser zeigt, unmittelbar zu der partiellen Differentialgleichung, von deren Integration Hamilton die Integration der Bewegungsgleichungen abhängig gemacht hat. Betreffs der Beweise muss Referent auf die Arbeit selbst verweisen. O.

---

A. Kurz. Das Newton'sche Gesetz als Folge der beiden Kepler'schen. Hoffmann Z. VII. 379-380.

Aus der elliptischen Bewegung mit constanter Flächengeschwindigkeit wird das Newton'sche Attractionsgesetz hergeleitet. H.

---

O. Pratt. Six original problems. Analyst III. 186-187.

Die Probleme beziehen sich auf die Bewegung von Planeten unter der Voraussetzung, dass die Gravitationskraft Zeit zur Fortpflanzung durch den Raum erfordert, und dass der Raum mit einem widerstehenden Medium erfüllt ist. Glr. (O.)

---

J. Märker. Ueber das ballistische Problem. Pr. Herford.

Der Verfasser entwickelt die Schwierigkeiten, welche sich der Berechnung der Gleichung der Flugbahn eines Geschosses entgegen stellen, nach den verschiedenen Richtungen. Er nimmt dabei Rücksicht auf die Arbeiten von Kummer über Luftwiderstand, auf die von Regnault, Bashforth, Boulengé und giebt dann eine Entwickelung der Gleichung dieser Bahn O.

---

ARTIER. Sur une question de balistique. C. R. LXXXIII. 1033-1035.

Man denke sich einen schweren Körper, der sich in Folge einer Anfangsgeschwindigkeit $V$ in einem widerstehenden Mittel bewegt. Die Bewegungsrichtung $v$ hebe sich um den Wurfwinkel $\varphi$ über den Horizont. Wenn die Richtung des Widerstandes dann stets der der Bewegung entgegengesetzt ist, so ist bekanntlich der Fallwinkel grösser als der Wurfwinkel. Der letztere habe sein Complement zum Fallwinkel. Ueber diesen Winkel $\theta$ werden in der vorliegenden Arbeit drei Sätze aufgestellt, deren erster lautet: „Wenn der Wurfwinkel für gleiche Strecken vergrössert wird, so wird, je nachdem auf der Wurfbahn ihre Projectionen constant sind, wachsen oder abnehmen, der Winkel der grössten Tragweite gleich $\theta$, kleiner oder grösser als $\theta$ sein".

O.

---

A. MANNHEIM. Sur le tir lorsque le but est élevé audessus de l'horizon. Rev. d'Art. VII.

F. SIACCI. Sur une question de balistique. Rev. d'Art. VII.

E. BERGER. Ueber den Einfluss der Erdrotation auf den freien Fall der Körper und die Flugbahnen der Projectile. Coburg. Karlowa.

---

H. DE LA GOUPILLIÈRE. Recherche de la brachistochrone d'un corps pesant en égard aux résistances passives. C. R. LXXXIV. 884-886.

Das Vorliegende ist ein Auszug des Verfassers aus der eigentlichen Arbeit. Nach demselben hat er zunächst die Reibung berücksichtigt. Es handelt sich dann darum, das Integral

$$\int ds \Big\{\frac{1}{v} + \varphi(s)\Big[\Big(\frac{dx}{ds}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{ds}\Big)^2\Big]$$

$$+ \psi(s)\Big[v\frac{dv}{ds} + g\Big(f\frac{dy}{ds} - \frac{dx}{ds}\Big) + fv^2\sqrt{\Big(\frac{d^2x}{ds^2}\Big)^2 + \Big(\frac{d^2y}{ds^2}\Big)^2}\Big]\Big\},$$

wo $\varphi$ und $\psi$ unbekannte Functionen des Bogens sind, zu einem Minimum zu machen. Es ist dem Verfasser gelungen, die Gleichung der Brachistochrone zwischen dem Krümmungsradius $\varrho$ und dem Contingenzwinkel $\theta$ aufzustellen. Sie lautet:

$$\varrho = \frac{\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)\sin(\theta+\beta)}{\sin^2(\theta-\gamma)\sin^2(\theta+\gamma)},$$

eine Curve, welche unendlich viele identische Zweige mit zwei Inflexions- und drei Rückkehrpunkten hat. Diese Singularitäten können unter Umständen verschwinden.

Sodann hat der Verfasser den Widerstand der Mittel berücksichtigt und zwar nach einer beliebigen Function der Geschwindigkeit. Die Aufgabe wird dann auf die Elimination eines Parameters aus zwei Gleichungen zurückgeführt. Er setzt den Widerstand gleich einer beliebigen Potenz der Geschwindigkeit, so führt diese Elimination auf die Lösung einer Gleichung 3ten Grades. Für das Naturgesetz speciell ergiebt sich dann als Gleichung der Brachistochrone:

$$\frac{\left[\frac{B}{\varrho} - 3C\sin\omega(A\sin\omega - B\cos\omega)\right]^3}{\left[\frac{B}{\varrho} - 2C\sin\omega(A\sin\omega - B\cos\omega)\right]^2} = \frac{B^2 g}{\sin\omega}.$$

Auch im Fall der Vereinigung der Reibung und des Widerstandes des Mittels mit Hinzufügung des Rollwiderstandes wird die Frage auf die Lösung einer Gleichung 3ten Grades reducirt. O.

---

H. DE LA GOUPILLIÈRE. Rapport sur un mémoire ayant pour titre: Problèmes inverses des brachistochrones. C. R. LXXXII. 143-144.

Wenn sich ein materieller Punkt in einer Ebene unter der Wirkung einer Kraft bewegt, deren Componenten, parallel den Coordinatenaxen, die partiellen Derivirten einer Function $T$ der beiden Variabeln $x$ und $y$ sind, wenn man ferner dem Punkte die Bedingung auferlegt, dass er ohne Reibung verschiedene Curven beschreiben solle, so hängt bekanntlich die Curve, bei welcher das Minimum von Zeit erforderlich ist, um von einem Punkte zum

andern zu gelangen, von einer Differentialgleichung $2^{\text{ter}}$ Ordnung ab. In dem der Akademie übergebenen Aufsatze nimmt nun Herr Goupillière die Brachistochrone als gegeben an und sucht das Gesetz zu bestimmen, dem die Kraft alsdann folgen muss. Da die Arbeit demnächst in dem Recueil des savants étrangers in extenso erscheinen wird, dürfte es passender sein, ein eingehendes Referat bis dahin zu verschieben. O.

---

J. Franz. Sur la courbe tautochrone dans un milieu résistant. Soc. de Neuch. 1876.

Laplace stellt im ersten Buche der mécanique céleste die Gleichung der Tautochrone durch ihre Differentialgleichung dar:

$$dy = \frac{k}{g^n}(1 - e^{-ns})ds$$

unter Voraussetzung eines Widerstandes $mv + nv^2$. Der Verfasser zeigt, dass die durch diese Gleichung dargestellte Curve die Eigenschaft des Tautochronismus besitzt, und entwickelt dann die Gleichung der Developpabeln. O.

---

F. Brioschi. Intorno al problema delle tautochrone. Boncompagni Bull. IX. 241-246.

Referent hatte in seiner Arbeit „über das Problem der Tautochronen“ (siehe F. d. M. IV. p. 30) auch von einer Arbeit Brioschi's über das Problem der Tautochronen gesprochen, hatte aber nicht näher auf den Inhalt derselben eingehen können, da ihm dieselbe nicht zugänglich war. Dies hat dem Verfasser Veranlassung gegeben, sie hier mit einigen Modificationen zu reproduciren. O.

---

C. Bender. Das einfache Pendel. Bayr. Bl. XII. 163-165.

Um auf anderem Wege zu den von Bessel über die Länge materieller Pendel erhaltenen Ergebnissen zu gelangen, untersucht der Verfasser die Bewegung eines auf horizontaler Ebene

rollenden Cylinders, dessen Axe den Schwerpunkt nicht in sich enthält. Entspricht der Zeit $t = 0$ der Ablenkungswinkel $\varphi_0$, ist $R$ der Radius des Cylinders, $r$ der Schwerpunkts-Abstand von der geometrischen Axe, $m$ die Masse, $M$ das Trägheitsmoment in Bezug auf die Schwerpunkts-Axe, so findet sich

$$t = \pi\left(1 + \frac{4Rr\sin^2\frac{1}{2}\varphi_0}{(R-r)^2 + \frac{M}{m}}\right)\cdot\left(1 + \frac{1-K_1}{1+K_1}\right)\cdot\sqrt{\frac{(R-r)^2 + \frac{M}{m}}{gr}},$$

$$K_1 = \cos\tfrac{1}{2}\varphi_0 : \sqrt{1 + \frac{4Rr\sin^2\frac{1}{2}\varphi_0}{(R-r)^2 + \frac{M}{m}}}.$$

Gr.

---

## F. X. Stoll. Mathematisch-physikalische Miscellen. II. Pr. Bensheim.

Im ersten Abschnitt dieser Arbeit, der den Titel „Theorie des Horizontalpendels“ führt, giebt der Verfasser eine Theorie dieses Instrumentes unter Voraussetzung kleiner Ablenkungen und Oscillationen. Er findet als Resultat, dass sich die beschleunigende Kraft des Horizontalpendels von der des Vertikalpendels nur durch den Factor $tg\varphi$ unterscheidet, wo $\varphi$ der Winkel ist, den die Vertikale mit der Drehaxe des Apparats bildet. Es gilt daher auch für das Horizontalpendel die Formel

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g\,tg\varphi}},$$

unter $l$ die Entfernung des Schwingungspunktes von dem Schnitt der Drehaxe mit der Pendelstange verstanden. Der folgende Abschnitt „über die durch den Mond und die Sonne bewirkte Ablenkung des Pendels von der Sonne“ ist eine Anwendung der im ersten Abschnitt gewonnenen Resultate.

O.

---

## F. Brönnimann. Ueber den Isochronismus des Pendels und die Unruhe. Allg. J. f. Uhrmacherkunst. I.

Der Verfasser giebt zunächst einen kurzen Ueberblick über

die geschichtliche Entwickelung der zur Herstellung des Isochronismus construirten Apparate. Er bemerkt, dass beim Pendel namentlich die Federsuspension zur Correction des vom Pendel nicht geleisteten Isochronismus benutzt werden könne. Dann untersucht er im ersten Abschnitt den Einfluss derselben auf die Zeit der Pendelschwingungen und gelangt dabei zu Resultaten, die mit den auf Bessel's Veranlassung von Laugier und Winnert angestellten Versuchen gut übereinstimmen. Der Einfluss der Feder äussert sich darin, dass die normale Reduction der Feder proportional mit dem Sinus des Ablenkungswinkels zunimmt, also den Hebelarm derselben vergrössert. Dadurch wird der Isochronismus hervorgebracht. Der zweite Theil der Arbeit beschäftigt sich dann mit dem Isochronismus der Unruhe. Die Arbeit, ihrem Zweck nach für Techniker bestimmt, bietet in dem mathematischen Theile nichts Besonderes. O.

---

C. Caspary. Sur l'isochronisme du spiral réglant cylindrique. C. R. LXXXIII. 47-49.

Leroy hat auf Grund seiner Untersuchungen den Satz ausgesprochen: „Es giebt in jeder Feder von genügender Ausdehnung eine gewisse Länge, bei der alle Vibrationen, grosse und kleine, isochron sind“. Diesen von Leroy experimentell gefundenen Satz auch theoretisch zu untersuchen, ist der Zweck der Arbeit des Verfassers, die hier in einem Auszuge vorliegt. Basirt ist die Untersuchung auf die Theorie des Widerstandes der Materialien, speciell auf die von Résal befolgten Methoden. Die Spirale wird als aus einer Reihe von übereinander gelegten Kreisen bestehend angesehen und die Anfangskrümmung in jeder Ausdehnung der Feder als constant angenommen. Es werden dann die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Spirale bestimmt und daraus der Ausdruck für das Moment hergeleitet, welches auf den Balancier wirkt, und der für den seitlichen Druck, den die Axe des Balancier's erleidet. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, diese Ausdrücke in endlicher Form zu erhalten. Der Verfasser sucht dies durch Entwickelung zu umgehen und gelangt so zu

einem Ausdruck für die Zeit $T$, der dann für den Isochronismus massgebend ist. Der Verfasser giebt dann die Verhältnisse an, unter denen Isochronismus stattfindet, und bespricht die verschiedenen Lösungen, welche in der Praxis auftreten können, ihren Einfluss auf den Isochronismus und die Mittel zur Vermeidung desselben. O.

---

R. Mischer. Die Bewegung materieller Punkte auf vorgeschriebenen beweglichen Bahnen. Schlömilch Z. XXI. 219-224.

Denkt man sich mit der Bahn $B$ (einer Fläche $F$ oder einer Curve $C$) des materiellen Punktes $P$, dessen Masse als Einheit genommen wird, ein rechtwinkliges System ($\mathfrak{S}$) oder ($\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$) fest verbunden, so wird jeder Bewegung von $B$ eine Bewegung von ($\mathfrak{S}$) entsprechen und umgekehrt. Die unendliche Mannigfaltigkeit der Bewegungen von $B$ wird der unendlichen Mannigfaltigkeit der Bewegungen von ($\mathfrak{S}$) äquivalent sein, und es wird mithin die Bewegung von $B$ eine völlig willkürliche sein, sobald man dem ($\mathfrak{S}$) freie Beweglichkeit gegeben hat. Der Verfasser findet nun, dass die Bewegungsgleichungen linear sind, wenn die Bahn des Punktes $P$ eine Gerade oder eine Ebene oder die Fläche eines Kreiscylinders oder eine auf einer solchen Fläche verzeichnete Curve ist. Wird der Punkt $P$ von constanten Kräften beeinflusst, und hat die Bahn $B$ nur eine translatorische Bewegung mit constanter Beschleunigung, so kommt die Zeit nicht explicite in den Bewegungsgleichungen vor, etc. O.

---

Moret-Blanc. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 69-72.

Damit sich ein Punkt $m$, der von einem Punkt $O$ mit einer Kraft, die eine Function der Entfernung ist, angezogen wird, sich auf einer logarithmischen Spirale mit dem Pol $O$, die sich um diesen Punkt mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit dreht, bewegt, muss das Gesetz der anziehenden Kraft sein

$$\frac{(1+m^2)c^2}{r^2} - m^2\omega^2 r,$$

wo $r = ae^{m\theta}$ die Gleichung der Spirale, $\omega$ die Winkelgeschwindigkeit ist. O.

---

Moret-Blanc. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 37-41.

Ein schwerer Punkt befindet sich im Pole einer logarithmischen Spirale ohne Masse. Diese rollt in Folge der Schwere des Poles ohne Gleitung auf einer horizontalen Geraden. Es wird die Bewegung derselben untersucht, sowie die Enveloppen der einzelnen Windungen, und Aehnliches. O.

---

A. de St.-Germain. Des surfaces sur lesquelles un point peut se mouvoir suivant une certaine loi. Liouville J. (3) II. 325-330.

Ein materieller Punkt $M$, dessen Masse gleich der Einheit, wird durch eine Kraft $F$ angegriffen, deren Projection auf drei rechtwinklige Axen

$$X = \frac{du}{dx}, \quad Y = \frac{du}{dy}, \quad Z = \frac{du}{dz}$$

sind, wo $u$ eine gegebene Function von $x, y, z$ ist. Die Gleichung

$$u = \text{const.}$$

stellt dann eine Niveaufläche vor, deren Schnitt mit einer beliebigen Fläche $S$ als Niveaulinie auf $S$ bezeichnet werden kann. Diese Oberfläche $S$ wird so bestimmt, dass der Punkt $M$, genöthigt auf ihr zu bleiben und ohne Anfangsgeschwindigkeit der Wirkung von $F$ überlassen, stets eine zu allen Niveaulinien orthogonale Bahn beschreibt. Der Verfasser leitet zunächst die partielle Differentialgleichung 2ter Ordnung her, welche die gesuchte Fläche darstellt. Das erste Integral derselben ergiebt sich unmittelbar. Es wird alsdann der Winkel bestimmt, den die Normale in einem Punkte mit der Normale der Niveaufläche macht. Derselbe steht an dem Punkte einer Schnittlinie im umgekehrten Verhältniss zum Differentialparameter 1ter Ordnung der

Niveaufläche. Zwei unendlich benachbarte Niveaulinien schneiden gleiche Bogen auf ihren orthogonalen Trajectorien $C$ ab, diese sind daher geodätische Linien auf $S$. Zum Schluss werden specielle Fälle behandelt. O.

---

J. E. Böttcher. Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer Kugel unter Einwirkung von Kräften in einer Meridianebene mit dem Potential $Ax_1^2+Bx_2^2+Bx_3^2$. Schlömilch Z. XXI. 145-177.

Der Verfasser zeigt zunächst, dass jedes Problem, mit oder ohne Kräftefunction, bei welchem die Fläche eine Rotationsfläche ist und die Kräfte nur in der Meridianebene wirken, integrabel ist. Nach Richelot lässt sich dieser Satz dahin erweitern, dass die gegebene Rotationsfläche nicht fest zu liegen braucht, sondern mit einer constanten Rotationsgeschwindigkeit um die Rotationsaxe begabt sein kann. Ein specielles, zu dieser Gattung gehöriges Problem behandelt der Verfasser in dieser Arbeit. Es ist die Bewegung eines Punktes auf der Oberfläche einer homogenen Kugel unter Einfluss einer Attraction der Kugel selbst und einer gleichförmigen Rotation. Nach Aufstellung der Bewegungsgleichungen gelangt der Verfasser zu dem Ausdruck für $t$. Er zeigt sodann, dass der bewegliche Punkt den Pol nur in dem Falle erreichen kann, wo seine Anfangsgeschwindigkeit ganz in die Meridianebene fällt, oder wenn er schon Anfangs im Pol war. Ist der bewegliche Punkt zu einer Zeit längs eines Meridians gegangen, so bleibt er immer auf demselben; dasselbe findet für den Parallelkreis statt. Der Verfasser discutirt nun die einzelnen Fälle weiter, d. h. die Fälle von Oscillationen oder Umlaufen des Meridians. Im zweiten Theile nimmt der Verfasser die Reduction des für $t$ aufgefundenen Integrals auf die Normalform vor, betrachtet dann speciell die Ausdrücke für die geographische Länge und Breite, und bespricht endlich die Abhängigkeit der Coordinaten von einander. O.

---

Th. Bertram. Beitrag zur Kenntniss von der Bewegung eines schweren Punktes auf Rotationsflächen mit vertikaler Axe. Grunert Arch. LIX. 193-216.

Im ersten Paragraphen der vorliegenden Arbeit stellt der Verfasser zunächst die Bewegungsgleichungen für die allgemeine Rotationsfläche auf und entwickelt die Gleichungen zur Bestimmung der nöthigen Elemente, die auf einfache Quadraturen führen. Ein algebraisches Integral findet sich nur bei der Cylinderfläche. Für dieselbe ergiebt sich eine Bahn, welche bei der Abwickelung des Cylinders auf eine Ebene eine Parabel darstellt. Die Kugel, als schon ausreichend untersucht, übergeht der Verfasser und wendet sich im zweiten Paragraphen zu dem Rotationsparaboloid. Es findet sich hier, dass der bewegliche Punkt zwischen zwei horizontalen Ebenen $z = h$ und $z = \frac{v^2}{2g}$ oscillirt, dergestalt, dass diese Bewegung nie aufhört. Die Zeit wird ein elliptisches Integral der Variabeln $z$. Die Zeit einer ganzen Oscillation zerfällt in zwei Theile dergestalt, dass der Punkt dieselbe Zeit braucht, um von der unteren zur oberen Fläche zu steigen, als um von der oberen zur unteren zu fallen. Es wird dann der vom Radius vector beschriebene Winkel behandelt. Das Wachsen des Winkels erfolgt symmetrisch zu den Grenzebenen. In ähnlicher Weise wird dann im dritten Paragraphen der Rotationskegel betrachtet. O.

---

E. Mathieu. Mouvement de la rotation de la terre. Liouville J. (3) II. 53-69, 161-165.

Siehe Abschn. XII. Cap. 2.

---

Tägert. Mathematische Collectaneen. Pr. Siegen.

Siehe Abschn. XII. Cap. 2.

---

L. Hübner. Mathematische Abhandlung. Pr. Marienwerder. Siehe Abschn. XII. Cap. 2.

---

A. J. Pick. Die theoretische Begründung des Foucault'schen Pendelversuches. Wien. Ber. 1876. No. 11. 86-87.

Vorläufige Mittheilung. B.

---

F. Bielmayr. Zum Beweis des Foucault'schen Pendelversuchs. Hoffmann Z. VII. 185-186.

S. Günther. Weitere Bemerkungen zum Foucault'schen Pendelversuch. Hoffmann Z. VII. 187-192.

J. Pick. Eine correcte Ableitung des Foucault'schen Pendelgesetzes. Hoffmann Z. VII. 266-271.

Der erste Aufsatz reproducirt eine fehlerhafte Deduction, welche ein für endliche Zeit gültiges Gesetz direct zu geben verspricht. Der zweite kritisirt die Argumentation der Urschriften, nämlich von Hullmann und Friedlein, an deren Resultat bereits Schelle und Pick bemerkt hatten, dass es für einen speciellen Werth falsch war, ein Umstand, in dem sie jedoch nur eine einzelne Ausnahme von der sonst gültigen Formel erblickten. Günther erklärt zunächst, dass der einzelne Fall schon die Unrichtigkeit der Formel, also auch der Deduction beweist, und deckt den Fehlschluss auf, der bei Zerlegung der Rotation in Componenten begangen ist und häufig begangen wird. Es folgt eine Nachbemerkung von Pick. Im dritten Aufsatz geht Pick von der Annahme aus, dass die Schwingungsebene eine unendlich kleine Zeit lang ihre Stellung behält, d. h. dass die consecutiven Schwingungsebenen sich in einem horizontalen Erddurchmesser schneiden, und gewinnt daraus auf sphärisch-trigonometrischem Wege den Werth der Variation der Ebene.

H.

---

R. Townsend. Solution of a question (4810). Educ. Times XXV. 20-21.

Ein Theilchen $P$ beschreibt in Folge der Anziehung eines zweiten $G$ eine Ellipse. Das letztere bewegt sich auf der grossen Axe und ist einer Anziehung nach dem Centrum unterworfen ($P$ ist frei davon). Es wird untersucht, bei welchem Anziehungsgesetz $PG$ immer Normale im Punkte $P$ ist. O.

---

Schulze. Ueber die Oscillationen zweier einander nach dem Newton'schen Gesetz abstossenden Punkte, welche auf der Peripherie eines Kreises zu bleiben gezwungen sind. Pr. Marienburg.

Der Verfasser stellt zunächst die Gleichungen des Problems in rechtwinkligen Coordinaten auf, zeigt sodann, dass die Summe der lebendigen Kräfte immer dieselbe ist, wenn die Punkte dieselbe Entfernung haben, beweist ferner, dass, wenn man die von jedem Punkte beschriebene Fläche mit der Masse desselben multiplicirt, die Summe dieser Producte proportional der erforderlichen Zeit sei. Sodann transformirt er die gefundenen Gleichungen in Polarcoordinaten und entwickelt daraus den Ausdruck für die Zeit, der ein elliptisches Integral wird. Er betrachtet sodann im zweiten Capitel den Fall

$$m\omega + m'\omega' = c = 0,$$

wo $m$ und $m'$ die Massen, $\omega$, $\omega'$ die Anfangsgeschwindigkeiten sind. Es ergiebt sich dabei, dass beide Punkte stets entgegengesetzte Geschwindigkeiten und gleichzeitig die Geschwindigkeit Null haben. Von der Anfangslage, bestimmt durch die Winkel $\alpha$ und $\alpha'$, zwischen denen die Relation $m\alpha = m'(\pi - \alpha')$ besteht, in entgegengesetzter Richtung ausgehend, nehmen die Punkte an absoluter Geschwindigkeit zu und erreichen jeder das absolute Maximum, wenn sie sich diametral gegenüberstehen. Von hier aus nähern sich die Punkte wieder, wobei ihre Geschwindigkeiten abnehmen und schliesslich Null werden. Von da an kehren die Punkte wieder um, erreichen abermals das absolute Maximum

der Geschwindigkeit und stehen zum zweiten Male still, um nun eine zweite Oscillation zu beginnen. Es wird sodann die Schwingungsdauer bestimmt. Im dritten Capitel wird dann der allgemeine Fall

$$m\omega + m'\omega' = c > 0$$

behandelt. Hier dreht sich jedes Mal in constanter Zeit das System um einen constanten Winkel. Nach dieser Zeit haben die Punkte immer wieder dieselbe Geschwindigkeit und denselben Winkelabstand. Beide Punkte wechseln auch hier ihre Bewegungsrichtung zwei Mal. O.

---

H. Résal. Note sur le mouvement du système de deux pendules simples, dont l'un est attaché à un point fixe et l'autre à la masse qui termine le premier. Liouville J. (3) II. 165-169.

Es werden zwei Pendel von gegebener Länge betrachtet, von denen das untere seinen Aufhängepunkt im schweren Punkte des oberen Pendels hat, mit Berücksichtigung der Wirkung, welche das zweite auf die Masse des oberen ausübt. Sind die ursprünglichen Ausschlagswinkel $\alpha$, $\alpha'$ klein, so findet man als Gleichungen

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\alpha + \mu\frac{g}{l}(\alpha'-\alpha) = -\frac{g}{l}(1+\mu) + \frac{\mu g}{l}\alpha'$$

$$\lambda\frac{d^2\alpha'}{dt^2} = -\frac{g}{l}\alpha' - \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

wo $\lambda$ und $\mu$ die Verhältnisse der Längen und Massen bezeichnen. Diesen Gleichungen wird genügt durch

$$\alpha = M\cos k(t+\varepsilon),\ \alpha' = M'\cos k(t+\varepsilon),$$

wo $M$, $M'$, $k$, $\varepsilon$ Constante sind. $k$ hängt dabei von einer Gleichung 2ten Grades ab, welche stets zwei reelle, positive Wurzeln hat. Daraus ergeben sich dann die Werthe von $M$, $M'$, $\varepsilon$. Es ergiebt sich, dass jedes der beiden Pendel im Allgemeinen zwei Oscillationen ausführen wird, deren Dauer verschieden ist, welche aber dieselben für die beiden Pendel sind. Eine einfache Oscillation tritt nur ein, wenn sich das System auf ein einziges

Pendel reducirt. Harmonische Oscillationen, d. h. solche, bei denen die Dauer einer Oscillation das Doppelte der Dauer der andern ist, tritt nur ein, wenn $\mu < \frac{9}{16}$.

O.

---

G. W. Hill. Reduction of the problem of three bodies. Analyst III. 179-185.

Zweck der Arbeit ist, unter Benutzung der bekannten Integrale des Problems die drei Differentialgleichungen zu finden, welche die Seiten des Dreiecks bestimmen, das von den drei Körpern gebildet wird. Lagrange hat diese Frage zuerst in seinem „Essai sur le problème des trois corps" (Oeuvres VI. 227) behandelt. Seine Formeln entbehren jedoch der Symmetrie. Sein Herausgeber Serret hat dies in einer Note verbessert und zugleich auf den Fehler von Hesse (Borchardt J. LXXIV.) aufmerksam gemacht. Durch Benutzung einer orthogonalen Substitution zur Reduction der Zahl der Coordinaten von neun auf sechs stellt der Verfasser die Massen, die in die Gleichung eingehen, nur durch die Potentialfunction und ihre Derivationen dar. Er behauptet, auf diesem Wege im Stande zu sein, einige Eliminationen auszuführen.

Glr. (O.)

---

E. Mathieu. Problème des trois corps. Liouville J. (3) II. 345-371.

Siehe Abschn. XII. Cap. 2.

---

V. Cerruti. Intorno ai movimenti non periodici di un sistema di punti materiali. Atti d. Acc. R. d. L. (2) III. 244-249.

---

W. K. Clifford. On the free motion under no forces of a rigid system in an $n$-fold homaloid. Proc. L. M. S. VII. 67-70.

Vorläufige Notiz. Da die Arbeit auch in extenso erscheinen wird, wird das Referat besser bis dahin verschoben. O.

---

R. J. Adcock. Problem. Analyst III. 61-62, 129-131.

Lösung des Problems: Eine Kugel rollt auf einer anderen Kugel herunter auf eine horizontale Ebene. Die Bewegung der Kugeln zu bestimmen, sowie den Trennungspunkt und die Gleichung der von der oberen beschriebenen Curve. Glr. (O.)

---

S. Tebay. Solution of a question (4874). Educ. Times XXV. 29-30.

Wenn ein Ring, ohne zu gleiten, eine unter dem Winkel $i$ geneigte Ebene hinunterrollt, so muss $\tang i < 2\mu$ sein, wo $\mu$ der Reibungscoefficient ist. O.

---

A. G. Greenhill. Solution of the equations of motion of a rigid body moveable about a fixid point under the action of no forces. Quart. J. XIV. 182-183.

Reproduction einer Lösung, die sich in Kirchhoff's Vorlesungen über mathematische Physik befindet. Sie zeigt, dass die Bewegungsgleichungen befriedigt werden durch die Annahme

$$p = a\cos\text{am}\,\lambda t,\ q = b\sin\text{am}\,\lambda t,\ q = c\,\Delta\text{am}\,\lambda t.$$

Cly. (O.)

---

A. G. Greenhill. Solution of Euler's equations of motion by means of elliptic functions. Quart. J. XIV. 265-271.

Der Zweck der Arbeit ist, die Jacobischen Formeln für das Problem der Bewegung eines Körpers, auf welchen keine äusseren Kräfte wirken, so zu modificiren, dass nicht die Cosinus der Richtungswinkel für die Hauptaxen des Centralellipsoids berechnet werden, sondern drei andere Winkel. Nimmt man nämlich die contante Richtung der Axe des resultirenden Paares der Momentan-

kräfte zur $z$-Axe, sind $OA$, $OB$, $OC$ die Richtungen der Hauptaxen des Körpers, so sind jene Winkel diejenigen, welche die Ebenen $zOA$, $zOB$, $zOC$ mit einer festen durch $z$ gelegten Ebene bilden. Jene Winkel werden durch drei elliptische Integrale dritter Gattung ausgedrückt, deren Parameter in einfachen Beziehungen stehen. Alle drei bestehen somit aus einem periodischen und einem nicht periodischen Theile. Uebrigens sind die Resultate nicht neu.

Wn.

---

R. S. Ball. The theory of screws. A study in the dynamics of a rigid body.

1. Twists and wrenches.

„Eine Schraube (screw) ist eine gerade Linie im Raume, mit welcher eine bestimmte lineare Grösse, Gewindesteigung (pitch), verbunden ist“. Man sagt, ein Körper habe eine Schraubung (twist) um eine Schraube erlitten, wenn er um die Schraube gedreht ist, während er gleichzeitig parallel zur Schraube fortbewegt wird um eine Entfernung, die gleich dem Producte aus der Gewindesteigung in den Kreisbogen des Drehungswinkels ist“. Also: „Die canonische Form, auf welche die Verrückung eines starren Körpers reducirt werden kann, ist eine Drehung um eine Schraube“. (Chasles).

Wir werden den Ausdruck Ruck auf einer Schraube (wrench on a screw) gebrauchen, um damit eine Kraft längs der Schraube und ein Kräftepaar in einer zur Schraube senkrechten Ebene zu bezeichnen, wobei das Moment des Paares gleich ist dem Product aus der Kraft in die Gewindesteigung der Schraube. Man kann dann sagen: „Die canonische Form, auf welche alle an einem festen Körper wirkenden Kräfte reducirt werden können, ist ein Ruck auf einer Schraube“. (Poinsot).

2. The cylindroid.

Wenn $\alpha$ und $\beta$ zwei Schrauben mit den Gewindesteigungen $p_\alpha$ und $p_\beta$ sind, wenn $d$ die kürzeste Entfernung zwischen $\alpha$ und $\beta$ ist und $\theta$ der Winkel zwischen $\alpha$ und $\beta$, dann ist die Arbeit, welche durch einen Ruck von der Intensität $\beta''$ auf der Schraube $\beta$

geleistet wird, wenn ein Körper eine Schraubung mit der Amplitude $\alpha'$ erleidet, gleich

$$\alpha'\beta''\{(p_\alpha+p_\beta)\cos\theta-d\sin\theta\}.$$

Die Theorie der Schrauben steht vielfach in Verbindung mit den neueren geometrischen Untersuchungen von Plücker und Klein über lineare Complexe. Letzterer hat bewiesen (Clebsch Ann. II. p. 368), dass, wenn $p_\alpha$ und $p_\beta$ die Hauptparameter eines linearen Complexes sind und wenn

$$(p_\alpha+p_\beta)\cos\theta-d\sin\theta=0,$$

wo $d$ und $\theta$ sich auf die Hauptaxen des Complexes beziehen, dann die beiden Complexe eine specielle Beziehung zu einander haben und in Involution stehen.

Die Grösse

$$(p_\alpha+p_\beta)\cos\theta-d\sin\theta$$

wird der „virtuelle Coëfficient" der beiden Schrauben $\alpha$ und $\beta''$ genannt.

Eine Eigenschaft des virtuellen Coefficienten ist von der grössten Wichtigkeit. Wenn die beiden Schrauben vertauscht werden, bleibt der virtuelle Coefficient unverändert. Die Identität der Gesetze für Schraubungen und Rucke rührt von dieser Eigenschaft her, ebenso auch die Theorie der reciproken Schrauben.

Die Oberfläche, deren Gleichung (Plücker)

$$z(x^2+y^2)-(p_\alpha-p_\beta)xy=0$$

ist, wird Cylindroid genannt.

Die Gewindesteigung der Generatrix, welche einen Winkel $\theta$ mit der Schraube der Axe macht, ist

$$p_\alpha\cos^2\theta+p_\beta\sin^2\theta.$$

Die Gewindesteigung jeder Schraube auf einem Cylindroid ist proportional dem umgekehrten Quadrat des parallelen Durchmessers der conischen Gewindesteigung.

Wenn ein Körper kleine Drehungen um drei Schrauben auf einem Cylindroid erleidet, und die Amplitude jeder Schraubung dem Sinus des Winkels zwischen zwei nicht entsprechenden Schrauben proportional ist, so wird der Körper nach der letzten Schraubung dieselbe Lage haben, die er vor der ersten hatte. Wenn ein Körper von Rucken um drei Schrauben auf einem

Cylindroid angegriffen wird und die Intensitäten der Rucke den Sinus der Winkel zwischen zwei nicht entsprechenden Schrauben proportional sind, so halten sich die drei Rucke das Gleichgewicht.

3. Reciprocal screws.

Wenn ein Körper, der nur frei für Drehungen um eine Schraube $\alpha$ ist, unter der Wirkung eines Ruckes auf der Schraube $\beta$ in Gleichgewicht steht, und umgekehrt: wenn ein Körper, der nur frei für Drehung um eine Schraube $\beta$, im Gleichgewicht ist unter Wirkung eines Ruckes auf der Schraube $\alpha$, so nennt man $\alpha$ und $\beta$ „reciproke Schrauben". Wenn eine Schraube $\eta$ reciprok zu zwei Schrauben $\theta$ und $\varphi$ ist, so ist $\eta$ zu jeder Schraube auf dem Cylindroid $(\theta, \varphi)$ reciprok.

Eine zu einem Cylindroid reciproke Schraube muss dasselbe in zwei Schrauben von gleicher Gewindesteigung schneiden und senkrecht sein zu der dritten Schraube auf der Oberfläche, welche sie trifft. Von einem Punkte $P$ denke man die Senkrechten auf die Generatricen des Cylindroids gefällt. Wenn für diese Senkrechten Gewindesteigungen gewählt werden, welche im Zeichen gleich und entgegengesetzt zu den Gewindesteigungen der zwei übrigen Schrauben auf dem Cylindroid sind, welches durch die Senkrechten geschnitten wird, so bilden alle diese Senkrechten einen Kegel von reciproken Schrauben. Dieser Kegel ist vom 2ten Grade. Der Ort einer zu vier gegebenen Schrauben reciproken Schraube ist ein Cylindroid. „Man kann eine Schraube finden, welche zu fünf gegebenen Schrauben reciprok ist".

Auf einem Cylindroid lässt sich immer eine Schraube finden, welche zu einer gegebenen Schraube reciprok ist.

4. Screw coordinates.

Man soll die Intensitäten von sieben Rucken auf sieben Schrauben so bestimmen, dass, wenn die Rucke an einem starren Körper, der entweder ganz frei oder in einer Richtung gezwungen ist, angebracht werden, Gleichgewicht vorhanden ist.

Die Lösung dieses Problems ist identisch mit dem folgenden: Man bestimme die Amplituden von sieben Drehungen um sieben gegebene Schrauben so, dass, wenn diese Schraubungen der

Reihe nach auf einen starren Körper angewandt werden, der Körper nach der letzten Drehung dieselbe Lage hat, wie vor der ersten.

Ein Ruck auf der Schraube $\alpha$, dessen Intensität die Einheit ist, hat als Componenten auf sechs reciproken Schrauben Rucke, deren Intensitäten bezeichnet werden als die Coordinaten der Schraube $\alpha$. Diese Coordinaten werden mit $\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_6$ bezeichnet. Wenn $p_1\ p_2 \dots p_6$ die Gewindesteigungen der sechs in dieser Beziehung zu einander stehenden Schrauben sind, so ist der virtuelle Coefficient der Schrauben $\alpha$ und $\beta$

$$2 \Sigma p_1 \alpha_1 \beta_1.$$

Die Gewindesteigung der Schraube $\alpha$ ist $\Sigma p_1 \alpha_1^2$.

5. Allgemeine Betrachtungen über Gleichgewicht.

Um die Natur der Freiheit, welche ein fester Körper hat, genau zu kennzeichnen, muss man alle Schrauben bestimmen, um die der Körper bei dem vorhandenen Zwange geschraubt werden kann. Die Gesammtheit dieser Schrauben nennt man einen Schraubencomplex $n^{\text{ter}}$ Ordnung und vom $1^{\text{ten}}$ Grade. Die Zahl der Parameter, die nothwendig, um einen Schraubencomplex $n^{\text{ter}}$ Ordnung und $1^{\text{ten}}$ Grades zu charakterisiren, ist $n(6-n)$.

Alle Schrauben, welche zu einem Schraubencomplex $n^{\text{ter}}$ Ordnung und $1^{\text{ten}}$ Grades reciprok sind, bilden einen Schraubencomplex $(6-n)^{\text{ter}}$ Ordnung und $1^{\text{ten}}$ Grades. Wenn der Schraubencomplex $P$ die Freiheit eines festen Körpers ausdrückt, so wird der Körper im Gleichgewicht bleiben durch die Wirkung eines Ruckes auf einer Schraube des reciproken Schraubencomplexes $Q$. Ein Körper, der die Freiheit hat, um alle Schrauben von $Q$ gedreht zu werden, wird durch einen Ruck auf einer Schraube von $P$ nicht gestört werden. Von zwei reciproken Schraubencomplexen ist also jeder der Ort eines Ruckes, der nicht im Stande ist, einen Körper zu stören, welcher die Freiheit hat, um eine Schraube des andern gedreht zu werden.

6. Hauptträgheitsschrauben.

Wenn ein ruhender Körper Freiheit $n^{\text{ter}}$ Ordnung besitzt, so können immer $n$ (aber nicht mehr) Schrauben gefunden werden, so dass, wenn der Körper einen Ruckimpuls auf einer dieser

Schrauben erhält, der Körper um diese Schraube gedreht wird. Wenn $\alpha$ und $\beta$ die beiden augenblicklichen Schrauben und $\eta$ und $\xi$ die entsprechenden angreifenden (impulsive) Schrauben sind, dann muss, wenn $\alpha$ reciprok zu $\xi$ ist, $\beta$ reciprok zu $\eta$ sein. $\alpha$ und $\beta$ bilden dann ein Paar conjugirter Trägheitsschrauben.

7. Potentielle Energie der Verrückung.

Wenn ein freier oder einem Zwange unterworfener starrer Körper aus einer Gleichgewichtslage verrückt wird durch Drehung um kleine Amplituden $\theta_1, \ldots \theta_n$ um $n$ Beziehungs-Schrauben, und wenn $V$ die Arbeit bezeichnet, welche durch diese Bewegung geleistet wird, so hat der Ruck, welcher auf den Körper in der neuen Lage wirkt, zu Componenten auf den Beziehungs- (of reference) Schrauben Rucke, deren Intensitäten gefunden werden durch zweimalige Division der entsprechenden Beziehungsschraube in den Differentialcoefficienten von $V$ genommen nach der entsprechenden Amplitude. Schneidet eine Schraubung um eine Schraube $\theta$ einen Ruck auf der Schraube $\eta$, während eine Drehung um eine Schraube $\varphi$ einen Ruck auf eine Schraube $\xi$ verursacht, so muss, wenn $\theta$ reciprok zu $\xi$ ist, auch $\varphi$ reciprok zu $\eta$ sein.

Man kann $n$ solcher Schrauben finden, dass, wenn der Körper um eine Drehung um irgend eine dieser Schrauben verrückt wird, ein Ruck auf derselben Schraube bewirkt wird. Die Schrauben, welche diese Eigenschaft besitzen, werden Hauptschrauben des Potentials genannt.

8. Harmonische Schrauben.

Wenn ein fester Körper aus einer Gleichgewichtslage durch eine Drehung um eine Schraube $\theta$ verrückt wird, und wenn der hervorgerufene Ruck eine Schraubung des Körpers um dieselbe Schraube $\theta$ hervorzubringen sucht, dann kann $\theta$ eine harmonische Schraube genannt werden. Die Anzahl harmonischer Schrauben ist dieselbe, wie der Grad des Schraubencomplexes, welcher die Freiheit des starren Körpers definirt.

Wenn der Körper eine stabile Gleichgewichtslage inne hat, dann können $n$ harmonische Schrauben aus dem Schraubencomplex $n^{ter}$ Ordnung, welcher die Freiheit des starren Körpers definirt, ausgewählt werden; wenn der Körper aus seiner Gleich-

gewichtslage durch eine Drehung um eine harmonische Schraube verrückt wird und er auch eine kleine Anfangsschraubungsgeschwindigkeit um dieselbe Schraube erhält, dann wird der Körper für immer kleine Schraubungsoscillationen um diese harmonische Schraube ausführen.

9. Grad der Freiheit.

Der Verfasser discutirt vollständig sechs Grade von Freiheit. Des beschränkten Raumes wegen können wir nur einen, den dritten, besprechen.

Freiheit des dritten Grades. Alle Schrauben von gegebener Gewindesteigung $+k$ längs eines gegebenen Schraubencomplexes $S$ der 3[ten] Ordnung liegen auf einem Hyperboloid, dessen eines System von Generatricen sie bilden, während das andere System von Generatricen mit der Gewindesteigung $-k$ längs des reciproken Schraubencomplexes liegt.

Die drei Hauptaxen der Fläche 2[ter] Ordnung der Gewindesteigung setzen, wenn sie mit passenden Gewindesteigungen $p_\alpha$, $p_\beta$, $p_\gamma$ gebildet werden, Schrauben längs des Schraubencomplexes 3[ter] Ordnung zusammen, und die Gleichung dieser Fläche hat die Form

$$p_\alpha x^2 + p_\beta y^2 + p_\gamma z^2 + p_\alpha p_\beta p_\gamma = 0.$$

Jede Schraube von $S$ hat eine Gewindesteigung, welche proportional ist dem umgekehrten Quadrat des parallelen Durchmessers dieser Gewindesteigungsfläche.

Irgend drei coreciproke Schrauben von $S$ sind parallel einer Triade von conjugirten Durchmessern der Gewindesteigungsfläche.

Drei Schrauben längs des Schraubencomplexes und ebenso drei Schrauben längs des reciproken Schraubencomplexes können durch einen beliebigen Punkt gezogen werden. Alle Schrauben des Complexes parallel einer Ebene müssen auf einem Cylindroid liegen.

Man nehme irgend vier Schrauben $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ des Schraubencomplexes 3[ter] Ordnung, dann hat das Cylindroid $(\alpha\beta)$ eine Schraube gemeinsam mit dem Cylindroid $(\gamma\delta)$.

Dafür, dass ein starrer Körper mit Freiheit 3[ter] Ordnung im

Gleichgewichte unter Wirkung der Schwerkraft sei, wird als nothwendige und hinreichende Bedingung Folgendes aufgestellt:

Die Verticale, die durch das Trägheitscentrum geht, muss eine der Generatricen auf der Gewindesteigungsfläche des reciproken Systems sein. Das Trägheitscentrum muss auf einer Gewindesteigung Null liegen, welche zu dem Schraubencomplexe gehört, und daher wird der Zwang, welcher für das Gleichgewicht eines Körpers nöthig ist, der Freiheit von der 3[ten] Ordnung hat, unter Wirkung der Schwerkraft eine Rotation des Körpers um eine bestimmte Linie, welche durch das Trägheitscentrum geht, gestatten.

Das Poinsot'sche Moment-Ellipsoid wird in der Schraubentheorie zu einem speciellen Fall eines anderen Ellipsoids, des Trägheitsellipsoids.

Die kinetische Energie eines starren Körpers, welcher mit einer gegebenen Schraubengeschwindigkeit um einen gegebenen Schraubencomplex 3[ter] Ordnung schraubt, ist proportional dem umgekehrten Quadrate des parallelen Durchmessers dieses Ellipsoids, und ein System von drei conjugirten Durchmessern dieses Ellipsoids ist parallel einem System von drei conjugirten Trägheitsschrauben, welche zu dem Schraubencomplexe gehören. Es werden noch manche andere wichtige Eigenschaften der Freiheit 3[ten] Grades gegeben; wir müssen aber betreffs dieser, wie anderer wichtiger Resultate, um des beschränkten Raumes willen, auf die Arbeit selbst verweisen.

Ein Auszug vom Verfasser selbst findet sich Clebsch Ann. IX. 541—553. Csy. (O.)

---

R. Townsend. On the solution of a problem connected with the displacement by twist motion of a rigid body in free space. Quart. J. XIV. 126-127.

Geometrische Lösung der Aufgabe: Gegeben seien die Lagen von drei freien nicht collinearen Punkten eines Körpers vor und nach der Verrückung; zu bestimmen ist die Axe, der Winkel und die Zeit der Drehung, welche die Verrückung hervorbringt. Es ist

auch ein Beweis für die Möglichkeit gegeben, dass die Verrückung durch eine solche Drehung bewirkt werden kann.

Cly. (O.)

---

WISCHNEGRADSKI. Sur la théorie générale des régulateurs. C. R. LXXXIII. 318-321.

Zweck der Arbeit ist die Untersuchung des Gesetzes der Bewegung, die ein Regulator mit directer Wirkung, bei einem Motor angewandt, annimmt, wenn das Gleichgewicht zwischen der bewegenden Kraft und dem Widerstande dieses Motors einer plötzlichen Störung unterliegt. Die Variationen der Geschwindigkeit und die Veränderungen des Regulators werden dabei als klein vorausgesetzt. Die Functionen, welche die Bedingungen des Problems ausdrücken, entwickelt der Verfasser in Reihen nach steigenden Potenzen kleiner Grössen und begnügt sich dabei mit Gliedern, welche proportional den ersten Potenzen dieser Glieder sind. Er kommt dadurch zu den Bedingungen, durch welche die drei möglichen Fälle charakterisirt werden, dass nämlich die Regulatoren entweder Oscillationen machen, deren Amplituden unbegrenzt mit der Zeit wachsen, und also unbrauchbar sind, oder 2) dass sie Oscillationen ausführen, deren Amplituden mit der Zeit kleiner werden, so dass ihre Lage gegen die Gleichgewichtslage convergirt, oder 3) dass sie keine Oscillationen machen, sondern sich beständig in demselben Sinne bewegen und sich dabei unbegrenzt, unter Wirkung der bewegenden Kraft und bei dem neuen Werthe des Widerstandes, der Gleichgewichtslage nähern.

O.

---

ROLLAND. Sur la théorie dynamique des régulateurs. C. R. LXXXII. 418-421.

Nachdem der Verfasser einen Theil der in früheren Arbeiten enthaltenen, im Jahrbuch bereits besprochenen Resultate recapitulirt hat, giebt derselbe in ganz allgemeinen Umrissen den Gedankengang an, der ihn zu einer allgemeinen Lösung des

Problems geführt hat, indem er namentlich auf die grossen Schwierigkeiten aufmerksam macht, die sich überall der wirklichen Ausführung in analytischer Beziehung entgegen stellen. Den Gedankengang klar zu machen, wäre nur durch Uebersetzung der Arbeit möglich. Referent muss daher auf das Original verweisen. O.

---

Weitere Aufgaben und Lehrsätze aus der Mechanik fester Körper von R. F. SCOTT, TOWNSEND, J. J. WALKER, WOLSTENHOLME, C. LEUDESDORF, A. B. EVANS, W. SIVERLEY, G. S. CARR, A. MARTIN, R. F. DAVIS, S. TEBAY, MORET-BLANC, A. TOURETTES finden sich Educ. Times XXV. 47, 53, 57, 67, 98, 107, 108; XXVI. 29, 78; Nouv. Ann. (2) XV. 63, 77, 166.

O.

---

H. FRITSCH, Der Stoss zweier Massen behandelt unter Voraussetzung ihrer Undurchdringlichkeit. Pr. Königsberg i. Pr.

Der Verfasser giebt zunächst einige allgemeine Bemerkungen über die historische Entwickelung des Stossproblems, bespricht sodann die verschiedenen Definitionen der Undurchdringlichkeit und stellt dann fest, was unter Masse zu verstehen sei. Er gelangt dann zur Aufstellung des zu lösenden Problems: „Eine prismatische Masse $m_1$, deren parallele Endflächen auf den Schnittkanten der Seitenflächen senkrecht stehen, bewege sich ohne Drehung mit einer Geschwindigkeit $c_1$ längs einer Linie, welche auf jenen Endflächen senkrecht steht. Längs derselben geraden Linie bewege sich ebenso eine zweite prismatische Masse $m_2$ mit congruentem Querschnitte und der Geschwindigkeit $c_2$, so dass im Augenblick des Zusammenstosses die zwei einander zugekehrten Endflächen wirklich auf einander fallen. Welches wird die Geschwindigkeit jeder Masse nach dem Stosse sein?“ Der Verfasser findet:

$$v_1 = \frac{c_1+c_2}{2} + \frac{c_1-c_2}{2} \cdot \frac{m_1-3m_2}{m_1+m_2},$$
$$v_2 = \frac{c_2+c_1}{2} + \frac{c_2-c_1}{2} \cdot \frac{m_2-3m_1}{m_2+m_1}.$$

O.

---

MASSIEU. Mémoire sur la locomotive à adhérence totale et à essieux convergents de M. Rochaert. Ann. des Mines (7) X. 213-412.

ROCHAERT. Locomotive à adhérence totale et à essieux convergents. Ann. des Mines (7) X. 413-428.

Beide Arbeiten beschäftigen sich mit der Beschreibung und kritischen Untersuchung eines speciellen Maschinensystems, wobei zugleich in der erst citirten Arbeit eine Reihe allgemeinerer Fragen behandelt werden. Die dazu benutzten Rechnungen bieten indess wesentliches Interesse nur vom technischen Gesichtspunkte aus. O.

---

J. CARBONNELLE et E. GHYSENS. L'action mécanique de la lumière. Ann. soc. scient. Brux. I. 59-74.

Die Emissionstheorie ist nicht im Stande, die Bewegungen des Radiometers in dem Falle zu erklären, dass ein verticales Licht die Flügel streift. Die Undulationstheorie kann dies dagegen (wenigstens partiell), wenn man folgenden allgemeinen Satz berücksichtigt: Wenn ein anziehender oder abstossender Punkt um eine mittlere Lage oscillirt, kann seine mittlere Wirkung auf einen benachbarten Punkt differiren von der Wirkung, die er ausüben würde, wenn er in seiner mittleren Lage unbeweglich bliebe. Diese Differenz kann man bei einer Abstossung betrachten als im umgekehrten Verhältniss zu einer hohen (der 4ten z. B.) Potenz der Entfernung. Die Verfasser leiten aus dieser Bemerkung eine Erklärung der Bewegung des Radiometers unter dem Einfluss des natürlichen Lichtes her. Diese Bewegung muss für die verschiedenen Strahlen des Spectrums verschieden sein,

und zwar für ein streifendes Licht geringer, als für ein Licht senkrecht gegen die Flügel. Dies scheint zu zeigen, dass diese Bewegung abhängt von longitudinalen Schwingungen des Aethers, deren Existenz die mathematische Untersuchung seit lange vermuthen liess.

Unter dem Einfluss von polarisirtem Licht sind die Erscheinungen verschieden. Sind die Schwingungen des Aethers den Flügeln parallel, so muss das Radiometer im entgegengesetzten Sinne wie sonst sich bewegen oder unbeweglich bleiben. Aus Mangel an Instrumenten hat man diese letztere Folge der Theorie nicht nachweisen können. Das Princip der Herren Carbonelle und Ghysens gestattet auch die abstossende Wirkung der Sonne auf den Schweif der Kometen zu erklären, so dass dasselbe nicht ohne Nutzen sein wird, auch wenn die im Radiometer eingeschlossene verdünnte Luft Hauptursache seiner Bewegung sein sollte. Mn. (O.)

---

P. Montani. Sull' azione meccanica della luce. Att. Acc. R. d. Linc. (2) III. 597-600.

---

## B. Hydrodynamik.

Ed. Collignon. Note sur le traité d'hydraulique mathématique et pratique de M. J. Nazzani. Ann. d. p. et d. ch. XII. 611-620.

Uebersicht über den Inhalt eines italienischen Werkes von Nazzani, an dem namentlich die äusserst vollständige Benutzung der früheren Literatur gerühmt wird. Die Einleitung enthält eine Darstellung der Methode der kleinsten Quadrate. Die beiden ersten Theile behandeln ausserdem die Hydrostatik (mit Ausnahme der Stabilität schwimmender Körper), die rationelle Hydrodynamik (sehr kurz), den Ausfluss des Wassers durch Oeffnungen von verschiedener Form, die Bewegung des Wassers in Röhren. Wn.

---

N. Jonkoffsky. Kinematik der flüssigen Körper. Moscauer Math. Samml. VIII. (Russisch).

Diese Arbeit ist ein Abriss der Theorie der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen eines continuirlich veränderlichen Systems und kann als eine Einleitung in die Hydrodynamik angesehen werden. Die meisten bekannten, in verschiedenen Werken über die Hydrodynamik vorkommenden Resultate mit vielen neuen Erörterungen sind hier systematisch dargestellt. Von der Beltrami'schen (Mem. di Bologna (3) I. und II.), denselben Zweck verfolgenden Arbeit unterscheidet sich die vorliegende durch eine mehr geometrisch-synthetische Methode der Darstellung und auch dadurch, dass hier die Theorie der Beschleunigungen nicht, wie dort, ausgeschlossen ist.

(Siehe das folgende Referat.) P.

---

E. Beltrami. Sui principii fondamentali dell' idrodinamica razionale. Parte I., II., III. Mem. d. Bologna (3) I. 431-476, II. 381-437, III. 348-407.

Von der vorliegenden umfangreichen Arbeit, die schon 1872—1874 veröffentlicht ist, sind dem Referenten erst jetzt die ersten drei Theile zugänglich geworden. Diese Theile der Arbeit sind weniger durch die gewonnenen Resultate bemerkenswerth, als durch die Art der Ableitung. Ein grosser Theil der hauptsächlichsten Resultate findet sich schon in früheren Arbeiten, namentlich in denen von Helmholtz, Hankel, W. Thomson u. A. Dem Verfasser eigenthümlich ist die Art, wie er jene Resultate, von einfachen Betrachtungen ausgehend, zu einem einheitlichen Ganzen verbindet und zum Theil erweitert. Die Arbeit erscheint daher wichtig genug, um auch nachträglich noch auf dieselbe hinzuweisen und den Inhalt anzugeben. Ein etwas ausführlicheres Referat wird in den Fortschritten der Physik für 1874 veröffentlicht werden.

Der erste Theil der Arbeit beschäftigt sich mit Betrachtungen rein kinematischer Natur über die Eigenschaften der Flüssigkeitsbewegungen, wie sie in unendlich kleinen Massenelementen vor

sich geben. Namentlich wird die Zerlegung der Bewegung eines Flüssigkeitspartikelchens in eine Massenbewegung, die so vor sich geht, als wäre das Partikelchen fest, und in eine Molecularbewegung, die aus Dilatationen und Contractionen besteht, ausführlich besprochen. Diese Zerlegung, die sich schon bei Helmholtz findet, wird hier auch auf elastische Flüssigkeiten ausgedehnt; ferner werden derselben durch Vergleichung mit anderen möglichen Arten der Zerlegung neue Gesichtspunkte abgewonnen. Neben dem Geschwindigkeitspotential wird das sogenannte Dilatationspotential eingeführt, d. i. eine Function, deren partielle Differentialquotienten die Dilatation nach drei senkrechten Axen angeben. Die wirkliche Bewegung eines Flüssigkeitspartikelchens wird sodann mit derjenigen verglichen, die dasselbe Theilchen vollführen würde, wenn es plötzlich fest würde. Von Interesse ist dabei namentlich der durch das Festwerden eintretende Verlust an lebendiger Kraft. Nachdem noch die bisher angewandten Formeln von geradlinigen auf beliebige krummlinige Coordinaten transformirt sind, schliesst dieser Theil mit der Thomson'schen Darstellung der momentanen Rotation eines Flüssigkeitstheilchens.

Im zweiten Theile werden die Bewegungen in einem endlichen Theile der Flüssigkeitsmasse behandelt. Namentlich wird die Theorie der Wirbelbewegungen und die Analogie zwischen den Flüssigkeitsbewegungen und den elektromagnetischen Wirkungen entwickelt. Dem Helmholtz'schen Satze, dass in einem einfach zusammenhängenden Raume mit festen Wänden keine Bewegung einer incompressiblen Flüssigkeit stattfinden könne die ein Geschwindigkeitspotential besitzt, werden mehrere analoge Sätze an die Seite gestellt, die sich auf mehrfach zusammenhängende Räume und auf mehrdeutige Potentiale beziehen. Nachdem noch die speciellen Formeln für geradlinige Wirbelfäden, sowie für kreisförmige mit gemeinsamer Axe abgeleitet sind, findet sich im dritten Theile das Problem der Bewegung eines festen Körpers in einer incompressiblen Flüssigkeit. An die Aufstellung der allgemeinen Formeln für diese Bewegung schliesst sich die Behandlung des Falls, wo der Körper ein Ellipsoid ist. Als specielle Fälle ergeben sich noch die, in

denen das Ellipsoid in eine Kugel oder einen elliptischen Cylinder oder ein Rotationsellipsoid übergeht. Wn.

---

W. M. Hicks. Quaternion investigations on strains and fluid motion. Quart. J. XIV. 271-292.

Die Arbeit enthält Anwendungen der Quaternionen auf mechanische Probleme. Der erste, kinematische Theil giebt die Theorie der Deformationen eines Körpers in einer Darstellung, die wesentlich von der Darstellung in Tait's Quaternionen abweicht. Nach einigen allgemeinen Betrachtungen über beliebige Deformationen werden speciell die kleinen Deformationen elastischer Körper behandelt, ohne dass aber neue Resultate abgeleitet werden. Im zweiten, hydrodynamischen Theile werden einige der Sätze, die zuerst von Helmholtz in seiner Arbeit über die Wirbelbewegungen aufgestellt sind, mit Hülfe der Quaternionen bewiesen. Es sind namentlich folgende Sätze: 1) Diejenigen Flüssigkeitstheilchen, welche nicht schon im Anfang rotiren, bekommen auch im Verlauf der Zeit keine Rotationsbewegung. 2) Jede Wirbellinie bleibt fortdauernd aus denselben Flüssigkeitstheilchen zusammengesetzt. 3) Das Product aus der Rotationsgeschwindigkeit und dem Querschnitt eines Wirbelfadens bleibt fortdauernd constant. Von den beiden letzten dieser Sätze wird dann gezeigt, dass sie nicht blos für incompressible, sondern auch für compressible Flüssigkeiten gelten. Den Schluss bildet die Darstellung der lebendigen Kraft einer bewegten Flüssigkeit mit Hülfe von Quaternionen. Wn.

---

C. A. Bjerknes. Ueber die Druckkräfte, die durch gleichzeitige, mit Contractionen und Dilatationen verbundene Bewegungen von mehreren kugelförmigen, in einer incompressiblen Flüssigkeit befindlichen, Körpern entstehen. Erster Aufsatz. Gött. Nachr. 1876. 245-288.

Ueber die vorliegende Arbeit ist nach vorläufigen Mit-

theilungen, die in den Forh.-Christ. enthalten waren, schon im vorigen Jahresbericht referirt (F. d. M. VII. 587ff.). Indem wir auf jenes Referat verweisen, bemerken wir noch Folgendes. Der Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential, der die Grundlage der Arbeit bildet, wird hier ausführlich abgeleitet. Die Ableitung der Bewegungsgleichungen selbst geschieht aus dem Hamilton'schen Princip. Die in dem erwähnten Referat mitgetheilten Gleichungen werden hier insofern erweitert, als noch eine äussere bewegende Kraft hinzugefügt wird. Uebrigens nehmen diese Gleichungen jene einfache Form nur an, wenn zu den allgemeinen Voraussetzungen noch die weitere Beschränkung hinzutritt, dass die Verhältnisse zwischen den Radialgeschwindigkeiten und den entsprechenden Radien klein seien. Die vorliegende Arbeit schliesst, nach einer genauen Discussion der einzelnen Theilpotentiale, mit Bemerkungen über die Möglichkeit der angenommenen Radialschwingungen elastischer Kugeln und ihre Vereinbarkeit mit den Elasticitätserscheinungen. Die Folgerungen, die im vorigen Jahresbericht schon mitgetheilt sind, sollen in einer späteren Arbeit abgeleitet werden. Wn.

---

W. Thomson. Vortex statics. Proc. of Edinb. IX. 59-73.

Auszug aus einer grösseren Arbeit. Gegenstand ist die gleichmässige Bewegung von Wirbeln. Am Ende werden dann allgemeine Definitionen und Principien der Theorie der Wirbelbewegung aufgestellt. Glr. (O.)

---

E. Beltrami. Intorno al moto piano di un disco ellittico in fluido. Rend. di Bologna 1876, 39-40.

---

Rayleigh. On waves. Phil. Mag. 1876.

Diese Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit einer speciellen Welle, genannt „Solitary Wave“, die Herr Scott Russell im Jahre 1844 in den Brit. Ass. Rep. beschrieben hatte. Ueber dieselbe

waren von den Herren Thomson, Stokes und Anderen Meinungen ausgesprochen worden, die der des Herrn Russell entgegengesetzt. Rayleigh untersucht den Gegenstand mathematisch und bestätigt Herrn Russels Ansicht. Csy. (O.)

---

H. Résal. Note sur les petits mouvements d'un fluide incompressible dans un tuyau élastique. Liouville J. (3) II. 342-344, C. R. LXXXI. 698-699.

In einer Arbeit von Marey: Mouvement des ondes liquides pour servir à la théorie du pouls (1875) ist eine empirische Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeitswelle in einer elastischen Röhre aufgestellt. Diese wird hier folgendermassen theoretisch abgeleitet. Betrachtet man einen Theil der Röhre, der von zwei Querschnitten in der Entfernung $ds$ begrenzt wird, so muss der Ueberschuss des während der Zeit $dt$ eintretenden Flüssigkeitsvolumens über das austretende gleich der Vermehrung des Volumens in Folge der Elasticität der Wände sein. Dies giebt, wenn $w$ der Querschnitt, $v$ die Geschwindigkeit ist, die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial(wv)}{\partial s} = -\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Der Querschnitt der elastischen Röhre ändert sich mit dem Druck $p$, und zwar ist unter Voraussetzung einer sehr kleinen Dicke $e$ der Röhrenwand gegen den Radius $R$, angenähert

$$(2) \qquad w = w_0\left[1 + \frac{2R_0}{Ee}(p - p_0)\right],$$

wo $E$ der Elasticitätscoefficient der Röhre ist. Setzt man diesen Ausdruck für $w$ in (1) ein, und nimmt dazu die hydrodynamische Gleichung

$$(3) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s},$$

(wobei von äusseren Kräften abstrahirt und ausserdem das Quadrat der Geschwindigkeit vernachlässigt ist), so ergiebt sich durch Elimination von $p$ für $v$ die Gleichung

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{Ee}{2R_0\varrho}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch diese Gleichung bestimmten Bewegung ist aber bekanntlich

$$V = \sqrt{\frac{Ee}{2R_0\varrho}}.$$

Wn.

---

Laroche. Note sur la vitesse de propagation des ondes. C. R. LXXXIII. 741-744.

Die bekannte Näherungsformel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $V$ von Wellen

$$V = \sqrt{gH}$$

wird für Wellen in einem langen gleichförmigen Kanal mit horizontaler Basis abgeleitet. Die Ableitung geschieht durch Betrachtung der in einem Theile des Kanals in dem Zeitelement gewonnenen oder verlorenen Bewegungsgrösse, und beruht auf besonderen nur für diesen speciellen Fall gültigen Voraussetzungen. Wn.

---

P. Boileau. Note concernant les tuyaux de conduite. C. R. LXXXII. 601-604.

P. Boileau. Propriétés communes aux canaux, aux rivières, et aux tuyaux de conduite à régime uniforme. (1re partie.) C. R. LXXXII. 1479-1483.

Für die Geschwindigkeit des Wassers bei der Bewegung in Röhren hat der Verfasser, namentlich aus den Beobachtungen von Darcy, empirische Formeln abgeleitet, die hier mitgetheilt, discutirt und transformirt werden. In der zweiten Arbeit werden diese Formeln mit andern ebenfalls empirischen für Flüsse und Kanäle verglichen. Von theoretischen Erörterungen ist in der Arbeit ein Satz bemerkenswerth, der sich auf die Bewegung des Schwerpunktes eines Volumens bezieht, das man durch zwei Querschnitte von beliebiger Distanz aus einem Wasserstrom ausschneidet. Die Geschwindigkeit dieses Schwerpunktes ist gleich der mittleren Geschwindigkeit, d. h. gleich dem durch den

Querschnitt in der Zeiteinheit hindurchfliessenden Wasservolumen, dividirt durch den Flächeninhalt des Querschnitts.

Wn.

---

F. A. Forel. La formule des seiches. C. R. LXXXIII. 712-714.

Eine von Merian (Ueber die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen, Basel 1828) aufgestellte Formel für die Schwingungsdauer von Wellen in Gefässen wendet der Verfasser an, um aus der Schwingungsdauer der unter dem Namen „seiches" bekannten Wellenbewegung der Schweizer Seen die mittlere Tiefe derselben zu berechnen. Wn.

---

E. Gieseler. Beitrag zur Theorie der Centrifugalpumpen. Z. dtsch. Ing. XIX. 689-710.

Der Verfasser betrachtet die Wassermasse, welche das Rad einer im Gange befindlichen Centrifugalpumpe durchströmt, als ein System materieller Punkte, die sich in congruenten Curven bewegen. Diese Curven erscheinen einem mit dem Rade rotirenden Beobachter als im Allgemeinen der Schaufelform congruent, welche das Wasser leitet. So ergiebt die Schaufelform den Weg des Wassers gegen das Rad, d. h. den relativen Wasserweg. Die relative Geschwindigkeit ergiebt sich dann aus der Wassermenge, welche das Rad in der Secunde durchströmt, und aus der veränderlichen Grösse des Querschnitts der Radcanäle. Kennt man ausserdem die Umdrehungsgeschwindigkeit, so ist der wirkliche Weg eines Wasserpunktes, d. h. sein absoluter Wasserweg, nebst der absoluten Geschwindigkeit bestimmbar. Dann lässt sich ferner die Frage nach der veränderlichen Kraft beantworten, welche auf das frei beweglich gedachte Wassertheilchen gewirkt haben müsste, um es zu veranlassen, die wirklich eingeschlagene Bahn in gleicher Weise zurückzulegen. Auf diese Weise gelangt der Verfasser zu Gleichungen zwischen der Wassermenge pro Secunde, der Geschwindigkeit des Rades, der Gestalt der Schaufeln

und den äusseren mechanischen Kräften; und diese Gleichungen führen zur Beantwortung der hierher gehörigen Fragen.

O.

---

W. Ferrel. On a controverse point in Laplace's theory of tides. Phil. Mag. 1876.

Die Arbeit betrifft die verschiedenen Ansichten der Herren W. Thomson und Airy über Laplace's Theorie der Ebbe und Fluth (siehe F. d. M. VII. 592). Csy. (O.)

---

A. Meyer. Laplace's Theorie der Ebbe und Fluth. Pr. Essen.

Siehe Abschn. XII. Cap. 2.

---

R. Moon. Solution of a question (4978). Educ. Times XXVI. 45-56.

Wenn eine kleine Erregung sich in einer mit Luft gefüllten cylindrischen Röhre fortpflanzt, so ist, wenn die Bewegung parallel der Axe ist,

$$\int_x \left(\frac{v^2}{a^2} + \frac{\varrho^2}{D^2}\right) + 2a \int_t \left(\frac{v}{a} \cdot \frac{\varrho}{D}\right) = 0,$$

wo $v$ und $\varrho$ die Geschwindigkeit und die Dichtigkeit eines Theilchens zur Zeit $t$ sind, dessen Ordinate $x$ ist, und $a$ und $D$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und mittlere Dichtigkeit sind.

O.

---

C. M. Guldberg et H. Mohn. Études sur les mouvements de l'atmosphère. I. Theil. Universitätspr. Christiania.

Die Verfasser haben in diesem ersten Theile ihrer Studien die Entwickelung der Mechanik der Atmosphäre begonnen. Die Resultate sind ohne Zweifel von grosser Wichtigkeit für die Meteorologie.

Im ersten Capitel behandeln die Verfasser das Gleichgewicht der Atmosphäre. Sie berechnen die Transformationen, welche

eine Luftmasse erleidet, indem sie sich erhebt, ohne Wärme zu absorbiren oder abzugeben. Diese Transformationen bestimmen die Stabilität oder Instabilität des Gleichgewichtes der Atmosphäre, von dem die Entstehung verticaler Strömungen abhängt. Die verticalen Strömungen rufen Winde hervor, d. h. horizontale Strömungen. Im zweiten Capitel behandeln die Verfasser die Winde mit geradlinigen oder kreisförmigen Isobaren oder die Wirbelwinde. Sie führen die Reibung an der Oberfläche der Erde ein und die ablenkende Kraft der Rotation der Erde. Sie zeigen, dass man die Bahnen, die Isobaren, die Geschwindigkeiten und die Druckkräfte in einem Winde berechnen kann, wenn man die Parameter oder Constanten des Systems kennt. Für einen Wirbelwind giebt es nur zwei Parameter, nämlich das Maximum der Geschwindigkeit und die Entfernung des Centrums, wo diese statt hat.

Indem die Verfasser die Winde mit geradlinigen Isobaren behandeln, entwickeln sie die Gleichung der Bahn eines Windes, der den Aequator passirt. Die Uebereinstimmung mit den Beobachtungen über die im Atlantischen und Indischen Ocean entstehenden Winde und die Monsums im Indischen Ocean ist sehr deutlich.

Im dritten Capitel entwickeln die Verfasser die Gleichung eines verticalen Stromes und finden, dass die Höhe desselben horizontal begrenzt ist. Ein System von Winden ist daher zusammengesetzt aus zwei horizontalen Strömungen, von denen die eine sich längs der Oberfläche der Erde, und die andere in den oberen Schichten der Atmosphäre bewegt, und einer verticalen Strömung, absteigend oder niedersteigend, die die Vermittelung zwischen den beiden horizontalen Strömungen bildet.

Es ergiebt sich als Resultat der Studien, dass, wenn die Meteorologie Erfolg haben soll, meteorologische Stationen in der Höhe gegründet werden müssen, sei es auf Bergen oder in einem mit selbstregistrirenden Instrumenten versehenen Ballon.

L. (O.)

## Capitel 5.

## Potentialtheorie.

P. G. Lejeune-Dirichlet. Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte, herausgegeben von Dr. F. Grube. Leipzig. Teubner.

In der ersten, 1861 erschienenen, Auflage seines Handbuchs der Kugelfunctionen (p. 309) bemerkt Herr Heine, dass in der nächsten Zeit die Veröffentlichung der Vorlesungen von Dirichlet über die nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung wirkenden Kräfte zu erwarten stehe, von denen mit Recht gesagt worden sei, dass sie das beste Lehrbuch für jenen Gegenstand bilden würden. Dies Urtheil erscheint auch jetzt noch zutreffend; und es ist daher ein verdienstvolles Unternehmen, die Vorlesungen, von denen dem Referenten schon vorher mehrere Abschriften zu Gesicht gekommen sind, durch den Druck auch weiteren Kreisen zugänglich zu machen. Der vorliegenden Veröffentlichung liegen die Vorträge von Dirichlet aus dem Winter 1856—1857 zu Grunde. Der Herausgeber hat nichts gekürzt oder geändert (nur an einer Stelle ist die Reihenfolge geändert). Die Darstellung ist, wie überall bei Dirichlet, musterhaft. Die behandelten Gegenstände sind: 1) Das Potential einer einen Raum erfüllenden Masse, der Green'sche Satz und die charakteristischen Eigenschaften des Potentials. 2) Potential und Anziehung eines homogenen Ellipsoids. Der Ausdruck für das Potential wird ohne Ableitung (mit Erwähnung des Mac-Laurinschen Satzes) angegeben und durch die charakteristischen Eigenschaften des Potentials verificirt. 3) Das Flächenpotential und dessen charakteristische Eigenschaften. 4) Das Potential einer beliebigen, über eine Kugelfläche vertheilten Masse und die hauptsächlichsten Sätze über Kugelfunctionen. 5) Anwendungen der Theorie auf einige Aufgaben der Electricitätslehre. Behandelt wird die Vertheilung der Electricität auf einem kugelförmigen

Leiter, der der Wirkung eines Nichtleiters ausgesetzt ist, auf einer Hohlkugel, wenn der Nichtleiter im Innern; endlich die Vertheilung der Electricität auf zwei leitenden Kugeln. 6) Allgemeine Probleme und Sätze in Bezug auf eine mit Masse belegte Fläche, das Dirichlet'sche Princip, Substitution einer unendlich dünnen Schicht statt einer beliebigen Masse. 7) Magnetismus und Erdmagnetismus. Am Schluss sind einige Anmerkungen des Herausgebers hinzugefügt, die neben einer grossen Zahl von literarischen Nachweisen noch den strengen Dirichlet'schen Beweis für die Entwickelbarkeit einer für alle Punkte einer Kugelfläche gegebenen Function nach Kugelfunctionen enthalten (nach Dirichlet's Abhandlung, Crelle J. 17), ein Beweis, der in den Vorlesungen selbst fehlt. Ausserdem ist in den Anmerkungen noch eine irrthümliche historische Angabe von Dirichlet berichtigt.

Wn.

---

K. Hattendorff. Schwere, Elektricität und Magnetismus. Nach den Vorlesungen von Bernhard Riemann bearbeitet. Hannover 1876.

Herr Hattendorff hat die von Riemann im Sommer 1861 über die Theorie des Potentials und deren Anwendungen gehaltenen Vorträge nach seiner Nachschrift ausgearbeitet, ohne dass ein Manuscript von Riemann zu Grunde lag. Naturgemäss stimmt in der Anlage und Ausführung Vieles mit den Dirichlet'schen Vorlesungen über denselben Gegenstand (cf. das vorstehende Referat) überein, aber Riemann giebt noch sehr viel Eigenthümliches hinzu und geht, indem er in die Theorie des Potentials auch das elektrodynamische Potential hineinzieht, dem Inhalte nach über Dirichlet hinaus.

Der erste Abschnitt enthält die allgemeinen Sätze über die Potentialfunction. Definition der Potentialfunction, Laplace'sche Gleichung, Anziehung einer Kugelschale, deren Dichtigkeit nur vom Radius abhängt, die Gauss'schen Oberflächenintegrale, aus denen auf eigenthümliche, sehr elegante Weise die Poisson'sche Gleichung abgeleitet wird. Es folgen die Eigenschaften der

Potentialfunction einer mit Masse belegten Fläche, die Eigenschaften des Linienpotentials. Daran schliessen sich im zweiten Abschnitt die Green'schen Sätze. Die Green'sche Function für das Innere eines rechtwinkligen Parallelepipedons wird abgeleitet (bisher nicht bekannt). Dann folgt die Potentialfunction eines homogenen Ellipsoids, die jedoch nicht abgeleitet, sondern nur nach den Dirichlet'schen charakteristischen Bedingungen verificirt wird. Daraus werden die Sätze über Anziehung der Ellipsoide abgeleitet. Dabei findet sich jedoch eine Unrichtigkeit, die den Satz am Schluss von pag. 99 betrifft. Dieser Satz ist allerdings richtig für die Anziehung einer unendlich dünnen, von zwei ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoiden begrenzten Schale; er ist falsch, wenn es sich um die Anziehung eines vollen Ellipsoids handelt. Neu ist das dann folgende Problem, das die Anziehung eines homogenen elliptischen Cylinders von endlicher Länge behandelt. Der Abschnitt schliesst, nachdem noch die Green'sche Function für eine Kugel abgeleitet ist, mit dem Satze über die eindeutige Existenz der Green'schen Function und dem Dirichlet'schen Princip.

Der dritte Abschnitt enthält die wichtigsten Sätze der Mechanik, in denen ein Potential vorkommt.

Die folgenden Abschnitte behandeln die Theorie der Elektrostatik, der Elektrodynamik, des Magnetismus und des Elektromagnetismus. Indem wir hinsichtlich der Einzelheiten auf das Original verweisen, heben wir noch hervor, dass in der Elektrostatik namentlich das Problem der zwei elektrisch geladenen Kugeln ausführlich besprochen wird, dass ferner in der Elektrodynamik neben dem Weber'schen Grundgesetz ein neues Grundgesetz aufgestellt wird. Nach dem Riemann'schen Grundgesetz, das hier zum ersten Male ausführlich dargestellt ist, muss man, um die Wechselwirkung zweier einzelnen elektrischen Theile zu erhalten, zwei Functionen $S$ und $D$, das elektrostatische und das elektrodynamische Potential, betrachten, die folgende Werthe haben:

$$S = -\frac{\varepsilon\varepsilon'}{r};$$

$$D = \frac{1}{c^2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{r}\left\{\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)^2\right\},$$

wobei $x, y, z; x_1, y_1, z_1$ die Coordinaten der beiden Theilchen sind, $r$ ihre Entfernung, $c$ eine Constante, $s, s'$ die elektrischen Massen. Dann ist die $x$-Componente der Wirkung auf das erste Theilchen

$$\frac{d\frac{\partial D}{\partial x'}}{dt} - \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x},$$

wobei $x' = \frac{dx}{dt}$ ist und die $\partial$ partielle Differentiationen bezeichnen. Den Schluss bildet die Theorie des Erdmagnetismus; dabei wird der Fundamentalsatz für die Entwickelung nach Kugelfunctionen abgeleitet. Wn.

---

E. Beltrami. Considerazioni sopra una legge potenziale.
Rend. d. Ist. Lomb. (2) IX. 725-733.

---

U. Dini. Sul una funzione analoga a quella di Green.
Atti d. Acc. R. d. Linc. (2) III. 129-137.

---

H. Bruns. Ueber einen Satz aus der Potentialtheorie.
Borchardt J. LXXXI. 349-356.

Beweis des folgenden Satzes: „Es sei die analytische Fläche $F$ in der Umgebung eines ihrer Punkte $P$ frei von Singularitäten, ferner seien $k$, $\varphi$ und $\psi$ drei in der Umgebung von $P$ reguläre Functionen der Coordinaten $x, y, z$, dann existirt immer eine Function $V$, die in der Umgebung von $P$ regulär ist und folgenden Bedingungen genügt:

1) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi k;$$

2) die Werthe, welche $V$ und seine in der Richtung der Normale an $F$ genommene Ableitung in einem Punkte $Q$ von $F$ annehmen, sind gleich den Werthen von $\varphi$ und $\psi$ im Punkte $Q$“.

Durch Einführung dreier neuer Variablen, von denen die eine dem kürzesten Abstande des Punktes $(x, y, z)$ von der Fläche $F$ entspricht, reducirt sich der Beweis auf eine einfache

Anwendung des von S. v. Kowalewsky bewiesenen allgemeinen Theorems über partielle Differentialgleichungen (F. d. M. VII. 201). Als Anwendung dieser Sätze wird dann gezeigt, dass die Niveauflächen des Erdkörpers aus Stücken verschiedener analytischer Flächen zusammengesetzt sind, in der Art, dass zwar die Niveauflächen selbst und die Richtungsänderungen ihrer Normalen überall stetig sind, dass aber die Krümmungen und die Azimuthe der Krümmungslinie allemal dann sich sprungweise ändern, wenn dies für die Dichtigkeit der Fall ist. B.

---

A. Wangerin. Ueber ein dreifach orthogonales Flächensystem, gebildet aus gewissen Flächen vierter Ordnung. Borchardt J. LXXXII. 145-158.

A. Wangerin. Notiz zu dem Aufsatz über ein dreifach orthogonales Flächensystem etc. Borchardt J. LXXXII. 348.

Die hier behandelten Flächen gehören zur Klasse der Cycliden mit drei Hauptebenen. Ihre Gleichung hat die Form

$$(x^2+y^2+z^2)^2+Ax^2+By^2+Cz^2 = D^2,$$

und man erhält, wenn man den Parameter $\lambda$ durch die Relationen

$$A=\frac{a\lambda-4D^2}{\lambda+a}, \quad B=\frac{b\lambda-4D^2}{\lambda+b}, \quad C=\frac{c\lambda-4D^2}{\lambda+c}$$

einführt, wo $a, b, c$ Constante bedeuten, eine in $\lambda$ cubische Gleichung, deren drei Wurzeln $\lambda, \lambda', \lambda''$, Constanten gleich gesetzt, die Schaaren eines dreifach orthogonalen Flächensystems ergeben. Mit Hülfe der bekannten Lamé'schen Relationen werden dann folgende Aufgaben direct auf ultraelliptische Integrale resp. Functionen zurückgeführt: 1) die conforme Abbildung einer Fläche der Schaar auf eine Ebene, 2) die Rectification der Krümmungslinien, 3) die Complanation einer Fläche der Schaar. Diese Resultate sind, wie in der „Notiz" erwähnt wird, grösstentheils bereits früher von Darboux und Tissérand, jedoch von ganz anderen Gesichtspunkten aus, behandelt worden. Neu dagegen ist die Transformation der Potentialgleichung, welche man erhält, wenn man statt $x, y, z$ die Wurzeln $\lambda$ jener cubischen Gleichung als krumm-

linige Coordinaten einführt. Die so gefundene Transformation lässt nämlich erkennen, dass man sofort eine Particularlösung der Potentialgleichung $\triangle V = 0$ erhält, wenn man setzt

$$V = N^{\frac{1}{4}} F(\lambda)\ F_1(\lambda')\ F_2(\lambda''),$$

wo $N$ einen vollständig bekannten und symmetrisch aus den drei $\lambda$ gebildeten Ausdruck bedeutet, während die drei Functionen $F$ einer und derselben gewöhnlichen Differentialgleichung mit zwei willkürlichen Parametern $C$ und $C'$

$$f(\lambda)\frac{d^2F}{d\lambda^2} + \tfrac{1}{2}f'(\lambda)\frac{dF}{d\lambda} + \tfrac{1}{16}(5\lambda^3 + \alpha\lambda^2 + C\lambda + C')F = 0$$

genügen, wo

$$f(\lambda) = (\lambda + a)(\lambda + b)(\lambda + c)(\lambda^2 + 4D^2),$$
$$\alpha = 3(a + b + c).$$

B.

---

G. Darboux. Sur l'application des méthodes de la Physique mathématique à l'étude des corps terminés par des cyclides. C. R. LXXXIII. 1037-1040, 1099-1102.

Der Aufsatz enthält eine elegante Ausdehnung des von Herrn Wangerin für die Potentialgleichung (s. das vorhergehende Referat) gefundenen Resultats auf das orthogonale System von allgemeinen Cycliden. Als Variable werden die fünf Potenzen eines Punktes in Bezug auf fünf feste, zu einander orthogonale Kugeln eingeführt. Sind $R_1 \dots R_5$ die Radien der Kugeln, $R_1x_1 \dots R_5x_5$ die Potenzen eines Punktes, so bestehen zwischen diesen die Relationen

$$\Sigma x_i^2 = 0, \qquad \Sigma \frac{x_i}{R_i} = -2,$$

und das System von orthogonalen Cycliden ist in der Gleichung

$$\Sigma \frac{x_i^2}{\lambda - a_i} = 0$$

enthalten. Wenn man sich durch Benutzung der zweiten Relation zwischen den $x_i$ das Potential in eine homogene Function der $x_i$ vom Grade $-\frac{1}{2}$ verwandelt denkt, so ergiebt sich durch directe Rechnung das Wangerin'sche Resultat. B.

---

F. TISSERAND. Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques homogènes. Liouville J. (3) II. 169-175.

Für den Laplace'schen Satz, dass homogene confocale Ellipsoide bei gleicher Masse dasselbe äussere Potential besitzen, hatte Lagrange 1792 einen analytischen Beweis zu geben versucht, der darauf hinaus kam, zu zeigen, dass das Potential die Form

$$\tfrac{4}{3}\pi abc\varphi(a^2-b^2,\ b^2-c^2)$$

besitzen müsse, wo $a$, $b$, $c$ die Halbaxen des Ellipsoids bedeuten. Lagrange führt für den angezogenen Punkt $(f, g, h)$ die Polarcoordinaten

$$f=\varrho\cos\lambda,\quad g=\varrho\sin\lambda\sin\mu,\quad h=\varrho\sin\lambda\cos\mu$$

ein, entwickelt die reciproke Distanz $1:\triangle$ des Punktes $(f, g, h)$ von dem anziehenden Punkte $(x, y, z)$ nach fallenden Potenzen von $\varrho$ in die Reihe

$$\frac{1}{\triangle}=\frac{1}{\varrho}+\frac{P_1}{\varrho^2}+\frac{P_2}{\varrho^3}+\cdots,$$

und zeigt, dass nach Substitution dieser Reihe in den Potentialausdruck

$$V=\int\frac{dx\,dy\,dz}{\triangle}$$

die aus den Gliedern bis $P_6$ incl. entspringenden Terme in der That die angegebene Gestalt besitzen. Weiter war Lagrange jedoch wegen der bei den Gliedern höherer Ordnung auftretenden Complication der Rechnung nicht gelangt. Indem nun der Verfasser einerseits die für alle $P$ geltende Relation

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=0,$$

andererseits die für die Function $\varphi(a^2-b^2,\ b^2-c^2)$ geltende Differentialgleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial(a^2)}+\frac{\partial\varphi}{\partial(b^2)}+\frac{\partial\varphi}{\partial(c^2)}=0$$

benutzt, gelingt es ihm, durch directe und ziemlich einfache Rechnung den von Lagrange versuchten Beweis für alle Terme jener Reihe zu leisten. B.

---

N. M. Ferrers. On Clairaut's theorem and the variation of gravity at the surface of the earth. Messenger (2) VI. 14-18.

Zweck der Arbeit ist die Bestimmung eines genauen Ausdrucks für die Variation der Schwere an den verschiedenen Punkten der Erde (mit dem Wort Schwere meint der Verfasser die Resultante der Erdanziehung und der Centrifugalkraft). Die Erde wird als abgeplattetes Gleichgewichts-Sphäroid, entstanden aus der Wirkung der Anziehung seiner Theilchen und der Centrifugalkraft, betrachtet. Als Gleichung für $g$ ergiebt sich:

$$\frac{g_c}{c}-\frac{g}{c(1+\lambda^2\cos^2 l)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2\lambda^2(\lambda-\text{arc tang}\,\lambda)}{(3+\lambda^2)\,\text{arc tang}\lambda-3\lambda}\,\frac{(1-\lambda^2)\cos^2 l}{1+\lambda^2\cos^2 l}\,\omega^2,$$

wo $a$ und $c$ die Halbaxen des Sphäroids, $\lambda^2=\frac{a^2-c^2}{c^2}$, $l$ die Breite, $g_c$ der Werth der Schwere am Pole ist. Clairaut's Satz entspricht dem speciellen Falle wo $\lambda$ sehr klein, $l=0$.

Glr. (O.)

---

G. Zolotareff. Sur l'attraction des ellipsoides homogènes. Nouv. Ann. (2) XV. 416-422.

Gegeben ist ein homogenes Ellipsoid mit den Halbaxen $a, b, c$, der Masse $M$, der Dichtigkeit $\varrho$; die auf den inneren Punkt $(f, g, h)$ ausgeübte Attraction gebe, nach den drei Halbaxen zerlegt, die Componenten $A, B, C$; dann bestehen für die $A, B, C$ unter der Voraussetzung $a>b>c$ folgende drei lineare Relationen:

$$\frac{A}{f}+\frac{B}{g}+\frac{C}{h}=4\pi\varrho,$$

$$\frac{Aa^2}{f}+\frac{Bb^2}{g}+\frac{Cc^2}{h}=\frac{3M}{n}F(k,\varphi),$$

$$\frac{Aa^2(b^2+c^2)}{f}+\frac{Bb^2(c^2+a^2)}{g}+\frac{Cc^2(a^2+b^2)}{h}=\frac{3Mabc}{a^4}\,\frac{S}{\pi},$$

wobei

$$n^2=c^2-a^2,\ m^2=b^2-a^2,\ k^2=1-\frac{m^2}{n^2},\ \cos\varphi=\frac{a}{c},$$

$F(k, \varphi)$ das Legendre'sche Zeichen für das elliptische Integral 1ter Gattung, $2S$ die Oberfläche eines Ellipsoids mit den Halbaxen $\frac{2\sigma^2}{a}$, $\frac{2\sigma^2}{b}$, $\frac{2\sigma^2}{c}$, $\sigma$ beliebig ist. Die ersten beiden Relationen sind bereits von Legendre bei der Reduction der Componenten $A$, $B$, $C$ auf elliptische Integrale 1ter und 2ter Gattung gegeben worden. Für die dritte Relation, welche offenbar das Integral 2ter Gattung einführt, ist in der vorliegenden Note eine Verification mitgetheilt. B.

---

H. Züge. Ueber die Anziehung eines homogenen Ellipsoids. Clebsch Ann. X. 273-287.

Der Verfasser benutzt den von Heine (Borchardt J. LXXVI.) abgeleiteten einfachen Ausdruck für das Potential eines Kreises, um das Potential des durch seine Kreisschnitte in unendlich dünne Kreisscheiben zerlegten Ellipsoids durch ein Doppelintegral auszudrücken, welches nach Umkehrung der Integration sich ohne besondere Schwierigkeit auf die bekannte Form reduciren lässt. Hierbei ist hervorzuheben, dass der Gang der Rechnung für Punkte innerhalb und ausserhalb im Wesentlichen derselbe ist. Diese Anwendung des Heine'schen Ausdruckes ist jedoch nicht blos auf das Newton'sche Attractionsgesetz beschränkt, sondern man kann auch, wie der Verfasser zeigt, durch einen kleinen Kunstgriff das Potential des homogenen Ellipsoids auf ganz ähnliche Weise darstellen, wenn die Anziehung umgekehrt proportional irgend welchen ganzen positiven Potenzen der Entfernung wirkt. Für die dritte, vierte und fünfte Potenz wird die Rechnung von dem Verfasser vollständig durchgeführt und für den allgemeinen Fall wenigstens angedeutet. B.

---

Th. Kötteritzsch. Die Ermittelung der Potentialcoordinaten und der Krümmungslinien einer beliebig gegebenen Niveaufläche durch einfache Quadraturen. Pr. Freiberg i. S.

Potentialcoordinaten nennt der Verfasser die drei Parameter eines dreifach orthogonalen Systems, dessen eine Flächenschaar durch die Niveauflächen eines äussern Potentials gebildet wird, wobei wieder der in den Aufsätzen des Verfassers stereotype Irrthum auftaucht, dass jede beliebige Niveauflächenschaar Theil eines orthogonalen Systems sein könne. Der Inhalt der Arbeit ist deshalb im Wesentlichen zu bezeichnen als eine ziemlich umfangreiche Zusammenstellung von Relationen, welche sich auf ein dreifach orthogonales System beziehen. B.

---

E. J. Nanson. On Gauss's theorem on the potential over a spherical surface. Messenger (2) VI. 52.

Beweis des Satzes

$$V_0 = \frac{1}{4\pi r^2}\int V dS$$

durch die Theorie der Electricität. Glr. (O.)

---

Moret-Blanc. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 41-44.

In einer Masse möge jedes Molecül nach einem Gesetz anziehend wirken, welches durch eine einfache Function der Entfernung des angezogenen Punktes dargestellt werden kann. Denkt man sich nun die Oberflächen, für welche die Geraden, nach denen die Anziehungen der Masse auf alle materiellen Punkte einer von ihnen erfolgt, normal zu einer und derselben Oberfläche sind, so existirt für dieselben eine constante Relation $F(R, V) = 0$ zwischen dem Potential der Masse in Beziehung auf jeden Punkt dieser Oberfläche und der Grösse $R$ der Anziehung der Masse auf diesen Punkt. O.

---

H. Durrande. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XV. 226-228.

Man habe eine Masse, welche nach dem Gravitationsgesetz anzieht. Es sei $dv$ ein unendlich kleines Volumen-Element irgend-

wo im Raume. Wenn man es sich mit homogener Masse von der Dichtigkeit 1 erfüllt denkt, wird es eine Attraction $R$ von Seiten der anziehenden Masse erleiden. Es sei $r$ die Entfernung dieses Elementes $dv$ von einem festen Punkt $M$ und $\varphi$ der Winkel, den die Richtung von $R$ mit der Richtung macht, welche das Element $dv$ mit $M$ verbindet. Bildet man dann die Summe aller Ausdrücke $\frac{R\cos\varphi}{r^2}$, die sich auf alle Elemente $dv$ des Raumes beziehen, so ist dieselbe gleich dem Produkt aus dem Potential der anziehenden Masse für $M$ und $4\pi f$, wo $f$ die Anziehungskraft zweier materieller Punkte mit der Masse 1 und in der Entfernung 1 bezeichnet. O.

---

G. H. Darwin. A geometrical illustration of the potential of a distant centre of force. Messenger (2) VI. 97-98.

Es seien $A$, $B$, $C$ die Hauptträgheitsmomente eines Körpers von der Masse $M$ für den Schwerpunkt, $\varrho$ die Entfernung eines Punktes vom Schwerpunkt. Wenn dann der letztere Punkt sehr entfernt ist, so ist das Potential $V$ des Körpers für diesen Punkt angenähert

$$\frac{M}{\varrho}+\frac{A+B+C-3J}{\varrho^3},$$

wo $J$ das Trägheitsmoment des Körpers um den Radiusvector $\varrho$ ist. Wenn umgekehrt der entfernte Punkt ein anziehendes Centrum ist, so giebt dieser Ausdruck die Potentialresultante des Punktes auf den Körper. Wenn Kraftcentrum und Schwerpunkt fest sind, wird der Körper im Allgemeinen nicht ohne weitere äussere constante Einwirkungen im Gleichgewicht sein. Zweck der Arbeit ist, die Natur dieser äusseren Einwirkungen geometrisch zu erläutern, oder in andern Worten, das resultirende Paar, welches hervorgebracht wird durch das Kräftecentrum auf den Körper. Glr. (O.)

---

R. R. Webb. The potential of an elliptic disc under the law of the inverse cube of the distance. Quart. J. XIV. 98-103.

Die Fläche einer ebenen Ellipse ist mit Masse von constanter Dichtigkeit belegt. Diese Masse zieht einen äusseren Punkt an umgekehrt proportional dem Cubus der Entfernung. Dann sind die Niveauflächen confocale Ellipsoide, welche die gegebene Ellipse zur Focalellipse haben. Dies wird folgendermassen bewiesen: Die Anziehung einer ebenen Fläche von constanter Dichtigkeit auf einen äusseren Punkt kann man bei dem hier zu Grunde gelegten Anziehungsgesetz ersetzen durch die Anziehung einer gewissen Kugelfläche auf denselben Punkt. Die Kugelfläche liegt auf einer Kugel, deren Centrum der angezogene Punkt ist, und welche die gegebene Ebene berührt, und zwar wird die in Rede stehende Fläche aus der Kugel herausgeschnitten durch denjenigen Kegel, dessen Seiten den angezogenen Punkt mit dem Umfang der gegebenen ebenen Fläche verbinden. Im vorliegenden Falle wird die aus der Kugel herausgeschnittene Fläche eine sphärische Ellipse. Die Resultante der Anziehung dieser Fläche liegt in der Axe des Kegels 2ter Ordnung, der den angezogenen Punkt mit dem Umfang der gegebenen ebenen Ellipse verbindet. Diese Axe ist aber die Normale desjenigen Ellipsoids, das durch den angezogenen Punkt confocal der Ellipse zu legen ist.

Der Verfasser berechnet nun weiter die Anziehung und das Potential der Ellipse zunächst für diejenigen Punkte, in denen die Niveau-Ellipsoide von der gemeinsamen Focalhyperbel geschnitten werden, und hat damit das Potential für einen beliebigen Punkt. Dasselbe hat den Werth

$$\frac{\pi\varrho}{2}\log\frac{ab'+a'b}{c'(a+b)}.$$

Darin ist $\varrho$ die Dichtigkeit, $a, b$ die Axen der gegebenen Ellipse, $a', b', c'$ die Axen desjenigen der confocalen Ellipsoide, auf dem der angezogene Punkt liegt. Dann wird auch ohne Benutzung der speciellen Punkte die Gültigkeit des obigen Ausdrucks für einen beliebigen Punkt bewiesen. Endlich wird daraus das

Potential eines elliptischen Cylinders für einen äusseren Punkt in Form eines bestimmten Integrals aufgestellt. Wn.

---

B. Williamson, R. Townsend. Solution of a question (4899). Educ. Times XXV. 56-57.

Eine elliptische Platte von gleichförmiger Dichtigkeit zieht ein ausserhalb gelegenes materielles Theilchen nach dem Gesetz des umgekehrten Cubus der Entfernung an. Es wird dann bewiesen, dass die Richtung der Anziehung zusammenfällt mit der inneren Axe des Kegels, der das Theilchen zur Spitze, die Platte zur Basis hat, ferner dass für verschiedene Lagen des Theilchens auf einem mit der Platte confocalen Ellipsoid die Anziehung ihrer Grösse nach variirt direct proportional dem Lothe vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene an dem Ellipsoid. Und Aehnliches mehr. O.

---

Rayleigh. On the approximate solution of certain problems relating to the potential. Proc. L. M. S. VII. 70-75.

Siehe Abschn. XI. Cap. 3.

---

Weitere Aufgaben und Lehrsätze über Anziehung von R. W. Genese, Townsend, J. J. Walker finden sich Educ. Times XXV. 72, 74, 82; XXVI. 18, 74.

O.

---

A. Cayley. A memoir on prepotentials. Phil. Trans. CLXV. 675-774.

Die Abhandlung bezieht sich auf vielfache Integrale, ausgedrückt in Gliedern von $(s+1)$, schliesslich verschwindenden Variabeln $(x, \ldots z, w)$ und derselben Zahl von Parametern $(a \ldots ce)$, die von der Form

$$\int \frac{\varrho\, d\varpi}{\{(a-x)^2 + \cdots + (c-z)^2 + (e-w)^2\}^{\frac{1}{2}s+q}},$$

wo $\varrho$ und $d\varpi$ nur von den Variabeln $(x, \ldots z, w)$ abhängen. Ein solches Integral wird in Bezug auf den Index $\frac{1}{2}s + q$ „Prepotential" genannt, und wird in dem speciellen Fall $q = -\frac{1}{2}$ ein „Potential" sein.

Die Sprache ist die der Geometrie von mehr als 3 Dimensionen. $(x \ldots zw)$ und $(a \ldots ce)$ werden als Coordinaten von Punkten in einem Raume von $(s + 1)$ Dimensionen betrachtet; die ersteren bestimmen die Lage eines Elements $\varrho d\varpi$ der anziehenden Masse, die zweiten die des angezogenen Punktes.

Es werden hauptsächlich drei Hauptfälle betrachtet. Ein specieller Fall *B* ist zwischen *A* und *C* eingeschoben. Diese Fälle sind:

A. Der Fall des Ebenen-Präpotentials: $\varrho$ allgemein, die anziehende Fläche dagegen ist hier die Ebene $w = 0$, so dass das Massenelement $\varrho dx \ldots dz$.

B. Der Fall des Ebenen-Potentials: $q = -\frac{1}{2}$ und die Fläche die Ebene $w = 0$ wie vorher.

C. Der Fall des Flächen-Potentials: $q = -\frac{1}{2}$, dagegen die Flächen willkürlich oder das Massenelement $\varrho dS$.

D. Der Fall des Körper-Potentials: $q = -\frac{1}{2}$, dagegen die Masse im Raume vertheilt und das Massenelement $\varrho dx\, dy\, dz$.

Jeder der vier Fälle giebt Veranlassung zu einem sogenannten Vertheilungstheorem, nämlich gegeben ist eine Function *V* von $(a \ldots ce)$, die gewissen vorgeschriebenen Bedingungen genügt, sonst aber willkürlich ist; die Form des Theorems ist dann die: Es giebt dann für $\varrho$, die Dichtigkeit oder Vertheilung des Stoffes über den Raum oder die Fläche, auf welche sich der Satz bezieht, einen solchen Ausdruck, der auch gefunden werden kann, dass das Integral *V* gegebene Werthe hat; in A. und B. nämlich giebt es eine solche Vertheilung über die Ebene $w = 0$, in C. über eine gegebene Fläche und in D. eine solche im Raume.

Die Aufstellung dieser vier Vertheilungssätze geschieht in Verbindung mit einander. Die Arbeit enthält ferner noch andere Untersuchungen, welche sich von selbst bei der Behandlung der Frage ergaben. Es wird bemerkt, dass Satz A. von Green her-

stammt. In der That ist es der Fundamentalsatz seiner Arbeit „On the attraction of ellipsoids“ (1835). Satz C. in dem speciellen Falle des Raumes mit drei Dimensionen gehört ihm ebenfalls und findet sich in der Arbeit: „Essay on the application of mathematical analysis to the theory of electricity and magnetism“ (Nottingham 1828) und ist von Gauss 1840 theilweise wieder entdeckt. Satz D. rührt von Lejeune-Dirichlet her (Crelle J. XXXV. p. 80—84. 1840). Diese und andere Untersuchungen von Gauss, Jacobi und Boole werden in den Zusätzen V., IX. und X. der Abhandlung besprochen. Cly. (O.)

# Elfter Abschnitt.

## Mathematische Physik.

### Capitel 1.

### Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

L. SOHNCKE. Die unbegrenzten regelmässigen Punktsysteme als Grundlage einer Theorie der Krystallstructur. Karlsruhe. Braun., Verh. d. naturw. Ver. zu Karlsruhe. VII. Pogg. Ann. Suppl. VII. 337-390.

Als wahrscheinlichste Vorstellung von der inneren Beschaffenheit der krystallisirten Körper galt bisher jene, welche von Bravais eingehend verfolgt ist (Journ. de l'école polyt. XIX.), und die sich kurz so darstellen lässt: Wenn eine Schaar unendlich vieler Parallelebenen gleichen Abstandes geschnitten wird von zwei analogen Schaaren irgend welches andern, je gleichen Abstandes, so bildet die Gesammtheit der Schnittpunkte ein sogenanntes Raumgitter. In den Schnittpunkten liegen die Schwerpunkte der congruent und in paralleler Lage zu denkenden Krystallelemente. Diese Ansicht wird hauptsächlich dadurch gestützt, dass die Eintheilung der Raumgitter nach dem verschiedenen Grade ihrer Symmetrie genau auf dieselben sieben Abtheilungen führt, welche bei den Krystallen als Krystallsysteme bekannt sind. Ausserdem aber ergeben sich, wie der Verfasser der vorliegenden Arbeit früher gezeigt hat (Pogg. Ann. CXXXII.),

diese Gitter auch aus dem Princip der regelmässigen Punktanordnung in den Krystallen. Es giebt aber unter den Bravais'schen Raumgittern keines mit derartigen Symmetrieverhältnissen, wie sie die halbflächigen Krystalle charakterisiren. Um diese Schwierigkeit zu heben, wird in der vorliegenden Arbeit die Theorie der Krystallstructur von einem etwas allgemeineren Gesichtspunkte aus behandelt. Den Ausgangspunkt bildet wieder das Princip der regelmässigen Punktanordnung. Es wird nämlich, indem jedes Krystallelement durch seinen Schwerpunkt ersetzt gedacht wird, für die Lage dieser Schwerpunkte folgende Hypothese zu Grunde gelegt: „Krystalle — unbegrenzt gedacht — sind regelmässige unendliche Punktsysteme, d. h. solche, bei denen um jeden Punkt herum die Anordnung der übrigen dieselbe ist, wie um jeden andern Punkt". Dabei ist es aber, und das ist die Verallgemeinerung gegen früher, wo alle Krystallelemente als parallel liegend vorausgesetzt wurden, nicht nöthig, dass man, um einen Punkt nebst den umgebenden Punkten mit einem andern Punkte und dessen Umgebung zur Deckung zu bringen, nur parallele Verschiebungen auszuführen hat; vielmehr ist ein Punktsystem auch dann regelmässig, wenn zu der obigen Deckung neben der Parallelverschiebung noch Drehungen nöthig sind. Anknüpfend an diese Hypothese stellt sich der Verfasser die Aufgabe, alle überhaupt möglichen regelmässigen Punktsysteme von allseitig unendlicher Ausdehnung zu finden. Er zeigt zunächst, dass ein regelmässiges Punktsystem charakterisirt ist durch diejenige Bewegung, die nöthig ist, um die oben besprochene Deckung hervorzubringen. Wenn man nun die Gesammtheit aller Bewegungen, welche aus gewissen gegebenen Urbewegungen dadurch hervorgehen, dass letztere irgend wie oft und in irgend welcher Reihenfolge wiederholt werden, als eine Bewegungsgruppe bezeichnet, so ist zwar die Zahl aller möglichen Bewegungsgruppen unendlich, doch können alle auf eine endliche Zahl von Gattungen zurückgeführt werden. Nach dem Obigen kommt die Aufgabe, die möglichen regelmässigen Punktsysteme zu ermitteln, auf die andere hinaus, alle Gattungen von Bewegungsgruppen zu ermitteln. Die letztere Aufgabe ist

nun von Herrn C. Jordan gelöst (Brioschi Ann. (2) II., cf. F. d. M. I. 306). Die von Jordan gewonnenen Resultate, die für die vorliegende Aufgabe noch nicht ohne Weiteres verwerthbar sind, hat der Verfasser auf Punktsysteme übertragen. Es waren zunächst von den Jordan'schen Bewegungsgruppen alle diejenigen auszuscheiden, in denen unendlich kleine Bewegungen vorkommen, sodann diejenigen, welche auf Punktsysteme führen, die nicht nach drei Dimensionen unendlich sind. Sodann stellte sich heraus, dass zwölf von Jordan als verschieden aufgestellte Gruppen paarweise identisch sind. Endlich wurden einige Lücken in den Jordan'schen Gruppen ausgefüllt, sowie einige Ungenauigkeiten berichtigt. So ergaben sich 54 unbegrenzte regelmässige Punktsysteme, in 8 Hauptabtheilungen geordnet. Die Hauptabtheilungen zeigen dieselben Symmetrieverhältnisse, wie die verschiedenen Krystallsysteme, derart, dass dem regulären System zwei Abtheilungen entsprechen, jedem andern eine. Der ausführlichen Beschreibung der einzelnen Systeme ist der Haupttheil der Arbeit gewidmet. Ohne auf die Einzelheiten einzugehen, mag hier nur hervorgehoben werden, dass bei nicht wenigen der Punktsysteme die Punkte eine schraubenförmige Anordnung besitzen. Von Wichtigkeit ist ferner der Satz: „Jedes regelmässige, allseitig unendliche Punktsystem ist entweder ein Bravais'sches Raumgitter, oder es besteht aus mehreren (bis 24) in einander gestellten congruenten Raumgittern.“

Durch diese Theorie finden die innerhalb eines jeden Krystallsystems vorhandenen verschiedenen Typen ihre Erklärung, namentlich auch die hemiëdrischen Gestalten und die Uebergangsformen. Auch auf chemische und physikalische Eigenschaften der Krystalle fällt manches neue Licht, so auf die Isomorphie, die Aetzfiguren. Von besonderem Interesse ist endlich der Versuch, die Drehung der Polarisationsebene in gewissen Krystallen, z. B. im Quarz, auf eine schraubenförmige Anordnung der Molecüle zurückzuführen (cf. Abschn. XI., Cap. 2). Nicht erklärt werden durch die auseinandergesetzte Theorie, die ja nur unendliche Punktsysteme betrachtet, die Krystallflächen. Wn.

P. DRONIER. Essai sur la mécanique moléculaire.
Mondes (2) XLI. 701-703.

Kurzer Bericht von Moigno über das Buch, das wesentlich Speculationen zu enthalten scheint. Die Molecüle sind beispielsweise nach dem Verfasser hohle Kugeln; specifische Schwere hängt dann von der Dicke der umhüllenden Schicht ab etc.

O.

---

W. GOSIEWSKI. Ueber die Grundhypothese der Molecularmechanik. Schlömilch Z. XXI. 116-126.

Der Verfasser macht darin folgenden Schluss: Als Bedingung dafür, dass ein Körper starr ist, müssen für die Verschiebungen $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ eines Punktes folgende Gleichungen bestehen

$$\frac{d\delta x}{dx} = 0, \quad \frac{d\delta y}{dy} = 0, \quad \frac{d\delta z}{dz} = 0,$$

$$\frac{d\delta y}{dz} + \frac{d\delta z}{dy} = 0, \quad \frac{d\delta z}{dx} + \frac{d\delta x}{dz} = 0, \quad \frac{d\delta x}{dy} + \frac{d\delta y}{dx} = 0.$$

Dies sind sechs Bedingungsgleichungen, welche bewirken, dass der Körper starr ist. Hat man $n$ Punkte, so werden diese durch $3n-6$ Bedingungsgleichungen gegeneinander unbeweglich. Will man sich also den Körper aus discreten Punkten zusammengesetzt denken, so muss $3n-6=6$, $n=4$ sein, folglich, schliesst der Verfasser, muss jedes Molecül aus vier Atomen bestehen. Ohne präcisere Definition der gebrauchten Ausdrücke ist es aber nicht möglich, der Schlussweise des Verfassers zu folgen.

An.

---

W. GOSIEWSKI. Zwei Sätze aus der Molecularmechanik.
Denkschr. d. P. G. VIII. (Polnisch.)

Der erste Satz betrifft die Anzahl der Elasticitätscoefficienten, nämlich die Potentialformen von Cauchy und Green, im zweiten beweist der Verfasser, dass die mittlere Arbeit der Atomkräfte eines Gases von dessen Dichtigkeit unabhängig ist, dass also der mittlere Druck dem Volumen umgekehrt proportional ist.

Dn.

---

A. PICART. Explication des actions à distance, gravitation, actions électriques. C. R. LXXXIII. 1042-1044.

Der Verfasser glaubt, aus der Annahme eines Aethers, dessen Theilchen in allen möglichen Richtungen sich bewegen, die Gravitation und die Wirkung der elektrischen Kräfte herleiten zu können. An.

---

W. M. HICKS On the friction attribued to the ether. Proc. of Cambr. II. 422-432.

Die Arbeit bezieht sich auf Experimente von Stewart und Tait über die Erhitzung einer Scheibe durch schnelle Rotation im leeren Raum. Es wurde gefunden, dass die Erhitzung herrühre 1) von der Wirkung eines Residuums von Gas, 2) von einer unbekannten Wirkung, welche der Reibung mit dem Aether zugeschrieben wurde. Statt der letzteren Voraussetzung giebt der Verfasser folgende Erklärung: Die Scheibe dehnt sich beim Rotiren schwach aus und wird folglich nach dem umgebenden Raum abgekühlt. Während der Dauer der Rotation stellt sich ein Gleichgewicht der Temperatur her, und die Scheibe wird auf ihre frühere Temperatur erwärmt. Hört die Rotation auf, so zieht sich der Körper auf seine frühere Grösse zusammen und giebt die Wärme aus, die er während der Rotation aufgenommen. Dies wird mathematisch begründet. Glr. (O.)

---

DE SAINT-VENANT. Sur la constitution atomique des corps. C. R. LXXXII. 1223-1226.

Der Verfasser spricht sich darin einer Aeusserung von Berthelot gegenüber lebhaft für die Annahme von materiellen Punkten, von denen Kräftewirkungen ausgehen, aus. An.

---

DE SAINT-VÉNANT. Sur la manière dont les vibrations calorifiques peuvent dilater les corps et sur le coefficient des dilatations. C. R. LXXXII. 33-39.

Bei der Annahme der Elasticitätstheorie, dass die Kraft proportional ist der ersten Potenz der relativen Verschiebungen der Theilchen, ist es nicht erklärlich, wie durch die Wärmeschwingungen ein Körper sich ausdehnt; denn jedes Theilchen schwingt alsdann pendelartig um seine Gleichgewichtslage, es ändert also im Mittel seinen Ort nicht; das ist aber nicht mehr der Fall, wenn man von der Annahme der Proportionalität der Kräfte mit der Verschiebung abgeht und noch höhere Potenzen berücksichtigt; der Körper dehnt sich durch die Wärmebewegung aus, wenn der Coefficient der nächst höheren Potenz positiv, und zieht sich zusammen, wenn derselbe negativ ist. An.

---

L. Boltzmamn. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. Pogg. Ann. Suppl. VII. 624-655.

Es ist dies ein Abdruck der in den Wien. B. LXX. erschienenen Arbeit, über welche in den F. d. M. VI. 648. berichtet wurde. An.

---

F. Neesen. Ueber elastische Nachwirkung. Pogg. Ann. CLVII.. 579-596.

Der Verfasser glaubt, aus der unregelmässigen Wärmebewegung der Molecüle die elastische Nachwirkung erklären zu können. An.

---

C. Niven. On the stresses due to compound straines. Trans. of Edinb. XXVII. 473-491.

Das allgemeine Problem in der Elasticitätslehre setzt voraus, dass die elastische Substanz anfänglich von einem Zustande ohne Druck ausgehe. In einigen wichtigen Fällen jedoch muss man sie betrachten, als in einem Zustande unter beträchtlichem Druck befindlich. Ist dies der Fall, so unterliegt die Constitution der festen Körper grosser Aenderung. Der Gegenstand war von Cauchy mit Hülfe der Theorie der molecularen Wirkungen angegriffen worden und ist später von den Herren St. Venant und

Boussinesq behandelt worden, wobei Green's Ausdruck für die während des Druckes ausgeübte Energie angewandt wurde. Aber die Frage hielt sich unter ihren Händen innerhalb der Cauchy'schen hypothetischen Voraussetzungen, in sofern, als ihr Ausdruck für die potentielle Energie hergeleitet wurde mit Hülfe der Moleculartheorie.

In der vorliegenden Arbeit ist die Behandlung des Gegenstandes allein auf die Gesetze gegründet, nach denen eine Reihe von Verschiebungen gleichzeitig stattfindet. Die resultirenden Drucke unterscheiden sich, wie bewiesen wird, von den ursprünglichen durch lineare Functionen der secundären Verschiebungen, indem sie entweder grösser oder kleiner sind. Die potentielle Energie wird unabhängig von einer Voraussetzung gefunden und stimmt mit der von H. Boussinesq überein. In der weiteren Entwickelung des Gegenstandes beschränkt sich Herr Niven selbst auf den Fall, wo die vom ursprünglichen Drucke herrührende potentielle Energie eine quadratische Function der entsprechenden Drucke ist und auch, wo die Substanz ursprünglich isotrop war. In diesem Fall scheint der Zuwachs der potentiellen Energie, soweit als sie den ursprünglichen Druck einschliesst, abzuhängen nur von sechs Grössen, genannt „quasi-strains“. Die ursprünglichen Kräfte, multiplicirt mit der Dilatation der Volumeneinheit, hängen auch von diesen sechs Functionen ab.

Die Arbeit enthält ferner eine allgemeine Theorie der Gesetze, nach denen Drucke und gewisse andere physische Grössen transformirt werden in Bezug auf verschiedene Systeme von rechtwinkligen Axen.

In einem Zusatz am Ende der Arbeit wird gezeigt, wie der Gegenstand behandelt werden kann im Fall von Functionen beliebigen Grades der zusammensetzenden Drucke. Glr. (O.)

---

W. M. Hicks. Quaternion investigations on strains and fluid motion. Quart. J. XIV. 271-292.

Siehe Abschn. X. Cap 4. B. p. 612.

---

J. BOUSSINESQ. Sur la construction géométrique des pressions que supportent les divers éléments plans menés par un même point d'un corps. C. R. LXXXII. 1168-1171.

Der Verfasser giebt hierin ein Mittel an, sich die Spannkräfte, die auf alle Ebenen wirken, welche durch einen Punkt eines deformirten elastischen Körpers gehen, in einfacher Weise geometrisch darzustellen. Er bedient sich dabei des Mittels, alle Spannkräfte in Componenten normal und tangential zu den zugehörigen Ebenen zu zerlegen, und von den in der Richtung der Normale wirkenden Componenten die halbe Summe der grössten und kleinsten Spannung abzuziehen, während die tangentialen Componenten unverändert bleiben; die Discussion der restirenden Kräfte vereinfacht sich dadurch, dass die von den beiden grössten und kleinsten Hauptspannungen restirenden Kräfte dem absoluten Werthe nach gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen sind. An.

---

L. POCHHAMMER. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten, isotropen Kreiscylinder. Borchardt J. LXXXI. 324-336.

In dieser Arbeit sind die Schwingungen eines Kreiscylinders von den allgemeinen Gleichungen der Elasticität aus behandelt, indem particuläre Integrale, welche den Gleichungen für das Innere und die Oberfläche genügen, aufgestellt werden, aus denen solche sich herausheben, welche als longitudinale, drehende und transversale Schwingungen des Cylinders zu deuten sind. Für diese werden Näherungsrechnungen ausgeführt, bei denen der Cylinder nicht, wie üblich, als unendlich dünner Stab behandelt wird, sondern es wird nur der Radius $c$ des Cylinders in dem Grade klein angenommen, dass die vierte Potenz von $c$ neben der Einheit vernachlässigt werden kann: Auf diese Weise ergiebt sich für die longitudinale Welle die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$V = \sqrt{\frac{E}{D}\left(1 - \frac{\pi^2 K^2 c^2}{\lambda^2}\right)};$$

wo $E$ der Elasticitätsmodul, $D$ die Dichtigkeit des Materials, $\lambda$ die Wellenlänge, $K$ das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation bedeutet. Vernachlässigt man also das Glied mit $c^2$ nicht, so ergiebt sich, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge abhängt. Es ergiebt sich daraus für stehende longitudinale Wellen, wenn $l$ den Abstand je zweier aufeinanderfolgenden Knotenpunkte bedeutet, die Schwingungszahl

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{E}{D}\left(1 - \frac{\pi^2 K^2 c^2}{4l^2}\right)}.$$

Es ist also, wie man sieht, $N$ wegen des Gliedes mit $c^2$ nicht umgekehrt proportional der Länge $l$; es folgt daraus, dass alsdann die Obertöne der Longitudinalschwingungen nicht mehr harmonisch sind. Für die drehenden Schwingungen ergiebt sich ein solches Resultat nicht, vielmehr findet man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit auch in dieser Behandlungsweise unabhängig von der Wellenlänge, wodurch auch die Obertöne harmonisch sind. Für die transversalen Schwingungen ergiebt sich die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit

$$V = \sqrt{\frac{E}{D}}\,\frac{\pi c}{\lambda}\left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{E}{b} - \frac{b}{E}\right)\frac{\pi^2 c^2}{3\lambda^2}\right),$$

wo

$$b = \frac{E}{2(1+K)}.$$

Die Beibehaltung des Gliedes mit $c^2$ hat hier die Wirkung, dass die Schwingungszahlen der Obertöne der stehenden transversalen Wellen sich nicht mehr wie die Quadrate der ganzen Zahlen verhalten, sondern etwas tiefer liegen. An.

---

Brune. Mémoire sur la répartition des efforts et les déformations dans les cylindres et les sphères pressés normalement et dans les plaques circulaires chargées symétriquement. Ann. d. p. et d. ch. XII. 227-252.

Die Deformationen eines Cylinders und einer Kugel sind von Lamé, d· kreisförmigen Platte von Poisson und Kirchhoff a inen Elasticitätsgleichungen abgeleitet.

Letztere will der Verfasser des vorliegenden Aufsatzes vermeiden. Er giebt daher eine directe Ableitung der obigen Probleme aus den elementaren Principien, die der Theorie des Widerstandes der Materialien zur Grundlage dienen, eine Ableitung, die aber nur bei specieller Beschaffenheit der auf die Oberfläche wirkenden Kräfte anwendbar ist, z. B. für einen Cylinder und eine Kugel nur, so lange auf die Oberfläche constante normale Kräfte wirken. Eine solche Ableitung mag dem Praktiker das Verständniss erleichtern, theoretisch ist sie von geringem Werthe.

Wn.

---

E. Skiba. Theoretische Bestimmung des Einflusses der Schwerkraft auf die Deformirung der Stäbe, welche der Ausziehung oder Zusammendrückung in der Richtung ihrer Länge unterworfen sind. Krak. Denkschr. VII.

Durch Berücksichtigung des Einflusses der Schwerkraft verbessert der Verfasser die bis jetzt bekannte Lösung dieser Aufgabe und zieht aus seiner Lösung einige Folgerungen.

Dn.

---

Vigan. Notes sur les ponts métalliques. Ann. d. p. et d. ch. XII. 253-292.

Bei der Berechnung der Dimensionen von Metallbrücken wird in der Regel nur darauf Rücksicht genommen, dass das Maximum des Drucks eine gewisse Grenze nicht überschreite. Nun lehrt aber die Erfahrung, dass bei dem zumeist angewandten Material, dem Gusseisen, die Druck- und Zugfestigkeit sehr verschiedene Werthe haben. Man muss daher, wenn man sicher gehen will, auch das Maximum des longitudinalen und transversalen Zuges, der durch eine Belastung entsteht, berechnen und die Dimensionen so bestimmen, dass ... ine gewisse Grenze nicht überschreitet. Diese E... Maximums des Zuges, der in einem Metallbog... ich-

förmig über die zugehörige Sehne veriheilte Last entsteht, bildet den Inhalt des vorliegenden Aufsatzes Die Rechnung wird, ohne dass neue theoretische Gesichtspunkte in Frage kommen, in einer für die praktische Anwendung geeigneten Form durchgeführt, neben der Rechnung wird auch eine graphische Darstellung des Resultats gegeben. Der Aufsatz schliesst sich unmittelbar an den „Cours de mécanique appliquée" von Bresse an und bildet eine Ergänzung desselben. Wn.

---

G. B. Biadego. Sul modo di calcolare il sovraccarico di prova dei ponti. metallici. Politecnico XXIV.

---

G. van der Mensbrugghe. Sur le problème des liquides superposés dans un tube capillaire. Mém. cour. in 4⁰ de Belg. XLI.

J. Plateau. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XL. 669-671.

Die hauptsächlichsten theoretischen Resultate sind schon in verschiedenen Noten auseinandergesetzt worden, über die F. d. M. VII. p. 630 berichtet worden ist. Sie sind in der vorliegenden Arbeit im Detail auseinandergesetzt und durch experimentelle Untersuchungen unterstützt worden. Die behandelte Frage ist folgende: Welches ist das totale gehobene oder herabgedrückte Gewicht in einer Capillarröhre, deren unteres Ende in eine beliebige Flüssigkeit getaucht ist, und welche eine oder mehrere Flüssigkeiten enthält, welche auf die erste aufgegossen sind. Der erste Theil enthält vier Lösungen des Problems, die sich aus der Theorie der Oberflächenspannung, sowie aus den Theorien von Laplace, Poisson und Gauss ergeben. Der Verfasser bemüht sich, die völlige Identität der aus denselben erhaltenen Resultate zu zeigen, vorausgesetzt, dass man stets dieselben Bedingungen hat und die Constanten in geeigneter Weise interpretirt. Im zweiten Theile stellt der Verfasser die hauptsächlichsten Thatsachen zusammen, welche in dieser Beziehung von anderen

Physikern publicirt sind, zeigt den Grund der scheinbaren Nichtübereinstimmung zwischen Theorie und Experiment und beschreibt endlich seine eigenen Beobachtungen, die zeigen, dass diese Nichtübereinstimmung auf störenden Ursachen beruht, die man nicht beseitigen kann. Mn. (O.)

---

G. van der Mensbrugghe. La théorie capillaire de Gauss et l'éxtension d'un liquide sur un autre. Sur les propriétés de la surface de contact d'un solide et d'un liquide. Mondes (2) XXXIX. 98-101.

Siehe F. d. M. VII. p. 630. O.

---

J. Bosscha. Sur l'équilibre d'une goutte entre deux plaques horizontales. Arch. Néerl. XI. 467-475.

Siehe F. d. M. VII. p. 628. G.

---

## Capitel 2.

## Akustik und Optik.

L. Boltzmann. Zur Geschichte des Problems der Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Schlömilch Z. XXI. 452.

Die Einleitung zu Riemann's Abhandlung über ebene Luftwellen von endlicher Schwingungsweite (Riemann's Werke p. 145) zeigt, dass Riemann die frühere Literatur über diesen Gegenstand nicht gekannt hat. In Folge dessen macht Herr Boltzmann darauf aufmerksam, dass schon folgende Autoren dieselbe Frage behandelt haben: Poisson (J. d. l'école polyt. vol. VII. cah. 14), Stokes (Phil. Mag. (3) XXXIII.), Airy (Phil. Mag. (3) XXXIV.) Earnshaw (Phil. Trans. 1860), endlich St. Venant et Wantzel (J. d. l'école polyt. cah. 27). Wn.

F. Reiss. Ueber die Geschwindigkeit der Wellenbewegung. Casopis V. (Böhmisch).

W.

---

J. L. Hoorweg. Sur la propagation du son d'après la nouvelle théorie des gaz. Arch. Néerl. XI. 131-177.

Mathematisch-physikalische Untersuchung über die Fortpflanzung des Schalles mit Rücksicht auf die letzten Arbeiten von Helmholtz und anderen. G.

---

C. H. C. Grinwis. Sur les ondes sonores cylindriques. Arch. Néerl. XI. 458-466.

Siehe F. d. M. VII. 631. G.

---

L. Matthiessen. Ueber die Klangfiguren einer quadratischen Platte von Flüssigkeit und des cubischen Volumens einer Luftmasse. Schlömilch Z. XXI. 38-47.

Der Verfasser hatte früher experimentelle Untersuchungen angestellt über die Rippungen, die auf einer mit einer Flüssigkeit bedeckten vibrirenden Platte entstehen, und diese Untersuchungen auch auf die Klangfiguren von Luftplatten ausgedehnt (Pogg. Ann. CXXXIV. und CXLI.). Im Anschluss daran sucht er in der vorliegenden Arbeit die Gestalt jener Klangfiguren theoretisch zu ermitteln. Er geht dabei von der Annahme aus, dass die genannten Erscheinungen entstehen durch zwei Systeme stehender Wellen von gleicher Schwingungsdauer, die einander senkrecht durchsetzen. Für die mit einer Flüssigkeit bedeckte vibrirende Platte sind die Schwingungen transversal; die Impulse, die ein Punkt durch beide Wellen erhält, addiren sich. Es ist also, um die Gestalt der Rippungen (Knotenlinien) zu erhalten, einfach die Gleichung zu discutiren

$$-a_1 \sin\frac{2\pi x}{\lambda} + a_2 \sin\frac{2\pi y}{\lambda} = 0.$$

Für geschlossene Luftplatten (die der Verfasser quadratisch annimmt), finden die Bewegungen parallel der Grundebene der Platte statt; es sind zwei gegeneinander senkrechte Schwingungen zusammenzusetzen, und die Richtung der Rippungen ist gegen die resultirende Bewegungsrichtung senkrecht. Dadurch ergiebt sich eine ähnliche Gleichung, wie vorher, nur dass rechts an Stelle von Null eine andere Constante steht. Diese Gleichung wird für verschiedene Werthe jener Constanten discutirt. Bemerkt mag noch werden, dass die von dem Verfasser bei Luftplatten angewandte Nomenclatur von der von Kundt eingeführten (cf. F. d. M. V. 536) abweicht. Nach Kundt existiren bei Luftplatten keine Knotenlinien, sondern die Knoten sind einzelne Punkte. Ueber die Entstehung der beiden senkrechten Wellensysteme, resp. ihren Zusammenhang mit dem Anfangszustande verbreitet sich der Verfasser gar nicht. Wn.

---

C. H. C. Grinwis. Over lichtabsorptie volgent de theorie van Maxwell. Versl. en Mededeel. X. 371-383.

Diese Arbeit muss zu den Beiträgen über die neuere Lichttheorie von Maxwell gerechnet werden. Sie handelt über die Fortpflanzung elektrischer Schwingungen in Körpern, welche, obwohl elektrischer Polarisation fähig, doch dynamische Electricität zu leiten im Stande sind. Im Anschlusse an einige Aufgaben Maxwell's wird hier ausführlicher die Absorption des Lichtes durch Leiter der analytischen Berechnung unterworfen, wobei zuletzt einige besondere Fälle näher untersucht werden. G.

---

A. Mannheim. Nouvelle propriété optique déduite de l'étude géométrique de la surface des ondes. Almeida J. V. 137-144.

Siehe Abschn. IX. Cap. 3. D. p. 522.

---

G. Kirchhoff. Ueber die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze krystallinischer Mittel. Berl. Abh. 1876. 57-89.

Die Arbeiten von F. Neumann (der die Gesetze der Doppelbrechung zuerst aus den Elasticitätsgleichungen abgeleitet hat) und von Mac-Cullagh führen zu demselben Resultate in Hinsicht auf das Zusammenfallen der Polarisations- und Schwingungsrichtung; doch scheinen beim ersten Anblick die Ausgangspunkte der beiden Theorien wesentlich verschieden, ja entgegengesetzt zu sein. Wie Herr Kirchhoff jedoch bemerkt, stimmen beide Theorien in ihren Grundanschauungen überein, die in der Annahme bestehen, dass auf irgend ein Aethertheilchen im Innern eines Körpers keine andern Kräfte wirken, als die von der Elasticität herrührenden, dass aber auf die Grenzflächen zweier heterogener Medien noch Druckkräfte ausgeübt werden, die andern Ursprungs sind. Diese Bemerkung hat Herrn Kirchhoff veranlasst, den Gegenstand beider Theorien in allgemeinerer und übersichtlicherer Form zu behandeln, als es bisher geschehen ist. Den Ausgangspunkt bilden die allgemeinen Elasticitätsgleichungen. Die elastischen Druckkräfte werden in bekannter Art als die partiellen Differentialquotienten einer Function $F$ dargestellt, welche das auf die Volumeneinheit bezogene Potential der durch die relativen Verschiebungen hervorgerufenen Kräfte ist. $F$ ist eine homogene Function $2^{\text{ten}}$ Grades von sechs Argumenten, die aus den Differentialquotienten der Verschiebungen gebildet sind. Die erste Aufgabe ist nun, die 21 constanten Coefficienten von $F$ so zu bestimmen, dass der elastische Körper der Aether in einem krystallinischen Medium ist, dass also aus den Elasticitätsgleichungen die Gesetze der Doppelbrechung folgen. Hierzu führt die Betrachtung einer Particularlösung, die ebene Wellen darstellt. Nimmt man den zuerst von Green aufgestellten Ausdruck für $F$, so ergeben sich für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen genau (nicht blos annähernd, wie in der ursprünglichen Neumann'schen Theorie) die Fresnel'schen Gesetze der Doppelbrechung, modificirt nur durch die andere Bedeutung der Polarisationsebene. Bei dieser Gelegenheit giebt der Verfasser eine eigenthümliche Definition der Strahlenrichtung, die zu einer gegebenen Wellennormale gehört. Man denke sich in dem Mittel, in welchem eine bestimmte ebene Lichtwelle fort-

schreitet, eine beliebige Ebene; man berechne die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit des auf die Flächeneinheit bezogenen Druckes, der auf ein Element dieser Ebene von der einen Seite ausgeübt wird. Soll dann die genannte Arbeit verschwinden, so muss die betrachtete Ebene einer gewissen Richtung parallel sein; diese ist die Richtung des Strahls, der zu der betrachteten Lichtwelle gehört. In der That kann der Erfahrung zufolge jene Lichtbewegung auf der einen Seite einer Ebene bestehen, während auf der andern Ruhe stattfindet, falls die Ebene dem Strahle parallel ist, der der Wellenebene entspricht. Hieraus ergiebt sich leicht der Winkel zwischen Strahl und Wellennormale.

Der vorher ermittelte Ausdruck von $F$, der nur noch sechs constante Coefficienten enthält, wenn man allein transversale Schwingungen betrachtet, wird angewandt zur Aufstellung der Grenzbedingungen, die an der ebenen Grenze zweier verschiedener krystallinischen Medien zu erfüllen sind, wobei mit Neumann die Dichtigkeit des Aethers in beiden als gleich angenommen wird. Hier entsteht die bekannte Schwierigkeit, dass man zuviel Bedingungen erhält, und zwar solche, die mit einander unverträglich sind, wenn man annimmt, für einen Punkt der Grenzfläche seien die Verschiebungen und die Componenten des elastischen Drucks dieselben, mag man den Punkt als dem einen oder dem andern Medium angehörig betrachten. Diese Schwierigkeit beseitigt Herr Kirchhoff folgendermassen. Für jeden Punkt der Grenzfläche findet zwar die Gleichheit der Verschiebungen für beide Medien statt, aber nicht mehr die Gleichheit des elastischen Drucks. Die Druckkräfte, die von dem einen Medium auf den betrachteten Punkt ausgeübt werden, sind vielmehr andere, als die von dem zweiten Medium auf ihn ausgeübten. Damit dies möglich sei, muss man annehmen, dass noch ein fremder Druck auf jene Grenzfläche wirkt, der den elastischen Kräften das Gleichgewicht hält; man kann denselben etwa von den wägbaren Theilen beider Medien herrührend denken. Es wird die Arbeit jenes fremden Druckes aufgesucht und die Bedingung aufgestellt, dass diese Arbeit verschwindet. Betrachtet man allein solche Particularlösungen der allgemeinen Gleichungen,

die ebene Wellen darstellen, so liefert die oben genannte Bedingung nur eine einzige Gleichung, so dass im Ganzen nur vier Gleichungen an der Grenze zu erfüllen sind. Das Verschwinden der Arbeit des fremden Druckes zeigt zugleich, dass der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft gültig bleibt.

Nach Aufstellung der Grenzbedingungen wird nun weiter eine particuläre Lösung gebildet, die den allgemeinen Gleichungen und den Grenzbedingungen genügt. Diese Lösung stellt ein System ebener Wellen dar, die theils in dem einen, theils in dem anderen Mittel sich bewegen. Eine von diesen Wellen kann beliebig gegeben sein, beliebig in Bezug auf ihre Richtung und in Bezug auf das Gesetz, welches die Grösse der Verrückung eines Punktes mit der Zeit verbindet; die Richtungen der anderen Wellen sind dann durch die Wurzeln zweier biquadratischen Gleichungen bestimmt, von denen die eine auf Wellen in dem einen, die andere auf Wellen in dem anderen Mittel sich bezieht. Eine Wurzel der einen dieser Gleichungen führt auf die gegebene Welle zurück; es besteht daher das ganze System aus acht Wellen, vier in jedem Medium. Für jede dieser Wellen ist mit ihrer Richtung die Richtung der Verrückung vollständig, und die Grösse der Verrückung in jedem Augenblick bis auf einen constanten Factor (die Amplitude) bestimmt. Zwischen den Amplituden der acht Wellen bestehen vier lineare homogene Gleichungen. so dass neben der Amplitude der gegebenen Welle noch die von drei andern willkürlich gewählt werden können. Haben die beiden biquadratischen Gleichungen nur reelle Wurzeln, so sind in jedem Mittel zwei einfallende Wellen vorhanden und zwei, die reflectirt oder gebrochen sind. Man kann dann die Amplituden von drei einfallenden Wellen gleich Null setzen, sodass nur eine einfallende Welle übrig bleibt. Aber die biquadratischen Gleichungen können auch complexe Wurzeln haben; das Entsprechende tritt bei isotropen Mitteln ein, wenn totale Reflexion stattfindet. Um dann auf Fälle zu kommen, die der Beobachtung zugänglich sind, hat man die Constanten, die die Bedingung, dass nur eine einfallende Welle da sei, noch unbestimmt lässt, so zu wählen, dass die Verrückung nirgends unendlich wird.

Es ist dabei die Aufgabe zu lösen, eine Function eines complexen Arguments zu finden, deren reeller Theil für reelle Werthe des Arguments gegeben ist, und die nicht unendlich wird für Werthe des Arguments, deren imaginärer Theil gleich $\sqrt{-1}$, multiplicirt mit einer positiven Grösse, ist. Bei der Ableitung der Gleichungen zwischen den Amplituden wird von dem Begriff der Strahlen kein Gebrauch gemacht; doch ist dieser Begriff nöthig, um zu entscheiden, ob eine Welle eine einfallende oder reflectirte oder gebrochene sei. Wn.

---

V. von Lang. Zur Theorie der Doppelbrechung. Pogg. Ann. CLIX. 168-173, Wien. Ber. LXXIII., Wien. Anz. 1876. 100.

Herr Lang leitet die Gesetze der Doppelbrechung aus den Grundgleichungen der Elasticitätstheorie ab. Von der Lamé'schen Ableitung unterscheidet sich die hier vorliegende dadurch, dass Lamé durch seine Analyse auf die Neumann'sche Vorstellung geführt wird, wonach die Lichtschwingungen in der Polarisationsebene erfolgen, während Herr Lang zu der Fresnel-Cauchy'schen Vorstellung gelangt, nach der jene Schwingungen senkrecht zur Polarisationsebene stattfinden. Die Ableitung geschieht folgendermassen. Die allgemeinen Elasticitätsgleichungen ergeben direct die Ausschläge $\xi$, $\eta$, $\zeta$ eines Aethertheilchens im freien Aether. Die Bewegungen des nicht freien Aethers dagegen rühren nicht allein von den Bewegungen des freien Aethers her, sondern werden auch beeinflusst von den Schwingungen der Körpertheilchen, an die der Aether gebunden ist. In Folge dessen ändern sich die Ausschläge, an Stelle von $\xi$, $\eta$, $\zeta$ treten die Grössen

$$\xi-\xi',\ \eta-\eta',\ \zeta-\zeta'.$$

Von den neuen Grössen $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$ wird angenommen, dass die Verhältnisse

$$\frac{\xi'}{\xi},\ \frac{\eta'}{\eta},\ \frac{\zeta'}{\zeta}$$

für ein bestimmtes System dreier rechtwinkliger Axen überall im ganzen Körper constante, von einander verschiedene Werthe haben. Die so geänderten Ausdrücke für $\xi$, $\eta$, $\zeta$ werden in die

Elasticitätsgleichungen eingesetzt, und dann particuläre Integrale dieser Gleichungen in der gewöhnlichen Form von trigonometrischen Functionen aufgestellt. Die Discussion dieser particulären Integrale ergiebt, dass sie transversale Wellen vorstellen, dass also im Innern doppelbrechender Körper longitudinale Wellen nicht existiren. Weiter führt diese Discussion auf dieselben Gleichungen, auf welche auch Fresnel's Theorie der Doppelbrechung führt. Nebenbei ergiebt sich noch, dass für den Aether Quercontraction und Längendilatation immer gleich sind.

Die Ausdrücke für die durch die Körpertheilchen modificirten elastischen Druckkräfte des Aethers, auf welche die Arbeit führt, sind dieselben, welche der Verfasser auch in seiner Theorie der Spiegelung und Brechung benutzt hat. (Wien. Ber. XLIV. 1861).

Wn.

---

W. Wernicke. Ueber die absoluten Phasenänderungen bei der Reflexion des Lichtes und über die Theorie der Reflexion. Pogg. Ann. CLIX. 198-232

Abdruck einer Arbeit aus den Berl. Monatsber., über die im vorigen Jahrgang referirt ist (F. d. M. VII. 638).

Wn.

---

E. Ketteler. Versuch einer Theorie der (anomalen) Dispersion des Lichtes in einfach und doppelt brechenden Mitteln. Verh. d. naturf. Ver. d. pr. Rheinl. u. Westph. (4) III. 197-240. Carl Rep. XII. 322-361. Phil. Mag. 1876. Nov.-Dec.

Der hier aufgestellten allgemeinen Theorie der Dispersion, die die anomale mit umfasst, liegt, wie allen bisher aufgestellten Theorien der anomalen Dispersion, die Annahme eines Zusammenschwingens der Aether- und Körpertheilchen zu Grunde. Dieselbe unterscheidet sich indess von den Helmholtz'schen Vorstellungen (cfr. F. d. M. VI. 654) dadurch, dass sie den Aether langsamen Verrückungen gegenüber als widerstandslos betrachtet und in Folge dessen den Einfluss den Körpertheilchen auf Schwin-

gungen von sehr grosser Dauer als verschwindend annimmt. Der Verfasser stellt, von diesen Grundanschauungen ausgehend, zunächst für isotrope Körper folgende Differentialgleichungen auf:

$$(1) \quad m\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} = (e+E)\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2}, \quad m'\frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2} = E'\frac{\partial^2 \varrho'}{\partial x^2} + K\varrho'.$$

Die accentuirten Buchstaben beziehen sich auf die Körpertheilchen, die nicht accentuirten auf die Aethertheilchen; $x$ ist die Fortpflanzungsrichtung der Wellen. Dabei ist angenommen, dass die ponderablen Theilchen auf die des Aethers eine Deformationskraft $E\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2}$ ausüben, die nur den Effect hat, die im freien Aether vorhandene Deformationskraft $e\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2}$ der Grösse nach zu modificiren. Für die ponderablen Theilchen ist dagegen ausser der entsprechenden Deformationskraft noch eine Schiebkraft $K\cdot\varrho'$ als wirkend angenommen. In Bezug auf die drei Constanten $E$, $E'$, $K$ endlich wird die weitere Annahme hinzugefügt, dass sie einander proportional seien. Für die obigen Gleichungen wird nun ein particuläres Integral aufgestellt, das für Körper- und Aethertheilchen einfache Schwingungen von derselben Dauer und Phase, aber verschiedener Amplitude darstellt. Aus diesen folgt für das Brechungsverhältniss $n$ die Gleichung:

$$(2) \quad n^2 - 1 = \frac{D}{\frac{l^2}{L^2} - 1}.$$

Darin ist $l$ die Wellenlänge, $D$ und $L$ sind zwei von $E$, $E'$, $K$ abhängige Constanten. Diese Gleichung lässt sich, wie gezeigt wird, so interpretiren, dass die brechende Kraft $n^2 - 1$ gleich ist dem Verhältniss der lebendigen Kräfte der Körper- und Aetheratome.

Der Verfasser dehnt weiter seine Untersuchung auf den Fall aus, dass die im Aether zerstreuten ponderablen Molecüle nicht von einer Art, sondern von verschiedener Beschaffenheit seien. Die Differentialgleichungen werden dann folgende:

$$(3) \quad \begin{cases} m\dfrac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} = (e + E_1 + E_2 + \cdots)\dfrac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2}; \\ m_1'\dfrac{\partial^2 \varrho_1'}{\partial t^2} = E_1'\dfrac{\partial^2 \varrho_1'}{\partial x^2} + K_1\varrho_1'; \\ m_2\dfrac{\partial^2 \varrho_2'}{\partial t^2} = E_2'\dfrac{\partial^2 \varrho_2'}{\partial x^2} + K_2\varrho_2'; \ldots \end{cases}$$

Die erste Gleichung bezieht sich auf die Aethertheilchen, die folgenden auf die verschiedenen Körpertheilchen; $E_1$, $E_1'$, $K_1$ sind unter sich proportional, ebenso $E_2$, $E_2'$, $K_2$ etc. Dann ergiebt sich ein Dispersionsgesetz, das von dem obigen (Gl. 2) nur dadurch unterschieden ist, dass die rechte Seite jener Gleichung nicht aus einem Gliede besteht, sondern aus der Summe mehrerer auf ähnliche Weise gebildeter. Während nun das einfache Dispersionsgesetz bei keinem bekannten Körper für den ganzen Umfang der Strahlung gültig ist, lässt sich bei dem zweiten Gesetze zeigen, dass die theoretische Formel mit den besten der bisherigen Messungen vollkommen übereinstimmt. Die einfache Beziehung zwischen brechender Kraft und lebendiger Kraft bleibt auch hier bestehen. Mit dem Dispersionsgesetz hängt auch die Absorption zusammen. Denkt man nämlich $l^2$ als Abscissen, $n^2-1$ als Ordinaten einer Curve aufgetragen, so stellt Gleichung 2) eine gleichseitige Hyperbel dar. Gilt an Stelle von 2) das oben erwähnte allgemeinere Gesetz, so werden die Glieder der rechten Seite, einzeln als Ordinaten aufgetragen, eine Reihe von gleichseitigen Hyperbeln darstellen. Fällt der Mittelpunkt einer solchen Hyperbel in den sichtbaren Theil des Spectrums, so wird dort $n^2-1$ unendlich. Die wahre Dispersionscurve, die die Abhängigkeit des Brechungsexponenten $n$ von der zugehörigen Wellenlänge $\lambda$ im Weltäther $\left(l = \dfrac{\lambda}{n}\right)$ angiebt, lässt sich zwar im allgemeinen Falle nicht ableiten; eine annähernde Betrachtung zeigt jedoch, dass, wenn die obige Curve eine unendlich grosse Ordinate hat, auf der wahren Dispersionscurve eine Unstetigkeit stattfindet. Innerhalb dieser Unstetigkeitsstelle ist der Brechungsexponent imaginär. Dadurch tritt für das gebrochene und gespiegelte Licht eine elliptische Polarisation, verbunden

mit Absorption, ein. Es erleiden nicht nur auf der durchgehenden Welle die Aethertheilchen eine plötzliche Phasenverschiebung, sondern auch die Körpertheilchen, die sonst mit jenen dieselbe Phase haben, erhalten dann eine Phasenänderung, die von der der Aethertheilchen verschieden ist. Die Dispersionscurve zeigt ferner in der Nähe eines solchen Absorptionsstreifens Unregelmässigkeiten, die völlig der anomalen Dispersion entsprechen.

Im zweiten Theile dehnt der Verfasser seine Theorie auch auf anisotrope Medien aus, wobei ein von dem gewöhnlichen ganz verschiedenes Verfahren angewandt wird. Der Verfasser geht nämlich nicht von der Betrachtung der Wellennormale, sondern von der des Strahles aus. Es gelingt ihm auch, aus den aufgestellten Gleichungen die Gesetze der Doppelbrechung abzuleiten. Aber schon zur Aufstellung der Grundgleichungen sind verschiedene Annahmen nöthig, worunter sich auch solche befinden, die in einer vollständigen Theorie erst als Folgerungen auftreten sollten, z. B. dass die Schwingungen der Körper- und Aethertheilchen in der durch Wellennormale und Strahl gelegten Ebene stattfinden. Andere Annahmen beziehen sich auf die in den Gleichungen enthaltenen Constanten, resp. deren Abhängigkeit von dem (in verschiedenen Richtungen variabeln) Molecularabstande. Diese Anhäufung von Annahmen, die zur Ableitung des Resultates nöthig ist, beeinträchtigt, wie es dem Referenten scheint, den theoretischen Werth der Untersuchung.

Es werden dann noch die Grenzbedingungen aufgestellt für den Uebergang der Lichtbewegung aus dem Weltäther in ein krystallinisches Medium; und zwar werden diese Bedingungen aus drei Principien abgeleitet, 1) dem Princip der Continuität parallel der Trennungsfläche, 2) dem Princip der Gleichheit der Arbeit senkrecht zur Trennungsfläche, 3) dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Zum Schluss werden die Resultate dahin verallgemeinert, dass, während die obigen Gleichungen 1) auf die Fortpflanzungsrichtung $x$ als Abscisse bezogen sind, jetzt die Gleichungen bezogen werden auf ein beliebiges in der Einfallsebene liegendes

Coordinatensystem. Die Gleichungen im Einzelnen anzugeben, würde hier zu weit führen; in dieser Hinsicht muss auf das Original verwiesen werden. Wn.

---

A. Potier. De l'entraînement des ondes lumineuses par la matière pondérable en mouvement. Almeida J. V. 105-108.

Neuer Beweis der Fresnel'schen Formel für die Aenderung, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Lichtwellen in einem Medium erfährt, falls das Medium selbst im Sinne der Fortpflanzungsrichtung der Wellen bewegt wird. Zu Grunde gelegt wird, wie beim Beweise von Eisenlohr, die Fresnel'sche Vorstellung, wonach der Aether in dem bewegten Körper aus zwei Theilen besteht. Eine gewisse Aethermasse ist in dem Körper condensirt und besitzt dort die Dichtigkeit $\varrho'$, während der überall im Raume verbreitete freie Aether von der Dichtigkeit $\varrho$ zugleich den Körper durchdringt. Mit dem freien Aether erfährt auch der im Körper gebundene Aether eine Verrückung, ohne dass aber durch die letztere Bewegung neue elastische Kräfte hervorgerufen würden. Vergleicht man zwei Wellenbewegungen, die eine im freien Aether, die andere von gleicher Wellenlänge und Amplitude im gemischten Aether innerhalb eines Körpers, so ist nach obiger Voraussetzung die durch die Bewegung hervorgerufene elastische Kraft, die für die Masseneinheit gleich der Dichtigkeit mal der Beschleunigung ist, beide Male dieselbe. Die Gleichsetzung beider Ausdrücke giebt die bekannte Relation zwischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Dichtigkeit

$$(\varrho+\varrho').V'^2 = \varrho.V^2.$$

Wenn nun das brechende Medium und mit ihm der gebundene Aether in der Fortpflanzungsrichtung der Wellen mit der Geschwindigkeit $v$ bewegt wird, so wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $V'$ eine andere, $V_1$. Bildet man wieder die beschleunigende Kraft für eine Wellenbewegung von gleicher Wellenlänge und Amplitude mit der vorigen, und setzt diesen Ausdruck dem

vorigen gleich, so erhält man die Fresnel'sche Formel

$$V_1 - V' = \frac{v\varrho'}{\varrho+\varrho'} = \frac{n^2-1}{n^2} \cdot v.$$

Wn.

---

L. Sohncke. Zur Theorie des optischen Drehvermögens von Krystallen. Clebsch Ann. IX. 504-530.

Die Drehung der Polarisationsebene im Quarz und anderen Krystallen wird bekanntlich durch die Annahme erklärt, dass ein in beliebiger Richtung einfallender Strahl sich im Quarz in zwei elliptisch polarisirte Strahlen zerlegt. Welches aber der Grund für diese Zerlegung und damit die eigentliche Ursache für das eigenthümliche optische Verhalten des Quarzes sei, ist bisher noch eine offene Frage. Zwar hat Mac-Cullagh durch Probiren gefunden, welche Glieder man zu den gewöhnlichen Elasticitätsgleichungen hinzufügen müsse, damit aus den so vervollständigten Gleichungen die Drehung der Polarisationsebene folge, und Herr C. Neumann hat für die Zusatzglieder eine mechanische Deutung gefunden. Eine andere Ansicht über die Ursache des Drehvermögens hat ferner Herr Boltzmann geäussert, ohne die Theorie weiter zu entwickeln. Beide Erklärungsversuche aber sind insofern unvollkommen, als sie keine Rechenschaft geben über den Zusammenhang des Drehvermögens mit der Structur der drehenden Krystalle, über den schon in der Krystallform hervortretenden Unterschied zwischen rechts- und linksdrehenden Krystallen. Ein Versuch von Biot, diesen Zusammenhang durch eine schraubenförmige Anordnung der Aethertheilchen im Quarz zu erklären, ist nicht als naturgemäss zu betrachten. In Folge dessen nimmt Herr Sohncke die obige Frage von Neuem auf und greift dieselbe von einem ganz neuen Gesichtspunkte aus an.

Den Ausgangspunkt bildet ein Experiment von Reusch, welches zeigt, dass man die optische Drehung des Quarzes durch rein mechanische Mittel ziemlich vollkommen nachahmen kann. Schichtet man nämlich eine grössere Anzahl von Blättern zweiaxigen Glimmers von möglichst gleicher, sehr geringer Dicke in

der Weise auf einander, dass jedes folgende gegen das vorhergehende aus ursprünglich paralleler Lage um 60° (od. 45°) immer in demselben Sinne gedreht ist, so zeigt ein solches Präparat fast dieselben optischen Erscheinungen, wie eine senkrecht zur Axe geschnittene Quarzplatte. Je nach dem Sinne der wendeltreppförmigen Aufschichtung erhält man das Analogon einer rechtsdrehenden oder linksdrehenden Quarzplatte. Herr Sohncke verfolgt nun theoretisch den Weg eines Lichtstrahls durch eine solche Glimmercombination, und zwar genügt es, eine Combination aus 3 Blättchen zu befrachten, die um 120° gegen einander gedreht sind. Ein geradlinig polarisirter, senkrecht auf das erste Blättchen der Combination fallender Strahl zerlegt sich beim Durchgang durch das Blättchen in zwei auf einander senkrecht polarisirte Strahlen, welche in den folgenden Blättern entsprechende Zerlegungen erfahren. Auf die gewöhnliche Art wird für die beiden Strahlen, die schliesslich aus dem letzten Blättchen austreten, das Amplitudenverhältniss und der Phasenunterschied berechnet und durch Discussion der Resultate gezeigt, dass im Allgemeinen ein elliptisch polarisirter Strahl entsteht, der nie circular sein kann, wohl aber geradlinig oder nahezu geradlinig polarisirt. Dieser Strahl fällt endlich auf einen Analysator, dessen Polarisationsebene zusammenfällt mit der Polarisationsebene derjenigen Componente, die parallel der grossen Ellipsenaxe schwingt. Den Winkel, welchen die letztere mit der ursprünglichen Polarisationsebene des einfallenden Strahls bildet, bezeichnet der Verf. als Drehungswinkel der Polarisationsebene des einfallenden Strahles in Folge des Durchgangs durch die Glimmercombination. Dieser Drehungswinkel wird berechnet und discutirt; er hängt ab von der Dicke der einzelnen Blättchen, von der Farbe (er ist umgekehrt proportional dem Quadrat der Wellenlänge) und von dem Azimuth des einfallenden Strahles; doch ist die Aenderung mit dem Azimuth nur eine geringe. Endlich erfolgt die Drehung in demselben Sinne, in welchem die drei Blättchen bei der Aufschichtung gegen einander gedreht sind. Aus den für eine Combination von drei Blättchen gewonnenen Resultaten ergeben sich unmittelbar die für eine Combination von beliebig vielen Blättchen.

Die so gewonnenen Resultate werden dann angewandt auf den Fall, dass die Dicke der Blättchen, multiplicirt mit einer gewissen, von ihrer optischen Beschaffenheit abhängenden Zahl, klein gegen die Wellenlänge ist. In diesem Falle unterscheidet sich die Schwingungsellipse des aus der Combination austretenden Strahles nicht mehr merklich von einer Geraden. Ferner ergiebt sich für die Drehung der Polarisationsebene der Glimmercombination dasselbe Gesetz, welches beim Quarz als das (von Boltzmann vervollständigte) Biot'sche Gesetz bekannt ist. In Folge dessen betrachtet der Verfasser den Quarz als aufgebaut aus lauter congruenten, um 120° gegen einander gedrehten, nach Art der optisch zweiaxigen Krystalle doppeltbrechenden Blättchen, ganz entsprechend der obigen Glimmercombination; und in dieser Structur findet er den Grund für die Drehung der Polarisationsebene. Für die Berechtigung, dem Quarz eine derartige Structur zuzuschreiben, führt der Verf. endlich noch andere Gründe an, die seiner allgemeinen Theorie der Krystallstructur entnommen sind (cf. Abschn. XI. Cap. 1. pag. 634). Wn.

---

O. Chwolson. Notiz zur Theorie der Interferenzerscheinungen. Pogg. Ann. CLVII. 469-476.

Um die Erscheinung zu erklären, dass bei der Interferenz des Lichtes die auf einander folgenden Maxima und Minima nicht überall dieselbe Lichtstärke haben, sondern dass die Deutlichkeit der Interferenzstreifen mit wachsendem Phasenunterschied abnimmt, macht der Verf. die Annahme, dass man es auch im scheinbar homogenen Lichte nicht mit einzelnen homogenen Strahlen zu thun habe, sondern mit Strahlencomplexen, in welchen Strahlen von allen möglichen Wellenlängen zwischen gewissen Grenzen enthalten sind. Diese Grenzen seien hinsichtlich der Schwingungsdauer $B+\tau$ und $B-\tau$, so dass $B$ die Schwingungsdauer eines mittleren Strahles ist, während $\tau$ gegen $B$ sehr klein ist, so dass $\frac{B}{\tau}=r$ eine sehr grosse Zahl ist. Es werden dann weiter je zwei Strahlen zusammengefasst, für die der Unterschied

in den Schwingungsdauern grade $\tau$ beträgt, und diese werden von gleicher Amplitude angenommen. Ihre Zusammensetzung ergiebt, wenn noch $\tau$ gegen $B$ vernachlässigt wird, die Schwingung

$$y = A\cos\frac{\pi t}{Br}\sin 2\pi\frac{t}{B},$$

d. i. eine Schwingung mit der veränderlichen Amplitude $A\cos\frac{\pi t}{Br}$. Für alle möglichen Strahlenpaare erhält bei der erwähnten Vernachlässigung $y$ denselben Werth, so dass die obige Formel die vollständige Schwingung des Complexes bezeichnet. Es werden nun zwei solche Complexe mit denselben Werthen von $A$, $B$, $r$ betrachtet, die aber verschiedene Wege durchlaufen haben. Die Schwingungen beider werden auf bekannte Art zusammengesetzt. Die Discussion der resultirenden Intensitätsformel ergiebt dann, dass die Intensität der Maxima mit wachsendem Phasenunterschied abnimmt, die der Minima zunimmt, während für einen bestimmten (sehr grossen) Phasenunterschied die Intensität der Maxima und Minima dielbe wird, so dass hier die Streifen verschwinden. Allerdings ergiebt die Formel des Verfassers auch, dass bei weiter wachsendem Gangunterschiede die verschwundenen Streifen allmählich wieder hervortreten müssten, was bisher noch nie beobachtet ist. Im Uebrigen bietet die hier abgeleitete Formel eine grössere Annäherung an die Wirklichkeit dar, als die gewöhnliche Formel. Wn.

---

A. Cornu. Studien über Diffraction, geometrische Methode zur Discussion der Diffractionsprobleme. Pogg. Ann CLIX. 632-637.

Uebersetzung eines Aufsatzes aus den C. R., über den bereits im Jahrgang 1874 berichtet ist (cf. F. d. M. VI. p. 659). Wn.

---

E. Lommel. Ueber die Interferenz des gebeugten Lichtes. Carl Rep. XII 226-308. Erlang. Ber. 1875.

Unter der Bezeichnung „Interferenz des gebeugten Lichtes“

wird eine Reihe von Erscheinungen zusammengefasst, von denen die bisher bekannten als „Farben dicker Platten“ oder als „Interferenzen diffusen Lichtes“ beschrieben worden sind. Nach einer historischen Einleitung, die die gesammte Literatur über den obigen Gegenstand von Newton, dem Entdecker der Farben dicker Platten, an erwähnt, wird eine neue Methode zur experimentellen Darstellung jener Erscheinungen mitgetheilt, woran sich eine theoretische Entwickelung anschliesst. Die Interferenzerscheinung entsteht durch ein Bündel ursprünglich paralleler Lichtstrahlen, die theils an der vorderen, theils an der hinteren belegten Fläche eines Spiegels reflectirt sind. Dabei ist die Vorderfläche des Spiegels getrübt, so dass dort das Licht diffundirt wird. Die beiden Arten der reflectirten Strahlen werden dadurch zur Interferenz gebracht, dass beide durch eine Linse vereinigt werden. Der Erklärung der durch die Interferenz entstehenden Ringe wird ein zuerst von Stokes ausgesprochenes Princip zu Grunde gelegt, dass nämlich zwei Bündel diffusen Lichtes nur dann mit einander interferiren, wenn sie an einem und demselben Theilchen zerstreut sind. In Folge dessen wird nur ein einzelner Punkt A der Vorderfläche des Spiegels betrachtet. Diesen trifft zunächst ein einziger directer Strahl. In Folge der Trübung gehen aber von A aus Strahlen in allen möglichen Richtungen nach der belegten Hinterfläche des Spiegels und treten, nachdem sie dort eine Reflexion und an der Vorderfläche eine Brechung erlitten, in die Luft aus. Der Punkt A wird ferner von einem zweiten Strahle getroffen, der nach regelmässiger Reflexion an der Hinterfläche in $A$ in die Luft zurücktritt. Dadurch wird der Punkt A zum Ausgangspunkt von Strahlen, die nach allen möglichen Richtungen in die Luft austreten. Von den beiden so entstehenden Bündeln diffusen Lichtes werden zwei Strahlen betrachtet, je einer aus einem Bündel, die parallel sind. Ihr Gangunterschied wird auf bekannte Art berechnet und daraus der Radius der durch ihre Interferenz entstehenden Ringe; das Fernrohr, in dem beide vereinigt werden, ist dabei parallel den beiden Strahlen. Die Uebereinstimmung der Resultate mit der Erfahrung rechtfertigt das zu Grunde gelegte Princip,

dass die Ringe durch die Interferenz von je zwei Strahlen entstehen, von denen der eine vor der Reflexion, der andere nach der Reflexion an derselben Stelle gebeugt wurde.

Als ein weiteres Beispiel für die Interferenz des gebeugten Lichtes wird die Theorie der merkwürdigen Erscheinungen gegeben, welche ein vor einen Spiegel gebrachtes Gitter hervorbringt. Da bei der regelmässigen Beugung an einem Gitter auch solche Strahlen interferiren, die an verschiedenen Stellen gebeugt sind, so hat man nicht blos, wie vorher, die Interferenz zweier Strahlen zu betrachten, die an demselben Punkte gebeugt sind, sondern die verschiedenen so entstehenden Strahlenpaare interferiren noch unter einander, dergestalt, dass man eine Beugungserscheinung erhält, die modificirt ist durch die oben auseinandergesetzte Interferenz innerhalb jedes einzelnen Strahlenpaares. Die Theorie dieser Erscheinung wird nach den gewöhnlichen Methoden ausführlich auseinandergesetzt. Dabei wird das Gitter als aus verticalen parallelen Linien bestehend, die Lichtquelle als unendlich ferne leuchtende Linie angenommen, die den Gitterlinien parallel ist. In Folge dieser Annahme kann die Betrachtung auf eine zu den Gitterstäben senkrechte Ebene beschränkt werden.

Zum Schluss erweitert der Verfasser die Theorie der zuerst besprochenen Erscheinung, bei der nur ein einziger Punkt der getrübten Fläche für die Gangunterschiede massgebend ist, dahin, dass die getrübte und die spiegelnde Fläche nicht parallel sind, sondern einen Winkel mit einander bilden. Hier entsteht, falls jener Winkel klein ist, statt des kreisförmigen ein ovales Ringsystem. Wn.

---

Ch. André. Études de la diffraction dans les instruments d'optique. Ann. de lÉc. Norm. (2) V. 275-355.

Siehe Abschn. XII. Cap. 2.

---

V. Baudys. Theorie des Nebenregenbogens. Casopis V. (Böhmisch). W.

O. Röthig. Die Probleme der Reflexion und Brechung. Leipzig. Teubner.

Der Verfasser behandelt zuerst die Brechung eines einzelnen Lichtstrahls an der ebenen Trennungsfläche zweier Medien unter Anwendung der Elemente der analytischen Geometrie des Raumes und mit Benutzung einfacher Determinantensätze. Er nimmt für die Gleichungen des gebrochenen Strahles genau dieselbe Form an, wie für die des einfallenden Strahles, und drückt die Constanten des gebrochenen Strahles durch die des einfallenden aus. Durch successive Anwendung dieser Gleichungen kann man die Brechung eines Lichtstrahles an beliebig vielen beliebig gelegenen Ebenen absolviren, wobei der Fall, dass an Stelle einer oder mehrerer Brechungen Reflexionen eintreten, eingeschlossen ist. Aber die wirkliche Bestimmung des gebrochenen Strahles würde sehr viele Nebenrechnungen (die Berechnung der Constanten der einzelnen Strahlen) erfordern, für praktische Anwendungen daher nicht einfach und übersichtlich genug sein. Aus der Brechung an einer Ebene wird die an einer Kugelfläche abgeleitet, indem die brechende Fläche durch ihre Tangentialebene ersetzt wird. Das hier erhaltene Resultat ist ganz analog dem vorhergehenden: dabei wird von den möglichen Formen der Gleichungen, durch welche die Constanten des gebrochenen Strahles bestimmt werden, die einfachste gewählt. Durch wiederholte Anwendung des Resultats erhält man die Brechung an einer Reihe von hintereinander liegenden Kugelflächen. Die Bemerkungen, die oben in Betreff der für die Anwendung nöthigen Nebenrechnungen gemacht sind, gelten auch hier; man erkennt dies schon aus dem in der Schrift selbst durchgeführten Beispiele der Brechung an einer Vollkugel. Es wird dann noch die Form der Gleichungen, die zur Berechnung des gebrochenen Strahles nöthig sind, aufgestellt für den Fall, dass an Stelle der Kugelflächen beliebige andere Flächen treten. Directe Schlüsse werden aus diesen Gleichungen ebensowenig gezogen, wie aus den vorhergehenden.

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich nicht mehr mit einzelnen Strahlen, sondern betrachtet alle von einem Punkte des ersten Mediums ausgehenden Strahlen. Dieselben mögen

an einem System beliebiger Flächen gebrochen sein; es wird der Bildpunkt gesucht. Dieser wird definirt als Durchschnittspunkt derjenigen Strahlen, die in das Auge gelangen. Es ist daher zunächst zu untersuchen, unter welchen Bedingungen ein solcher Durchschnittspunkt vorhanden ist. Bei der Untersuchung dieser Frage legt der Verfasser eine eigenthümliche Annahme zu Grunde, deren Zulässigkeit in physikalischer Hinsicht dem Referenten zweifelhaft erscheint, und die sicher keine genauen sondern höchstens angenäherte Resultate ergiebt. Die Annahme besteht darin, dass die Pupille als ein Kreis betrachtet wird, dessen Radius eine unendlich kleine Grösse 1ter Ordnung ist. Durch einen solchen Kreis geht ein unendlich dünnes Bündel der gebrochenen Strahlen. Der Verfasser schliesst nun folgendermassen: Nach den von Kummer in seiner Theorie der geradlinigen Strahlensysteme (Borchardt J. LVII.) abgeleiteten Resultaten ist der Querschnitt eines solchen Bündels in einem der beiden (von Kummer näher definirten) Brennpunkte eine unendlich kleine gerade Linie. Nimmt man nun noch an, dass das Auge die Fähigkeit hat, die Längenausdehnung der Querschnitte in den Brennpunkten zu unterdrücken, so gehen alle den unendlich kleinen Kreis passirenden Strahlen durch einen Punkt; dieser, zugleich einer der Brennpunkte der unendlich nahen Strahlen, ist der Bildpunkt. Die zum Betrachten günstigste Stellung des Auges, (bei der am meisten Strahlen in's Auge gelangen), ergiebt sich leicht; sie findet statt, wenn die Ebene der Pupille senkrecht steht zur Verbindungslinie des Mittelpunktes der Pupille mit dem obigen Bildpunkte. Die zur Berechnung des Bildpunktes für diesen Fall dienenden Formeln werden aus den obigen allgemeinen Formeln abgeleitet. Dass aber dieser Punkt wirklich mit einem der Kummer'schen Brennpunkte zusammenfällt, wird nicht bewiesen. Daran schliessen sich Betrachtungen, die sich auf die Lage der Bildpunkte für beide Augen beziehen, sowie auf den Fall, dass im ersten Medium nicht ein einzelner leuchtender Punkt, sondern eine leuchtende Fläche vorhanden ist. Sodann wird die Berechnung des oben definirten Bildpunktes durchgeführt für den einfachen Fall, dass die von einem Punkte ausgehenden Lichtstrahlen

an einer einzelnen Ebene gebrochen werden. Schon in diesem einfachen Falle ist die Lösung des Problems von einer Gleichung vierten Grades abhängig. Die Lösung in anderen Fällen scheint danach undurchführbar; daher wird im Folgenden jene Definition der Bildpunkte ganz fallen gelassen und eine andere Näherung gesucht. Nur zum Schluss werden noch die Bildpunkte für eine Brechung durch eine planparallele Platte bestimmt.

Im nächsten Paragraphen werden die allgemeinen Formeln, die für die Brechung an einer Kugelfläche im Anfang abgeleitet sind, auf den Fall angewandt, dass die Lichtstrahlen von einem Punkte ausgehen, dass die $y$ und $z$ Coordinaten des leuchtenden Punktes, sowie des Punktes, in denen irgend ein Strahl die Kugelfläche trifft (die $x$-Axe geht durch den Kugelmittelpunkt), so klein sind, dass ihre Quadrate gegen die ersten Potenzen vernachlässigt werden können. Dadurch erhält man dann die gewöhnlichen Näherungsformeln. Diese werden auch für ein System centrirter brechender Kugelflächen abgeleitet, woraus sich dann die Gauss'schen charakteristischen Punkte (incl. der Knotenpunkte) ergeben. Auf die Wichtigkeit dieserPunkte für die Construction des gebrochenen Strahles wird hingewiesen. Durch diese Ableitung der Gauss'schen Näherungsformeln aus den allgemein gültigen Formeln wird allerdings der präcise Ausdruck der Bedingungen gewonnen, unter denen allein jene Näherung gilt; doch ist das Resultat nicht neu, und ob das eingeschlagene Verfahren das einfachste ist, mag dahin gestellt bleiben.

Den Schluss der Schrift bildet ein Anhang über Kettenbrüche. Wn.

H. Zincken-Sommer. Ueber die genaue Darstellung der Brechung eines Strahls durch ein Linsensystem und die dafür geltenden Brenn-, Haupt- und Kreuzungspunkte. Berl. Monatsber. 1876. 123-128.

H. Zincken-Sommer. Ueber die Brechung eines Lichtstrahls durch ein Linsensystem. Borchardt J. LXXXII. 31-44.

Die Formeln, welche die Brechung eines Lichtstrahls durch

ein System von Linsen darstellen, haben die einfache, übersichtliche Gestalt, die sie seit Gauss besitzen, nur für den Fall, dass allein solche Strahlen in Betracht kommen, deren Neigung gegen die Axe verschwindend klein ist. Die Berücksichtigung der Strahlen von grösserer Neigung (Berücksichtigung der sphärischen Aberration) führt auf ausserordentlich complicirte, wenig übersichtliche Formeln. Trotzdem lässt sich, wie der Verfasser der vorliegenden Arbeiten zeigt, die Abhängigkeit des gebrochenen Strahles vom einfallenden ohne jede Vernachlässigung durch sehr einfache Gesetze darstellen. Zu diesem bemerkenswerthen Resultate gelangt er durch eine Erweiterung der Gauss'schen Definitionen, die darin besteht, dass *jedem* Strahle je nach seiner Lage besondere Brennweiten, sowie auch besondere Brenn-, Haupt- und Kreuzungspunkte zugetheilt werden. Die Lage der genannten Punkte wird folgendermassen definirt. Es sei $n$ der Brechungsexponent einer Linse, $m$ und $m_1$ die der Medien vor und hinter der Linse, $\varphi$ Einfalls-, $\psi$ Brechungswinkel für die erste, $\varphi_1$, $\psi_1$ dieselben Winkel für die zweite Brechung. $r$ und $r_1$ seien die beiden Kugelradien, $p$ die Entfernung der Kugelmittelpunkte, $n.d$ die Länge des Strahls in der Linse. Setzt man dann:

$$\frac{1}{f} = \frac{n\cos\psi - m\cos\varphi}{r}, \quad \frac{1}{f_1} = \frac{n\cos\psi_1 - m_1\cos\varphi_1}{r_1},$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_1} - \frac{d}{ff_1},$$

$$i = \frac{F.p}{f_1}, \quad i_1 = \frac{F.p}{f}, \quad e = \frac{F.d}{f_1}, \quad e_1 = \frac{F.d}{f},$$

so ist $mF$ die erste, $m_1F$ die zweite Brennweite der Linse für den Strahl, $i$ und $i_1$ sind die Entfernungen der (auf der Axe liegenden) Kreuzungspunkte von den Kugelmittelpunkten. Trägt man die Strecken $me$ und $m_1e_1$ auf dem einfallenden, resp. dem gebrochenen Strahle vom Einfallspunkte aus nach innen auf, so ergeben sich die Hauptpunkte. Trägt man endlich von den Hauptpunkten aus die Strecken $mF$ und $m_1F$ (die Brennweiten) auf dem einfallenden resp. gebrochenen Strahle nach aussen ab, so gelangt man zu den Brennpunkten der Strahlen. Diese Bestimmungsstücke der Strahlen weichen von den Gauss'schen

nur um Werthe zweiter Ordnung ab, so dass sie für $\varphi = 0$, $\psi = 0$ mit denselben identisch werden. Aus diesen Definitionen folgt nun, dass die Kreuzungspunkte die Schnitte der Axe sind mit demjenigen Paar paralleler Ebenen, welches durch den eintretenden und den gebrochenen Strahl, (die ja im Allgemeinen nicht in einer Ebene liegen), gelegt werden kann. Der Haupt- und der Brennpunkt eines der genannten Strahlen sind die Schnitte desselben mit demjenigen Paar paralleler Ebenen, welches durch den andern Strahl und die Axe gelegt werden kann. Die beiden Kreuzungspunkte und die beiden Hauptpunkte bilden die Ecken eines Parallelogramms, dessen Ebene Hauptebene, und von dem zwei Gegenseiten Hauptlinien genannt werden. Weiter ergeben sich folgende Sätze. Die Entfernungen des einfallenden und des durch die Linse gebrochenen Strahles von den zugehörigen Kreuzungspunkten, ebenso die Sinus der Winkel, welche jene Strahlen mit den Hauptlinien, resp. der Hauptebene bilden, verhalten sich wie $m_1 : m$, d. h. wie die Brechungsindices der Medien hinter und vor der Linse. Diese Winkel und ebenso die erwähnten Entfernungen werden daher unter einander gleich, wenn die Linse beiderseits von demselben Medium umgeben ist. Umgekehrt ist der Sinus der Ablenkung, welche ein Strahl durch die Brechung erfährt, gleich seiner Entfernung vom ersten Kreuzungspunkte, dividirt durch die zweite Brennweite. Eine Richtungsänderung durch die Brechung findet nur dann nicht statt, wenn der eintretende und demnach auch der gebrochene Strahl durch den ihm zugeordneten Kreuzungspunkt geht. Diese Sätze, werden in der ersten der oben genannten Arbeiten synthetisch in der anderen analytisch abgeleitet. Es ergiebt sich aus ihnen eine der Gauss'schen entsprechende Construction, sobald der einfallende Strahl, die zugehörigen Brennweiten und Kreuzungspunkte gegeben sind. Die Arbeit in Borchardt's Journal bestimmt dann noch die Lage des austretenden Strahles durch Rechnung, und stellt die Gleichungen auf, mit Hülfe deren die Berechnung der Brennweiten und der Kreuzungspunkte durch successive Näherung bis zur beliebigen Genauigkeit geführt werden kann. Endlich wird noch die Brechung des Lichtes durch eine Combination

von zwei Linsen mit gemeinsamer Axe behandelt. Die Formeln, die sich hier ergeben, haben durchweg dieselbe Gestalt, wie für eine einfache Linse. Wird daher eine Doppellinse mit einer einfachen Linse combinirt, so gehen abermals Formeln von der nämlichen Gestalt hervor, und demzufolge gelten die entwickelten Gesetze ganz allgemein für irgend welche Systeme von Linsen mit gemeinsamer Axe.

Bemerkt mag noch werden, dass die ersten Betrachtungen, welche bei zwei brechenden Flächen zu der Abhängigkeit des gebrochenen vom einfallenden Strahle führen, keine Aenderung erleiden, wenn an Stelle der Kugelflächen beliebige andere Flächen treten, an Stelle der Kugelmittelpunkte beliebige Punkte auf den Normalen. Wn.

---

W. Scheibner. Dioptrische Untersuchungen, insbesondere über das Hansen'sche Objectiv. Leipz. Abh. XI. 541-620.

Um für die Brechung des Lichtes an einem System von sphärischen Oberflächen, deren Mittelpunkte sämmtlich auf der Axe liegen, praktisch brauchbare Formeln zu erhalten, benutzt Herr Scheibner Reihenentwickelungen. Er betrachtet zuerst einen Lichtstrahl, der mit der Axe in einer Ebene liegt, und stellt die für die successiven Brechungen dieses Strahles geltenden Formeln zusammen, zum Theil in einer von Hansen angegebenen Form (cf. F. d. M. III. p. 518). Die Punkte, in denen ein Strahl nach den verschiedenen Brechungen die Axe durchschneidet, fallen für alle symmetrisch zur Axe liegenden Strahlen zusammen. Die Entfernungen dieser Punkte von dem Durchschnitt der zugehörigen brechenden Fläche mit der Axe werden Vereinigungsweiten genannt. Die Ausdrücke für dieselben, resp. für ihre reciproken Werthe, werden nach Potenzen der Oeffnung $k = r.\sin\vartheta$ entwickelt, wobei $r$ der Radius der ersten brechenden Fläche ist, $\vartheta$ der Bogenabstand desjenigen Punktes, in dem der erste Strahl die brechende Fläche trifft, von dem Axenpunkte jener Fläche. Im Weiteren wird die Abhängigkeit dieser Grössen von Kettenbrüchen gezeigt, wobei sich dieselben Formeln ergeben, die schon

Hansen aufgestellt hat. Wenn man in der Reihenentwickelung schon Glieder von der Ordnung $k$ vernachlässigt, so sind die Vereinigungsweiten für alle von einem Punkte der Axe ausgehenden Strahlen dieselben; man erhält ein Bild des Punktes. Bei dieser Annäherung kann man auch leicht das Bild eines leuchtenden Punktes bestimmen, der ausserhalb der Axe liegt. Die bekannten charakteristischen Punkte, die zu dieser Bestimmung dienen, werden abgeleitet. Um von diesem, gewöhnlich allein behandelten Falle zu einer weiteren Näherung zu gelangen, verfährt der Verfasser, unter Benutzung von Andeutungen, die Gauss gegeben, folgendermassen: Durch den in erster Näherung erhaltenen Vereinigungspunkt lege man eine Ebene senkrecht zur Axe. In zweiter Näherung ändern sich nun die Vereinigungspunkte der verschiedenen von demselben Punkte der Axe ausgehenden Strahlen mit $\vartheta$; die äussersten gebrochenen Strahlen liegen innerhalb eines Kegels, der aus der zuvor genannten Ebene einen kleinen Kreis ausschneidet. Man bestimme für jeden Punkt dieses Kreises den durch ihn hindurchgehenden gebrochenen Strahl und dessen Intensität, bilde dann das (von Gauss und Bessel eingeführte) Integral

$$u = \int jhh \, d\sigma.$$

Das Integral ist auszudehnen über die Fläche jenes Kreises. Die unter dem Integral vorkommenden Grössen $h$ (der Abstand des Flächenelements $d\sigma$ von der Axe) und $j$ (die Intensität des durch das Element gehenden Strahles) werden ebenfalls nach Potenzen von $k$ entwickelt. Dabei wird auf die bei jeder Brechung eintretende, sowie auf die durch Absorption entstehende Verringerung von $j$ Rücksicht genommen. Dann wird untersucht, wann das Integral $u$ ein Minimum ist. Durch die Discussion der Bedingungen dafür ergiebt sich, in welcher Entfernung die auf das Objectiv fallenden Strahlen zur Vereinigung gebracht werden müssen, damit der Einfluss der sphärischen Aberration am geringsten ist.

Eigenthümlich ist die Art, wie der Verfasser die chromatische Abweichung zu beseitigen sucht. Er lässt an der Stelle, wo das

Bild entstehen soll, nicht die äussersten Strahlen des Spectrums (die rothen und violetten) zusammenfallen, sondern richtet die beiden Linsen, die zusammen das achromatische Objectiv bilden, so ein, dass an der Stelle des Bildes der Vereinigungspunkt der hellsten Strahlen (der gelben) liegt, und dass die Strahlen von grösserer und kleinerer Wellenlänge sich paarweise vereinigen; nur fallen diese Vereinigungspunkte nicht mit dem Orte des Bildes zusammen. Die gestellte Forderung kommt darauf hinaus, die zur Beseitigung der sphärischen Abweichung aufgestellten Gleichungen nach dem Brechungsexponenten *m* zu differentiiren. Bei drei Linsen kann man mit den gelben noch die violetten Strahlen vereinigen; in jedem anderen Vereinigungspunkte fallen dann drei verschiedene Farben zusammen. Die zur weiteren Ausführung der obigen Bedingungen nöthigen Verhältnisse der *dm* (die Zerstreuungsverhältnisse) werden für zwei bestimmte Glasarten ermittelt. Dann werden die obigen Bedingungen weiter entwickelt, wobei noch die fernere Bedingung hinzugenommen wird, dass Strahlen von verschiedener Wellenlänge nahezu gleich grosse Bilder liefern. Hinsichtlich dieser Entwickelungen, wie auch in Bezug auf die Einzelheiten des Folgenden muss auf die Abhandlung selbst verwiesen werden. Als Zahlenbeispiel wird die Berechnung des Hansen'schen Objectivs gegeben, d. h. es werden für zwei an einander stossende Linsen die Zahlenwerthe von *n* zu Grunde gelegt, welche das Objectiv des berühmten Königsberger Heliometers besitzt, ein zuerst von Hansen durchgeführtes Beispiel. Die Rechnung ergiebt vier verschiedene mögliche Objective von mässigen Krümmungen. Weiter folgt die Berechnung eines Systems zweier getrennten Linsen (Gauss'sches Objectiv); eines Systems von drei aneinanderstossenden Linsen, endlich eines dialytischen Objectivs mit sechs Brechungen, d. h. eines solchen, bei dem zwei Linsensysteme durch einen grösseren Zwischenraum getrennt sind. In den Reihenentwickelungen sind überall die der $4^{\text{ten}}$ Potenz der Oeffnung proportionalen Glieder vollständig berücksichtigt. Wn.

K. W. Zenger. Ueber katadioptrische Fernröhre und Aplanaten. Prag. Ber. 1875. 21-55.

Der Verfasser discutirt die Möglichkeit vollkommen achromatischer und dabei ausser der Axe für die sphärische Aberration corrigirter Objective. Er kommt dabei zu dem Schlusse, dass das Maximum der optischen Leistungsfähigkeit unsrer Teleskope nur dann zu erzielen sein werde, wenn man die Vorzüge der katoptrischen und dioptrischen Systeme combinirt zur Anwendung gelangen lässt. Zu dem Zwecke wird ein Objectiv vorgeschlagen, das aus einem Concavspiegel und zwei sich berührenden Linsen besteht, einer Zerstreuungs- und einer Sammellinse. Nimmt man beide Linsen von gleichem Zerstreuungsvermögen (am besten von demselben Glase) und von gleicher Focallänge, so entsteht, wie sich aus den bekannten Näherungsformeln ergiebt, das Bild an demselben Orte, wo es ohne das Linsensystem von dem Concavspiegel allein entworfen würde, und dasselbe ist vollkommen achromatisch. Dabei sind die vier Krümmungsradien beider Linsen noch unbestimmt, nur dass die oben genannte Bedingung erfüllt werden muss. Diese Radien lassen sich daher so bestimmen, dass die sphärische Aberration des Spiegels und der beiden Linsen einander aufheben, ja man kann auch die sphärische Aberration der Oculare mit corrigiren. Der Verfasser zeigt dies unter Anwendung der gewöhnlichen Näherungsformeln für Axenstrahlen der Linsen und ihre sphärische Aberration. Die Entfernung der Linsen vom Spiegel, über die man noch verfügen kann, wird so gewählt, dass sie nicht zu klein ist, damit nicht ein grösserer Theil der Centralstrahlen verloren geht, dass ferner die Krümmungen der Linsen nicht zu gross werden, dass man endlich vermittelst eines Planspiegels die Oculare senkrecht zur Rohraxe anbringen kann. An die allgemeinen Formeln knüpft der Verfasser die vollständige Durchführung eines Zahlenbeispiels an, aus dem der ausführende Optiker alle Dimensionen des vorgeschlagenen Objectivs entnehmen kann.

Wn.

P. Schröter. Zur Dioptrik des Auges. Diss. Berlin.

Die Arbeit will, ohne eigene Resultate zu geben, die Gauss'schen dioptrischen Untersuchungen elementar darstellen, so dass sie auch für Mediciner verständlich sind. Der Verfasser findet nämlich, dass die meisten vorhandenen elementaren Bearbeitungen des Gegenstandes für den Mediciner zuviel Rechnung erfordern. Er hält seine Darstellung, deren Methode ihm von Herrn Dr. Hirschberg an die Hand gegeben, für besonders einfach. Referent kann in dieser Methode nichts Eigenthümliches finden. Die Darstellung ist z. B. bei Herrn C. Neumann (Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystems, Leipzig 1866) oder bei Reusch (cf. F. d. M. II., 794) mindestens ebenso einfach. Der einzige Nutzen der Schrift kann daher höchstens darin bestehen, die Kenntniss der neueren dioptrischen Untersuchungen unter den Medicinern weiter zu verbreiten. Speciell von der Dioptrik des Auges ist in der Schrift nur anmerkungsweise die Rede.

Wn.

---

H. Krüss. Bemerkungen zu Dr. L. Hermann's: Ueber schiefen Durchgang von Strahlenbündeln durch Linsen. Pogg. Ann. CLVII. 334-335.

Die Bemerkungen beziehen sich auf einen Aufsatz, der F. d. M. VI. p. 670 besprochen ist. Dort hatte Herr Hermann gesagt, dass „eine specielle und directe Behandlung der auf die Theorie der Brechung schief auffallender Strahlenbündel bezüglichen Fälle nicht zu existiren scheint“. Dem gegenüber verweist Herr Krüss auf die frühere Literatur. Nach Erwähnung der Arbeiten von Möbius, Gauss, Bessel werden namentlich die Arbeiten von Seidel ausführlich besprochen, denen sich zwei andere von Keller und Bauer anschliessen. In Seidel's Arbeiten ist das von Hermann behandelte Problem schon in viel allgemeinerer Weise gelöst, indem einmal auch solche Strahlen in Betracht gezogen sind, die mit der Axe nicht in derselben Ebene liegen, andererseits nicht blos sehr kleine, sondern beliebige Oeffnungen berücksichtigt sind. Zwei neuere Arbeiten von

Zincken-Sommer (cf. F. d. M. II. 796) und Hansen (F. d. M. III. 518) geben Formeln, die nach des Verfassers Ansicht für den praktischen Optiker weniger geeignet sind. Wn.

---

H. Krüss. Ueber die Tiefe der Bilder bei optischen Apparaten. Pogg. Ann. CLVII. 476-482.

Man sagt, ein Apparat liefert tiefe Bilder, wenn er von ungleich weit entfernten Objecten gleichzeitig deutliche Bilder in derselben Ebene zu erzeugen vermag. Natürlich handelt es sich dabei nicht um absolut scharfe Bilder. Die Bildtiefe eines Linsensystems wird hier bestimmt. Sie ist

$$T = \frac{2a.o.p.d.(a-p)}{o^2.p^2-d^2(a-p)^2},$$

wenn $p$ die Brennweite, $o$ die Oeffnung des Systems bezeichnet, $a$ den Objectsabstand; $d$ ist der Durchmesser eines solchen Kreises der Bildebene, der dem Auge eben noch als Punkt erscheint. Die Gleichung wird so abgeleitet, dass die einfache Linsenformel auf zwei leuchtende Punkte der Axe angewandt wird, deren Entfernung grade so angenommen wird, dass der Zerstreuungskreis, welchen das Bild des einen Punktes um das scharfe Bild des andern Punktes herum bildet, den Durchmesser $d$ hat. Bei dieser Wahl der Punkte entstehen durch die äussersten gebrochenen Strahlen ähnliche Dreiecke, die eine 3te Gleichung liefern, woraus dann die obige Formel folgt. Die Formel wird discutirt, an Zahlenbeispielen geprüft, endlich auf das Auge angewandt. Wn.

---

V. Baudys. Ueber den optischen Mittelpunkt und die Hauptpunkte der Linsen. Casopis V. (Böhmisch.)

Entwickelung und Zusammenstellung der wichtigsten dahin gehörigen Formeln. W.

---

## A. Cayley. An elementary construction in optics.

Messenger (2) VI. 81-82.

Man betrachte zwei Linien, die sich im Punkte $P$ schneiden, und einen Punkt $A$. Durch $A$ ziehe man unter rechten Winkeln zu $AB$ eine Linie, welche die beiden Linien in den Punkten $U$, $V$ schneidet, und ziehe durch $A$ noch eine andere Linie, die die beiden Linien in $U'$ und $V'$ schneidet. $u'$ und $v'$ seien die Fusspunkte der Lothe von $U'$ und $V'$ auf $UV$. Dann hat man

$$\frac{1}{Au'} + \frac{1}{Av'} = \frac{1}{AU} + \frac{1}{AV}.$$

Dies wird bewiesen. Es ist das das optische Gesetz

$$\frac{1}{AU'} + \frac{1}{AV'} = \frac{1}{AF},$$

wo $AF$ die Brennweite der Linse ist. Glr. (O.)

---

## C. Bender. Neue constructive Bestimmung von Bild- und Gegenstandsweite bei sphärischen Linsen.

Pogg. Ann. CLVII. 483-486.

Sind zwei Seiten eines Dreiecks $c$, $d$, der eingeschlossene Winkel $\varphi$, ferner $f$ eine von dem Scheitel von $\varphi$ ausgehende Transversale (im allgemeinen Sinne), durch welche der Winkel $\varphi$ in die Winkel $\nu$ und $\mu$ getheilt wird, so erhält man, indem man den Flächeninhalt des Dreiecks auf doppelte Weise berechnet, leicht

$$\frac{1}{f} = \frac{\sin\nu}{d\sin\varphi} + \frac{\sin\mu}{c\sin\varphi}.$$

Ist nun $f$ gleich der Brennweite einer Linse, und setzt man

$$a = \frac{d\sin\varphi}{\sin\nu}, \quad b = \frac{c\sin\varphi}{\sin\mu},$$

so geht die obige Formel genau in diejenige über, durch welche die Objectweite $a$ und die Bildweite $b$ der Linse zusammenhängen. Daraus folgt weiter eine Construction von $b$, wenn $a$ und $f$ gegeben sind. $\varphi$ wird für diese Construction $= 90°$ angenommen. Construirt man auf diese Weise das Bild eines leuchtenden Punktes für verschiedene Werthe von $a$, so beschreibt

das Bild bei variirendem $a$ einen Kegelschnitt, der eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, je nachdem $d > f$, $d = f$ oder $d < f$ ist. Umgekehrt ergiebt jene Construction gewisse Sätze über Kegelschnitte.

Nebenbei wird noch die Relation

$$FB.FA = FO^2$$

abgeleitet, wo $F$ Brennpunkt, $O$ Mittelpunkt der Linse, $A$ der leuchtende Punkt, $B$ sein Bild ist. Diese Relation wird als neu Herrn Müller zugeschrieben (cf. F. d. M. V. p. 549), während sie doch weiter nichts ist, als eine längst bekannte Relation für harmonische Punkte; und dass, wenn $F$ der Mittelpunkt der Strecke $OG$ ist, die Punkte $A$, $B$, $O$, $G$ ein harmonisches Punktsystem bilden, ist ebensowenig neu. Wn.

---

C. Bender. Minimum der Ablenkung und bequeme Ableitung der Gleichung zwischen Bild- und Gegenstandsweite bei sphärischen Linsen. Hoffmann Z. VII. 39-40.

Herleitung einer bekannten Gleichung durch elementare Betrachtungen. Siehe das obige Referat. H.

---

F. W. Berg. Ueber die kleinste Ablenkung im Prisma. Pogg. Ann. CLVIII. 651-653.

E. Lommel. Ueber die kleinste Ablenkung im Prisma. Pogg. Ann. CLIX. 329-330.

Herr Berg beweist den Satz von der kleinsten Ablenkung im Prisma durch Discussion der trigonometrischen Formeln, die zwischen dem Eintritts-, dem Austrittswinkel und den Winkeln im Prisma bestehen. Die Idee, den Beweis auf diese Art zu führen, ist jedoch nicht neu, sondern ähnlich wird derselbe bereits in vielen Lehrbüchern geführt, z. B. denen von Wüllner und Jochmann. Herr Lommel führt in seiner Notiz als die ersten Schriftsteller, die jenes Beweisverfahren eingeschlagen, an: Barry (Ann. d. chim. XLVII., Pogg. Ann. XXVI., 1832) und

Eisenlohr (Schlömilch Z. XII., 1867). Weiter theilt Herr Lommel noch eine Modification jenes Beweises mit. Wn.

---

Fr. Brodersen. Elementarer Beweis eines Satzes aus der Optik. Grunert Arch. LX. 107-108.

Der bekannte Satz, dass ein Lichtstrahl von einem Punkte $A$ eines Mediums zu einem Punkte $B$ eines andern Mediums in der kürzesten Zeit gelangt, wenn er das Brechungsgesetz befolgt, wird folgendermassen bewiesen: Ist der Satz für einen Punkt $B$ richtig, so ist er auch richtig für einen andern Punkt $B_1$, der mit $B$ auf demselben gebrochenen Strahl näher der Grundfläche liegt. Man hat daher den Satz nur für den unendlich fernen Punkt des gebrochenen Strahles zu beweisen, und für diesen ergiebt er sich durch elementare Betrachtungen. Wn.

---

A. von Frank. Construction der Wellenfläche bei der Brechung eines homocentrischen Strahlenbündels an einer Ebene. Grunert Arch. LX. 14-22.

In der vorliegenden Arbeit wird folgende Frage behandelt: In einem isotropen Medium befindet sich ein leuchtender Punkt, dessen Strahlen an einer Ebene in ein anderes, ebenfalls isotropes Medium gebrochen werden; welches ist dann die Fläche im zweiten Medium, die alle diejenigen Punkte verbindet, bis zu welchen die Lichtbewegung in einer bestimmten Zeit gelangt ist? Die Fläche ist natürlich eine Rotationsfläche, deren Axe das von dem leuchtenden Punkte auf die brechende Ebene gefällte Loth ist; es bedarf nur einer Untersuchung ihrer Meridiancurve. Zur Construction einzelner Punkte dieser Curve wird zunächst ein einfaches Verfahren angegeben, welches darauf beruht, dass, wenn $r$ die Länge eines einfallenden Strahls, $s$ eine auf dem zugehörigen gebrochenen Strahle vom Einfallspunkte aus gerechnete Länge, $n$ der Brechungsexponent ist, die Punkte der gesuchten Curve bestimmt werden durch

$$r + ns = \lambda,$$

wo $\lambda$ für alle gebrochenen Strahlen denselben Werth hat. Der Verfasser sucht dann die Natur dieser Curve analytisch zu bestimmen; da es ihm aber nicht gelingt, die nöthige Elimination auszuführen, so wird die Curve auf indirectem Wege bestimmt. Es wird nämlich die Gleichung der Brennlinie abgeleitet, die bekanntlich die Evolute einer Ellipse oder Hyperbel ist, je nachdem $n < 1$ oder $> 1$. Die zugehörige Ellipse (resp. Hyperbel) ist gegen alle gebrochenen Strahlen senkrecht. Die gesuchte Curve hat dieselbe Eigenschaft (die Ableitung dieses von Malus herrührenden Satzes wäre ebenso am Platz gewesen, wie die Ableitung der Brennlinie); mithin ist die gesuchte Curve eine Parallelcurve einer Ellipse oder Hyperbel.

Referent kann nicht umhin, darauf hinzuweisen, in wie eigenthümlicher Weise der Verfasser citirt. Derselbe sagt nämlich: „nach Helmholtz“ ist der Brechungsexponent zweier Medien gleich dem Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichts in beiden. Wn.

---

G. F. Childe. Ray-surfaces of refraction. Quart. J. XIV. 209-217.

Die vorliegende Fortsetzung einer im vorigen Jahre besprochenen Arbeit (cf. F. d. M. VII. p. 506) enthält specielle Beispiele für die von reflectirten und gebrochenen Strahlen gebildeten Flächen. Die brechende (spiegelnde) Curve wird dabei als gerade Linie, die Lichtquelle als Punkt oder als ein leuchtender Kreis vorausgesetzt. Zum Schluss werden einige bekannte kaustische Flächen (resp. Linien) abgeleitet. Wn.

---

C. Leudesdorf. Solution of a question (4730). Educ. Times XXV. 26-27.

Eine leuchtende Kugel mit dem Radius $c$ hat ihren Mittelpunkt im Brennpunkt eines Rotationsparaboloides. Die totale Beleuchtung des Theils des Paraboloids, welcher durch eine im Brennpunkt zur Axe desselben senkrecht gezogene Ebene abgeschnitten wird, ist $J\pi(\pi-2)c^2$. O.

---

E. ALLARD. Mémoire sur l'intensité et la portée des phares. Ann. d. P. et d. Ch. (5) XII. 5-117.

Die vorliegende Arbeit setzt die technischen Verbesserungen auseinander, welche an den Leuchtfeuern in den letzten Jahren angebracht sind. Von mathematischem Interesse sind zwei kurze Abschnitte, deren erster die Durchsichtigkeit der Flammen theoretisch behandelt. Hat die Flamme die Form eines Cylinders, dessen Axe $x$ dem Beobachter zugewandt ist, und ist $w$ der Querschnitt des Cylinders, $i$ die specifische Lichtintensität, die durch die Volumeneinheit hervorgebracht wird, so giebt ein Volumen von der Höhe $dx$, falls es am Ende des Cylinders liegt, die Intensität $widx$; falls dasselbe Volumen aber in der Entfernung $x$ liegt, ist, in Folge der nicht vollkommenen Durchsichtigkeit der Flamme, die Intensität $wia^xdx$, wobei $a < 1$ der Durchsichtigkeitscoefficient ist. Hieraus folgt leicht durch Integration die gesammte von dem Cylinder gelieferte Lichtintensität; und aus demselben Princip wird die betreffende Intensität für eine Halbkugel und ein halbes Rotationsellipsoid berechnet.

Der zweite der genannten Abschnitte betrifft die Theorie des Gesichtseindruckes, der durch die sogenannten Blickfeuer hervorgebracht wird. Der Eindruck, den eine Flamme im Auge hervorbringt, verschwindet bekanntlich nicht sofort mit dem Erlöschen der Flamme. Für diese allmähliche Abnahme des Eindrucks nimmt der Verfasser dasselbe Gesetz an, welches für die Abkühlung von Körpern von kleinen Dimensionen gilt, und berechnet daraus die scheinbare Intensität, die im Auge entsteht, wenn die Intensität der Lichtquelle sich nach einem bestimmten Gesetze mit der Zeit ändert. Wn.

---

A. STUDNIČKA. Neue Erscheinungen der Wirkungen des Lichts. Casopis V. (Böhmisch).

Nach dem Engineer. W.

# Capitel 3.

## Elektricität und Magnetismus.

C. Neumann. Ueber die Anzahl der elektrischen Materien. Pogg. Ann. CLIX. 301-312.

Will man die elektromotorische Einwirkung eines um seine Axe drehbaren cylindrischen Magneten auf ein fest aufgestelltes lineares Leiterelement *Ds* näher angeben, so sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: Der Magnet steht still. Alsdann ist die von ihm in *Ds* inducirte elektromotorische Kraft stets gleich Null.

Zweiter Fall: Der Magnet rotirt. Alsdann wird die von ihm in *Ds* inducirte elektromotorische Kraft einen Werth besitzen, der (bei geeigneter Aufstellung des Elementes *Ds*) von Null verschieden ist.

Man wird schwerlich bezweifeln, dass diese Sätze auch dann noch gültig bleiben, wenn man den Magneten durch ein Solenoid (von endlichem Durchmesser), resp. durch einen einzelnen Stromring ersetzt. Denken wir uns also einen kreisförmigen Metallring, welcher drehbar ist um seine geometrische Axe (d. i. um die in seinem Mittelpunkt auf seiner Ebene errichtete Normale), und denken wir uns diesen Ring von einem constanten elektrischen Strom durchflossen, so werden hinsichtlich der elektromotorischen Wirkung dieses Ringes auf ein fest aufgestelltes Leiterelement *Ds* wiederum zwei Fälle zu unterscheiden sein.

($\alpha$.)... Erster Fall: Der Ring steht still. Alsdann ist die von ihm in *Ds* inducirte Kraft gleich Null.

($\beta$.)... Zweiter Fall. Der Ring rotirt. Alsdann wird die von ihm in *Ds* inducirte Kraft einen Werth besitzen, der (bei geeigneter Aufstellung des Elementes *Ds*) von Null verschieden ist.

Wollte man nun annehmen, dass die Wirkungen des elektrischen Stromes von einer einzigen elektrischen Materie herrühren, die mit einer gewissen Geschwindigkeit in der Strombahn dahinfliesst, so würde aus dem ersten Falle folgen, dass diese Materie, bei constanter kreisförmiger Bewegung, in dem linearen

Leiter *Ds* keine elektromotorische Kraft erzeugt, und dass sie also auch im zweiten Fall, wo sie offenbar wiederum eine constante kreisförmige Bewegung nur von etwas anderer Winkelgeschwindigkeit, besitzt, eine elektromotorische Kraft zu induciren unfähig sei, — was dem Satze ($\beta$.) widerspricht. Somit folgt, dass jene Annahme, die Wirkung eines elektrischen Stroms rühre nur von einer einzigen Materie her, unzulässig ist; und man gelangt daher zu folgendem Resultat:

Ist überhaupt die Vorstellung richtig, dass die Wirkungen des elektrischen Stroms irgend welchen Materien zuzuschreiben sind, die mit irgend welchen Geschwindigkeiten in der Strombahn dahinfliessen, so sind, falls man einen offenbaren Conflict mit den Sätzen ($\alpha$.), ($\beta$.) vermeiden will, mindestens zwei solche Materien anzunehmen.*)

Hierbei bleibt dahingestellt, ob diese Materien beide beweglich sind, oder ob nur die eine derselben beweglich, die andere aber mit dem ponderablen Träger fest verbunden zu denken ist.

Nn.

---

E. Skiba. Theorie der strahlenden Elektricität.
Krak. Denkschr. V.

Ein Versuch, das Ampère'sche Gesetz aus zwei einfachen Annahmen über die strahlende Elektricität zu deduciren. Dn.

---

W. Weber. Bemerkungen zu Edlund's Erwiderung auf zwei gegen die unitarische Theorie der Elektricität gemachte Einwürfe. Pogg. Ann. CLVII. 146-150.

E. Edlund. Beantwortung der von W. Weber gemachten Bemerkungen, die unipolare Induction betreffend. Pogg. Ann. CLVII. 630-632.

*) Einwendungen gegen dies einfache Raisonnement dürften wohl nicht gut möglich sein. In der That scheinen sich auch die von E. Edlund erhobenen Bedenken nicht gegen das Raisonnement selber, sondern nur gegen die Zulässigkeit der zu Grunde gelegten Sätze ($\alpha$) und ($\beta$) zu richten.
Nn.

In Bd. VII. der F. d. M. 659-660 ist ein Einwurf besprochen, welchen C. Neumann aus der Thatsache der unipolaren Induction gegen die von Edlund ausführlich behandelte Annahme der Strömung nur eines Fluidums gezogen hat. Weber zeigt zunächst, dass die Edlund'sche Erwiderung auf einer falschen Deutung der von Plücker über diesen Gegenstand angestellten Versuche beruht. Edlund giebt dies zu, glaubt jedoch auch bei veränderter Auffassung dieser Versuche die unitarische Theorie durch dieselben nicht widerlegt. Ok.

---

G. Helm. Bemerkung zu einer Untersuchung des Herrn Edlund. Pogg. Ann. CLVII. 645-647.

Der Verfasser sieht durch die experimentelle Untersuchung Edlund's (F. d. M. VII. 660—661) die Thatsache noch nicht als erwiesen an, dass der Widerstand eines Leiters von seiner Bewegung abhängt. Ok.

---

R. Clausius. Ueber das Verhalten des elektrodynamischen Grundgesetzes zum Princip von der Erhaltung der Energie und über eine noch weitere Vereinfachung desselben. Niederrhein. Gesellsch. f. Natur- u. Heilk. 7. Febr. 1876, Pogg. Ann. CLVII. 489-494, Phil. Mag. 1876.

R. Clausius. Ueber die Ableitung eines neuen elektrodynamischen Grundgesetzes. Borchardt J. LXXXII. 85-131, C. R. LXXXII. 49-52, 546-547, Carl Rep. XII. 73-76, 153-157, Phil. Mag. 1876.

In den F. d. M. VII. 661 ist bereits auf die Veröffentlichung eines neuen, elektrodynamischen Grundgesetzes von Clausius hingewiesen worden. Dasselbe ist etwas weiter ausgeführt in der ersten der beiden citirten Abhandlungen. Seine volle und ausführliche Ableitung und Begründung erfährt dasselbe indess erst in der Abhandlung aus Borchardt's Journal, sodass wir dieselbe hauptsächlich unserem Referat zu Grunde legen.

§§ 1. 2. 3. In neuerer Zeit ist von verschiedenen Seiten die Annahme discutirt worden, dass der elektrische Strom nicht

aus der gleichzeitigen, entgegengesetzten Bewegung zweier Fluida besteht, sondern dass sich nur das eine Fluidum bewegt, das andere dagegen ruht. Von dieser Anschauung ausgehend, untersucht der Verfasser die Wirkungsgesetze zweier Elektricitätstheilchen auf einander, welche W. Weber und B. Riemann (Vorlesungen, bearbeitet von Hattendorff, 1876 cf. p. 620) aufgestellt haben. Dabei stellt sich heraus, dass ein constanter geschlossener elektrischer Strom nach diesen Gesetzen auf ein ruhendes Elektricitätstheilchen einen Bewegungsantrieb ausübt, d. h. also dass derselbe in einem ruhenden Leiter eine Scheidung der Elektricitäten durch Influenz hervorbringen müsste. So ist z. B. nach dem Weber'schen Gesetz die $x$-Componente der von einem geschlossenen Strom ausgeübten elektrostatischen Wirkung:

$$-\frac{4h'}{c^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\int\left(\frac{d\sqrt{r}}{ds'}\right)^2 . ds'.$$

Hier bedeutet $\frac{ds'}{dt}$ die constante Geschwindigkeit der einen bewegten Elektricität in dem constanten Strom, während die andere ruht.

Da bisher eine derartige Wirkung niemals beobachtet worden ist, so hält der Verfasser das Weber'sche und Riemann'sche Gesetz mit der Vorstellung, dass nur die eine Elektricität bewegt wird, für unvereinbar.

§§ 4. 5. Die Aufstellung eines Elementargesetzes für die Wirkung zweier Elektricitätstheilchen auf einander, welches auch bei der soeben besprochenen Annahme keinem Erfahrungssatz widerspricht, ist der eigentliche Zweck der Abhandlung.

Um einen Ausdruck von möglichst grosser Allgemeinheit zu gewinnen, nimmt der Verfasser in die Kraftcomponenten der Wirkung eines bewegten Theilchens $e$ auf ein anderes bewegtes Theilchen $e'$ zunächst ein Glied, welches von den relativen Coordinaten von $e$ und $e'$ abhängt, dann aber alle möglichen Ausdrücke, welche von den Differentialquotienten der Coordinaten des einen und des andern Theilchens abhängen. Hierbei geht er bis zu den Gliedern 2ter Ordnung. Die sich ergebenden Ausdrücke für die Componenten der Wirkung nach

den Axen sind noch sehr complicirt und enthalten eine grössere Zahl unbestimmter Functionen der Entfernung.

§§. 6—11. Zur Bestimmung dieser Functionen macht der Verfasser von einer Reihe von Sätzen Gebrauch, welche entweder sich direct ergeben haben aus Versuchen mit geschlossenen Strömen oder so sehr mit unsern gewöhnlichen Vorstellungen über die Elektricität in Einklang stehen, dass man sie unzweifelhaft solange wird gelten lassen, bis sie durch irgend einen Versuch direkt widerlegt werden.

Wir stellen diese Sätze im Folgenden zusammen:

1. Ein geschlossener, constanter Strom übt auf ein ruhendes Elektricitätstheilchen keine bewegende Kraft aus. (§ 6).

2. Eine ruhende Elektricitätsmenge übt auf einen ruhenden Leiter, welcher von einem constanten Strome durchflossen wird, ausser der gewöhnlichen Influenz, keine besondere Wirkung aus. (§ 7).

3. Die elektrodynamische Wirkung zweier constanter, geschlossener Ströme auf einander lässt sich in bekannter Weise aus ihrem Potential:

$$\mathfrak{K} \, . \, i \, . \, i' \, . \int\int \frac{\cos \varrho \, . \, ds \, ds'}{r}$$

berechnen.

4. Ein ruhender, constanter, geschlossener Strom verändert nicht die Intensität eines in einem andern Leiter fliessenden, ebenfalls ruhenden, constanten, geschlossenen Stromes. (§ 8).

5. Man erhält in einem Leiter $s$ dieselbe Inductionswirkung, wenn man:

entweder diesen Leiter aus unendlicher Entfernung bis in eine bestimmte Lage in der Nähe eines constanten geschlosse-Stromes $i'$ bringt,

oder, während beide Leiter ruhen, in dem zweiten die Stromstärke $i'$ entstehen lässt. (§ 9).

6. Die Wirkung der Elektricitätstheilchen auf einander muss dem Princip der Erhaltung der Energie gehorchen; d. h. der Ausdruck:

$$ee'\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}+X'\frac{dx'}{dt}+Y'\frac{dy'}{dt}+Z'\frac{dz'}{dt}\right)dt$$

muss ein vollständiges Differential sein.

§§ 12. 13. Mit Benutzung aller der Vereinfachungen, welche sich aus den angeführten Sätzen ergeben, erhält man für die $x$-Componente den Ausdruck:

$$(66)\qquad X=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left(1+\frac{k}{2}\,\frac{d^2(r^2)}{ds.ds'}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{ds'}{dt}\right)$$
$$-k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\,\frac{dx}{dt}\right)+\frac{d}{dx}\left[\frac{d^2R}{ds'^2}\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+\frac{dR}{ds'}\,\frac{d^2s'}{dt^2}\right].$$

Hierin ist noch $R$ eine unbestimmte Function der Entfernung, deren Bestimmung durch Behandlung der Wirkung geschlossener Ströme nicht möglich ist.

Die Componenten lassen sich ableiten aus dem Potential der beiden Theilchen auf einander. Dasselbe besteht aus dem elektrostatischen Potential, $U=\frac{ee'}{r}$, und dem elektrodynamischen Potential:

$$(68)\qquad V=-ee'\left(\frac{2r}{k}\,\frac{d^2(r^2)}{ds.ds'}+\frac{d^2R}{ds.ds'}\right)\frac{ds}{dt}\cdot\frac{ds'}{dt}.$$

Nimmt man für die unbestimmte Function $R$ den Ausdruck

$$R=k_1.r,$$

so erhält man:

$$(70)\qquad V=-ee'\cdot\left(\frac{k}{2r}\cdot\frac{d^2(r^2)}{ds.ds'}+k_1\frac{d^2r}{ds.ds'}\right)\frac{ds}{dt}\cdot\frac{ds'}{dt},$$

wo $k$ und $k_1$ zwei unbestimmte Constanten sind.

Wird über dieselben wieder die einfachste Annahme gemacht, so besteht dieselbe darin, $k_1=0$ zu setzen. Dann ist das Potential:

$$V=-ee'.\frac{k}{2}\,\frac{d^2(r^2)}{ds.ds'}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{ds'}{dt},$$

oder transformirt:

$$(74)\qquad V=\frac{k.ee'}{r}\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx'}{dt}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dy'}{dt}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dz'}{dt}\right)$$
$$=\frac{k.ee'}{r}\cdot v\cdot v'\cos\varepsilon.$$

Hier bedeuten $v$ und $v'$ die Geschwindigkeiten der Elektricitätstheilchen, $\varepsilon$ den Winkel derselben.

Für diesen einfachsten Fall erhält man die Componente der Wirkung von $e'$ auf $e$ in der Richtung der $x$-Axe:

$$(82) \qquad X_{,} = -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}(1 - k.v\, v'.\cos\varepsilon) - k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dx'}{dt}\right).$$

§ 14. Kurze Angabe der Wirkung zweier Stromelemente auf einander nach dem vereinfachten Clausius'schen Grundgesetz.

Ok.

---

R. Clausius. Ueber die Behandlung der zwischen linearen Strömen und Leitern stattfindenden ponderomotorischen und elektromotorischen Kräfte nach dem elektrodynamischen Grundgesetze. Verh. d. naturw. Vereins d. preuss. Rheinl. XXXIII. 1-23.

In dieser Abhandlung wird die Anwendung des Grundgesetzes auf die elektrodynamische Wirkung geschlossener Ströme ausführlich behandelt. Der Verfasser geht aus von der Gl. (82), (vgl. das vorhergehende Referat). Jener Ausdruck war so abgeleitet, dass er gilt, wenn das eine Fluidum strömt, während das andere ruht; er gilt aber auch, wenn beide Elektricitäten sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen. Indem der Verfasser diese allgemeinste Annahme macht und der positiven Elektricität die Geschwindigkeit $c$, der negativen die Geschwindigkeit $c_1$ in entgegengesetzter Richtung zuschreibt, erhält er für die $x$-Componente der ponderomotorischen Wirkung auf das Element $ds$:

$$k.h.ds\,ds'(c+c_1).i'.\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\Sigma\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx'}{ds'} - \frac{d\frac{1}{r}}{ds}\cdot\frac{dx'}{ds'}\right),$$

oder wenn endlich gesetzt wird:

$$h.(c+c_1) = i,$$

$$\xi = k.ii'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\cdot\Sigma\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx'}{ds'} - \frac{d\frac{1}{r}}{ds}\,\frac{dx'}{ds'}\right).$$

Hier bedeutet:

$$\Sigma \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dx'}{ds'} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dz'}{ds'} = \cos(s, s').$$

Die Ausdrücke für die andern Componenten sind leicht zu bilden. Bei weiterer Betrachtung ergiebt sich, dass die Resultante senkrecht auf $ds$ steht. Ist der Strom $s'$ geschlossen, so fällt die Componente ebenso aus, wie man sie nach dem Ampère'schen Gesetz erhalten würde.

Bei der weiteren Berechnung der elektromotorischen Kraft der Induction in dem Leiterelement $ds$, herrührend von dem Stromelement $ds'$, wenn beide bewegt werden und in $ds'$ die Stromstärke sich ändert, erhält man, wenn $ds'$ das Element eines geschlossenen Stromes ist, einen Ausdruck, welcher mit dem Inductionsgesetz von Fr. Neumann übereinstimmt. Sind beide Stromkreise geschlossen, so lässt sich die Arbeit aller in Betracht kommenden ponderomotorischen und elektromotorischen Kräfte auf die bekannte Form bringen:

$$dA = -d(ii'.w),$$

wo

$$w = k \iint \frac{\cos(ss')\, ds\, ds'}{r}.$$

Ok.

---

Ph. Gilbert. Sur certaines conséquences de la formule électrodynamique d'Ampère. Ann. soc. scient. Brux. I. B. 17-43

M. de Tilly, Delsaux. Rapports sur ce mémoire. Ann. soc. scient. Brux. I. A. 76-80, 80-81.

Die behandelten Probleme sind zweierlei Art: 1) Indem der Verfasser zwei geradlinige, parallele, endliche, unendlich kleine oder unbegrenzte Ströme betrachtet, bestimmt er die relativen Lagen dieser beiden Ströme, für welche die wechselseitige longitudinale oder normale Wirkung Null ist. Er gelangt unter anderen zu folgendem merkwürdigen Resultat: Auf einem und demselben geradlinigen nach beiden Seiten unbegrenzten Conductor stossen sich zwei resp. nach rechts und links unbegrenzte und nicht benach-

barte Theile des Stromes mit einer unendlichen Kraft ab. Herr de Tilly macht darauf aufmerksam, dass diese scheinbar paradoxe Folge das Ampère'sche Gesetz nicht entkräftet, weil man, um die totale Wirkung des Stroms im Conductor zu untersuchen, Rücksicht nehmen muss auf die Anziehungen des mittleren, zwischen den nicht benachbarten Theilen liegenden Theils des Stroms. Uebrigens muss, experimentell gesprochen, ein Strom immer geschlossen sein. Man kann also nicht schliessen, dass bei genügender Lage des Conductors dieser sich unterbrechen würde unter Einfluss der wechselseitigen Abstossungen seiner verschiedenen Theile. Wenn diese Unterbrechung für eine gewisse Länge des Stromes statt hat, würde sie übrigens auch für eine geringere stattfinden, indem man den Strom in dem Masse an Intensität wachsen liesse, wie man seine Länge vermindert. Herr Delsaux fügt hinzu, dass für eine gegebene Kette die unbegrenzte Verlängerung des Conductors die abstossende Wirkung der nicht benachbarten Theile gegen Null wachsen lässt. Damit sie also unendlich sei, muss auch die Kraft der Kette unendlich sein. 2) Herr Gilbert setzt dann einen Strom von gegebener Form voraus und bestimmt die Form eines zweiten Conductors so, dass ein beliebiger Theil desselben ohne normale oder longitudinale Wirkung auf den ersten sei. Er gelangt so zu dem speciellen Satze, den das Experiment würde controliren können: Ein geradliniger, in einer Richtung unbegrenzter Strom kann keine Rotation auf einen Theil des Kreisstromes hervorbringen, der den Anfang des Stromes zum Mittelpunkt hat und um diesen Mittelpunkt beweglich ist. Er schliesst, indem er mit Hülfe elliptischer Functionen die Intensität des bewegenden Paares bei der Rotation eines geradlinigen Stromes in einer horizontalen Ebene berechnet der unter dem Einfluss eines festen Kreisstromes in derselben Ebene steht. Mn. (O.)

---

H. Helmholtz. Versuche über die im ungeschlossenen Kreise durch Bewegung inducirten, elektromotorischen Kräfte. Pogg. Ann. CLVIII. 87-108.

F. Zöllner. Zur Widerlegung des elementaren Potentialgesetzes von Helmholtz durch elektrodynamische Versuche mit geschlossenen Strömen. Pogg. Ann. CLVIII. 106-121.

Bezugnehmend auf die letzte Mittheilung von Helmholtz (F. d. M. VII. 656—658), in welcher Letzterer die Zöllner'schen Versuche als nicht beweisend ansieht, sind dieselben in anderer und verbesserter Form angestellt, so dass aus denselben hervorgeht, dass bei den elektrodynamischen Rotationen die Triebkraft in der That ihren Sitz in dem Leiter und nicht in der Gleitstelle hat. Ok.

---

F. Zöllner. Zur Geschichte des Weber'schen Gesetzes. Pogg. Ann. CLVIII. 472-483; CLIX. 650-651.

Recapitulation der in den letzten Jahren gegen das Weber'sche Gesetz gemachten Einwürfe, sowie der Erwiderungen hierauf. Ok.

---

N. Schiller. Elektromagnetische Eigenschaften ungeschlossener elektrischer Ströme. Pogg. Ann. CLIX. 456-473, 537-553.

In Band VII. der Fortschritte p. 657 ist bereits auf die von Helmholtz erdachten Untersuchungen hingewiesen worden, welche eine Entscheidung zwischen den verschiedenen elektrodynamischen Untersuchungen zu liefern geeignet sind. Nachdem dort bereits kurz die anzustellenden Versuche beschrieben worden sind, kann nun ausführlicher über dieselben berichtet werden.

Ein kleiner Ringmagnet, welcher nach Aussen eine magnetische Wirkung nicht ausübt und ebenso wenig von geschlossenen Strömen oder Magneten eine Einwirkung erfährt, müsste nach dem Potentialgesetz von Helmholtz durch die Wirkung eines Stromendes abgelenkt werden. Als Stromende diente eine Spitze, aus welcher die Elektricität einer Holtz'schen Maschine in die Luft ausströmt. Gegen die elektrostatische Wirkung ist der Ring

durch ein Metallgehäuse geschützt. Die Grösse des zu erwartenden Drehungsmoments hat der Verfasser ausführlich berechnet. Er geht dazu aus von den Helmholtz'schen Formeln der Wirkung eines Stromendes auf einen geschlossenen Strom. Die Componenten derselben nach den Axen sind:

$$X = -ij\int \frac{1}{r}\frac{d\xi}{d\sigma}\cdot d\sigma;$$

$Y$ und $Z$ sind analoge Ausdrücke.

Hier ist $r$ die Entfernung des Stromendes vom Element $d\sigma$ des geschlossenen Stromes; $d\xi$ ist die Projection von $d\sigma$ auf die $x$-Axe. Die Rechnung wird so weiter geführt, dass zunächst die Wirkung auf einen geschlossenen Strom bestimmt wird, welcher eine sehr kleine Fläche umfliesst; sodann werden unendlich viele solcher Elementarströme zu einem ringförmigen Solenoid zusammengesetzt; endlich wird das Solenoid durch einen Ringmagnet ersetzt. Nachdem die Stärke des Magnetismus, die Directionskraft der bifilaren Aufhängung und die Stärke des Stromes der Holz'schen Maschine in vergleichbaren Massen festgestellt waren, ergab sich, dass eine Ablenkung des Ringes, welcher mit einem Spiegel versehen war, von 22 Skalentheilen erfolgen müsste. Bei Ausführung des Versuches konnte indess eine solche Ablenkung nicht beobachtet werden.

Hiernach ist also das Potentialgesetz in seiner ursprünglichen Form durch den Versuch widerlegt (vergl. F. d. M. VII. 657).

Es blieb noch die Entscheidung zwischen der Einwirkung nach dem Ampère'schen Gesetz oder einer Veränderung des Potentialgesetzes, welche Helmholtz in Aussicht gestellt hat, und welche in der Annahme bestehen soll, dass es ungeschlossene Ströme nicht giebt, sondern dass die fehlende elektrische Strömung zwischen zwei Stromenden durch eine diëlektrische Vertheilung ersetzt wird.

Hierüber hat der Verfasser durch die folgenden Versuche Aufschluss zu geben gesucht. An einer Axe ist ein kreisförmiger Condensator befestigt, welcher in schnelle Rotation versetzt werden kann. Die Axe befindet sich in zwei concentrischen, stark magnetischen Eisenhohlcylindern. Der Verfasser zeigt nun durch

eine ausführliche Rechnung, dass nach dem Ampère'schen Gesetz auf den Belegungen des Condensators freie Elektricität auftreten muss, welche in Form eines continuirlichen Stromes beobachtet werden kann, wenn man bei gleichförmiger Drehung die Condensatorplatten metallisch verbindet und in diese Leitung ein Galvanometer einschaltet. Die Rechnung führt in ihrem Resultat auf elliptische Integrale. Bei Berücksichtigung der Dimensionen der Apparate etc. würden die beiden Condensatorplatten eine Potentialdifferenz von:

0,001714 Daniell

zeigen müssen. Eine solche Differenz wurde in Wirklichkeit nicht beobachtet. Hieraus schliesst der Verfasser, dass also auch das Ampère'sche Gesetz nicht der wahre Ausdruck der Thatsachen ist. Ok.

---

E. Edlund. Ueber den Zusammenhang der galvanischen Induction mit den elektrodynamischen Erscheinungen. Pogg. Ann. CLVII. 102-115.

Der Verfasser geht von der Thatsache aus, dass wenn zwei Stromleitungen *A* und *B* einander genähert oder von einander entfernt werden, in Folge der gegenseitigen elektrodynamischen Einwirkung eine positive oder negative Arbeit geleistet wird. Als Aequivalent dafür muss sich eine entsprechende Wärmeerzeugung oder ein Wärmeverbrauch angeben lassen. Zwischen beiden Grössen lässt sich nach dem ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie eine Gleichung aufstellen. Die in Frage kommende Wärme kann nur durch den elektrischen Strom oder richtiger, durch die Veränderung der Stärke desselben hervorgebracht werden. Aus diesen Betrachtungen folgt eine Gleichung für diese Stromänderung, resp. den neu entstehenden Strom, wenn in der einen Leitung der ursprüngliche Strom Null war, welche schliesslich auf das Inductionsgesetz führt, welches F. Neumann aus dem empirischen Satze von Lenz abgeleitet hat. Doch sind dann Inductionsströme höherer Ordnung vernachlässigt. Ok.

---

Th. Wand. Beiträge zur Elektrodynamik. Pogg. Ann. CLIX. 94-117.

Der grössere Theil dieser Abhandlung ist eine Wiederholung der früher (F. d. M. VI. 690—691) besprochenen Arbeit desselben Verfassers. Wir glauben auch diesmal von einer eingehenderen Discussion des von dem Verfasser aufgestellten, elektrodynamischen Gesetzes absehen zu dürfen, da dasselbe weder klar entwickelt, noch präcis ausgedrückt ist. Auch die an verschiedenen Orten geübte Kritik gegen die bisher aufgestellten Gesetze von W. Weber, Helmholtz und Clausius weicht zu sehr von der gewöhnlichen Behandlungsweise ab, als dass wir uns ausführlicher mit derselben beschäftigen sollten. Ok.

---

Th. Wand. Fortpflanzung der Elektricität in Cylinder-Leitern. Carl Rep. XII. 469-516.

---

C. Neumann. Der stationäre elektrische Strömungszustand in einer gekrümmten leitenden Fläche. Clebsch Ann. X. 569-572.

Bezeichnet $F$ eine gekrümmte Fläche von beliebiger Beschaffenheit (also eine Fläche, die nach Belieben entweder geschlossen oder von irgend welchen Randcurven begrenzt ist), und bezeichnet ferner $\Phi$ irgend eine andere Fläche, die aus $F$ mittelst conformer Abbildung entstanden ist, so sind die Probleme der elektrischen Strömung, wie der Verfasser zeigt, für diese Flächen $F$ und $\Phi$ unter einander identisch, der Art, dass die Lösung des einen Problems sofort auch diejenige des andern nach sich zieht.

Nimmt man nämlich an, dass die Einströmungspunkte der beiden Flächen correspondirende Punkte seien, und die Ausströmungspunkte ebenfalls, und bezeichnet man mit $V$ die sogenannte Spannung (d. i. den Werth des elektrischen Potentials) für den Strömungszustand der Fläche $F$, so wird diese Function $V$, versetzt nach den correspondirenden Punkten von $\Phi$, zugleich

auch die Spannung für den Strömungszustand der Fläche *Φ* darstellen. Dabei sind unter correspondirenden Punkten der beiden Flächen solche zu verstehen, welche bei der conformen Abbildung in einander übergehen.

Der Verfasser beweist diesen (von ihm bereits im Jahre 1863 gefundenen) Satz fast ohne alle Rechnung, indem er zeigt, dass derselbe eine unmittelbare Consequenz des Umstandes ist, dass zwei auf *F* und *Φ* von correspondirenden Punkten gebildete unendlich kleine Dreiecke einander ähnlich sind. Nn.

---

Rayleigh. On the approximate solution of certain problems relating to the potential. Proc. L M. S. VII. 70-75.

Der Verfasser behandelt zunächst die stationäre elektrische Strömung in einer ebenen Platte von constanter verschwindender Dicke, falls die Strömung symmetrisch zur $x$-Axe stattfindet. Dann müssen auch die Grenzcurven zur $x$-Axe symmetrisch sein; und von diesen Grenzcurven wird angenommen, dass sie überall nur eine geringe Neigung gegen die $x$-Axe haben. Ist $\varphi$ das Potential, $\psi$ die Strömungsfunction, so ist bekanntlich

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Für den vorliegenden Fall werden nun für $\varphi$ und $\psi$ folgende Reihenentwickelungen genommen:

$$\varphi = \int f dx - \frac{y^2}{1.2} f' + \frac{y^4}{1.2.3.4} f''' - \text{etc.}$$

$$\psi = y \cdot f - \frac{y^3}{1.2.3} f'' + \text{etc.}$$

Die noch unbestimmte Function $f$ von $x$ wird durch die Bedingung bestimmt, dass $\psi$ für $y = \pm y_1$ den gegebenen Werth $\pm\psi_1$ annimmt, falls $y_1$ die Ordinate der Grenzcurve, also eine gegebene Function von $x$ ist, die nur sehr wenig mit $x$ variirt. Durch Umkehrung der Reihe, die sich aus dieser Bedingung ergiebt, wird ein angenäherter Werth von $f$ abgeleitet, daraus der Widerstand der Platte bestimmt, etc.

Aehnliche Formeln werden dann für die Strömung der Elektricität in einem Körper von drei Dimensionen aufgestellt, falls die Strömung symmetrisch um eine Axe stattfindet. Die zu Grunde liegenden Gleichungen sind hier nur

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Wn.

---

E. Riecke. Ueber die Bewegung der Elektricität in körperlichen Leitern, insbesondere in einer leitenden Kugel. Gött. Nachr. 1876. 224-236.

Die vorliegende Mittheilung ist nur ein kurzer Auszug einer später ausführlich zu veröffentlichenden Abhandlung. Der Verfasser legt die allgemeineren Bewegungsgesetze zu Grunde, welche von Helmholtz aufgestellt worden sind, und wendet dieselben an auf die Bewegung der Elektricität in einer Kugel, indem er dabei der von Lorberg angegebenen Methode (Borchardt Journal LXXI.) der Auflösung der vorkommenden partiellen Differentialgleichungen sich bedient.

In dem ersten Abschnitt werden die allgemeinen Bewegungsgleichungen dadurch gelöst, dass die auftretenden Functionen in Reihen nach Kugelfunctionen entwickelt werden.

In dem zweiten Abschnitt behandelt der Verfasser diejenigen Elektricitätsbewegungen, welche durch die Schwingung eines Magnets in der leitenden Kugel hervorgerufen werden.

Ueber die Lage des Magnetmittelpunktes werden vier Annahmen gemacht und die denselben entsprechenden dämpfenden Wirkungen der Kugel angegeben. Ok.

---

E. Riecke. Zur Theorie der unipolaren Induction und der Plücker'schen Versuche. Gött. Nachr. 1876. 332-352.

I. Induction eines bewegten Magnetpols auf einen ruhenden linearen Leiter.

Von den allgemeinen Ausdrücken der Wirkung eines be-

wegten Magnetpols auf ein lineares Leiterelement ausgehend, leitet der Verfasser durch Transformation derselben zunächst den bekannten Satz ab, dass die inducirte elektromotorische Kraft in dem Leiter von der Differenz der Potentialwerthe des Pols in Bezug auf den Leiter abhängt. Mit Hilfe einer anderen Transformation untersucht derselbe den Fall, wo magnetische Molecüle gleichmässig auf einer Kreisperipherie angeordnet sind und dieser Kreis um eine Axe rotirt senkrecht zu seiner Ebene. Auch in diesem Fall lässt sich die Wirkung reduciren auf die Differenzen der Werthe eines Potentials in Bezug auf die Endpunkte des Leiters.

II. Induction eines ruhenden Magnetpols auf einen rotirenden Leiter.

Der Verfasser geht auch hier von den allgemeinen Formeln aus und nimmt für die Bewegung des Leiters eine Rotationsbewegung an. Die Formeln für die inducirten elektromotorischen Kräfte fallen besonders einfach aus, wenn der inducirende Pol auf der Rotationsaxe gelegen ist.

In III. und IV. folgen Anwendungen der allgemeinen Formeln auf die Plücker'schen und Weber'schen Versuche über diesen Gegenstand. Besonders zeigt der Verfasser, in welcher Weise sich die Ergebnisse seiner Rechnung von der gewöhnlichen Theorie der unipolaren Induction unterscheiden.

Ok.

---

Abria. Théorie élémentaire du potentiel électrique. Mém. d. Bord. (2) I. 413-441.

Der Verfasser schlägt vor, den Begriff des Potentials in den Elementarunterricht der Physik einzuführen. Da keine der eigentlichen Definitionen des elektrostatischen Potentials ohne eingehendere Kenntniss der höheren Mathematik verstanden werden kann, so soll Potential eines elektrisch geladenen Körpers einfach die beobachtete Ladung an einer Coulomb'schen Drehwage oder an einem neueren Elektrometer genannt werden, welche man erhält, wenn man den betreffenden Körper durch einen

dünnen Draht mit dem Messapparat in Verbindung setzt. Durch diese Definition wird der Begriff des Potentials in mancher Beziehung analog demjenigen der Temperatur für die Wärme. Der Verfasser zeigt dann, wie man durch elementare Rechnungen die Potentiale von Kugeln und Kugelcondensatoren berechnen und die Resultate der Rechnung durch einfache Versuche verificiren kann. Der Vorschlag des Verfassers verdient wohl um so mehr Beachtung, als es mit Hilfe des Potentialbegriffs leicht ist, auch das Ohm'sche Gesetz, sowie die Kirchhoff'schen Sätze elementar abzuleiten, worauf derselbe hier allerdings nicht eingegangen ist.

Ok.

---

H. ARON. Zur Theorie der Condensatoren. Pogg. Ann. CLIX. 587-601.

Wird ein Condensator abwechselnd durch eine starke galvanische Batterie geladen und dann durch ein Galvanometer hindurch entladen, so wird letzteres bei schnellem Wechsel dauernd abgelenkt. Die Grösse der Ablenkung hängt nach den Untersuchungen von Siemens über diesen Gegenstand (Pogg. Ann. CII.) nicht ab von eingeschalteten Widerständen. Doch ist von vornherein zu übersehen, dass bei genügender Steigerung des Widerstandes derselbe einen Einfluss ausüben muss. Mit dieser Frage hat sich der Verfasser beschäftigt. Er stellt zunächst die Differentialgleichung für die Bewegung der Elektricität auf und discutirt die Lösungen derselben. Bei genügend grosser Zahl der Entladungen nähert sich der Ausdruck für die Stärke des Entladungsstromes bei sehr grossen Widerständen dem Werthe:

$$J = \tfrac{1}{2} n.C.E.\left(1 - e^{-\frac{2t}{W.C}}\right).$$

Hier bedeutet $C$ die Capacität des Condensators, $E$ die elektromotorische Kraft der Batterie, $W$ den Widerstand, $t$ die Zeit einer Entladung, $n$ die Anzahl derselben in der Secunde.

Die Versuche bestätigen die Ergebnisse der Theorie.

Ok.

---

E. Root. Zur Kenntniss der diëlektrischen Polarisation. Pogg. Ann. CLVIII. 1-34, 425-461.

Die Theorie der diëlektrischen Polarisation, in ihren Grundgedanken von Faraday herrührend, hat bekanntlich in neuerer Zeit eine mathematische Bearbeitung durch Maxwell erfahren und ist durch denselben in nahe Beziehung zur Theorie der Lichtschwingungen gesetzt worden. Aus derselben folgt, dass die „diëlektrische Permeabilität“ dem Quadrat des Brechungsexponenten des Lichtes gleich sein muss. Der Verfasser prüft diesen Schluss an doppeltbrechenden Krystallen, indem er dieselben in der Form eines Ellipsoids oder einer Kugel und unter dem Einfluss zweier paralleler Platten, welche mit entgegengesetzten Elektricitäten constant geladen sind, Schwingungen ausführen lässt, deren Dauer bestimmt wird.

Auf Grund der Maxwell'schen Theorie ist es hierzu nöthig, die Einwirkung der Platten auf das Ellipsoid zu berechnen, und geschieht dies mit Hilfe der von W. Thomson angegebenen Methode der elektrischen Bilder. Als Resultat der Untersuchung ergiebt sich eine nicht unerhebliche Abweichung von Theorie und Erfahrung, welche der Verfasser dadurch zu erklären sucht, dass ausser den Polarisationserscheinungen eine Leitung im Innern stattfindet. Ok.

---

H. Herwig. Ueber den Durchgang starker Inductionsströme durch Flüssigkeiten. Pogg. Ann. CLIX. 61-93.

Wird aus den Ausschlägen eines Galvanometers durch Inductionsströme der specifische Widerstand einer eingeschalteten Flüssigkeit berechnet, so erhält man je nach der Stärke der Ströme und der Länge der Flüssigkeitsschicht sehr verschiedene Werthe. Zur Erklärung dieser Erscheinung folgt der Verfasser der neueren Annahme, dass die Flüssigkeit wirkt wie ein Condensator von grosser Capacität mit leitender Zwischenschicht. Die Lösung des Problems würde durch Integration der drei simultanen Differentialgleichungen:

$$wi = -P_1 \frac{di}{dt} - P_2 \frac{dJ}{dt} - Q,$$

$$W.J. = E - P_1 \frac{dJ}{dt} - P_2 \frac{di}{dt},$$

$$i - \frac{Q}{v} = c \frac{dQ}{dt},$$

ermöglicht, wo $i, J, Q$ die drei von $t$ abhängenden Variabeln sind.

Ok.

---

R. Colley. Experimentelle Untersuchung eines Falles der Arbeitsleistung des galvanischen Stromes. Pogg. Ann. CLVII. 370-411, 624-630.

Bei einem galvanischen Strome ist die Quelle der Energie der chemische Process in der Batterie. Dieselbe wird entweder vollständig in Wärme im Schliessungskreise verwandelt oder es wird ausserdem noch in oder ausserhalb desselben eine gewisse Arbeit geleistet. Der Verfasser beweist zunächst den Satz, dass in dem letzteren Falle stets eine elektromotorische Gegenkraft in dem Schliessungskreise auftreten muss. Eine solche Arbeit wird z. B. geleistet, wenn ein Metallsalz elektrolytisch zerlegt wird zwischen zwei Elektroden von dem gleichen Metall, von denen die eine in einer gewissen Höhe vertical über der anderen liegt. Es wird dabei bei der einen Richtung des Stromes eine gewisse Menge Metall auf die betreffende Höhe gehoben. Der Verfasser berechnet die Grösse der elektromotorischen Gegenkraft und weist ihr Vorhandensein experimentell nach.

Ok.

---

F. Kohlrausch. Ueber die von W. Weber und R. Kohlrausch gegebene Zurückführung der elektrischen Strommessungen auf mechanisches Mass. Pogg. Ann. CLVII. 641-645.

Die Einheit der Stromstärke in absolutem magnetischen Mass ist durch die genannten Physiker gefunden:

$$= 15{,}537 . 10^{10} \frac{Mm}{Sec}$$

in mechanischem Mass. Hierbei wird ein Doppelstrom angenommen. Dieselbe Grösse ist also bei der Annahme eines einfachen Stromes:

$$31{,}07 \,.\, 10^{10}.$$

Neuere Untersuchungen englischer Physiker haben hierfür ergeben:

$$28{,}8 \text{ bis } 29{,}3.$$

Der Verfasser bespricht die Gründe für die Abweichungen dieser Beobachtungen. Ok.

---

H. Weber. Zur Theorie der Galvanometer. Pogg. Ann. CLVII. 555-579.

Die Grundsätze der Berechnung der vortheilhaftesten Construction von Galvanometern, über welche schon früher (F. d. M. VII. 669) berichtet worden ist, werden hier auf die gebräuchlichsten Formen dieser Instrumente angewandt, insbesondere auf das Wiedemann'sche Galvanometer und die Tangentenboussole.

Ok.

---

E. Külp. Ein experimentelles Verfahren, den Leitungswiderstand in Elementen und in Tangentenboussolen zu bestimmen. Grunert Arch. LVIII. 444-448.

E. Külp. Ein Beitrag zur Messung der elektromotorischen Kräfte von Stromquellen. Ueber das Verhältniss der Stromstärken einer Kette zu einem einzigen Element. Ueber die Bestimmung des Leitungswiderstandes der Metalle. Zur Theorie des Maximums der Stromstärke. Grunert Arch. LIX. 106-112.

Es ist uns unmöglich gewesen zu verstehen, warum der Verfasser die in jedem elementaren Lehrbuch der Physik auseinandergesetzten, bekannten galvanischen Messungsmethoden reproducirt hat. Wenn er indessen eine derselben mit dem Namen „der Dämpfungsmethode“ belegt, so müssen wir dagegen ernstlich protestiren, weil diese Bezeichnung jetzt schon häufig

für die schöne von W. Weber zuerst angegebene Methode der Widerstandsmessung benutzt wird, von der hier natürlich nicht die Rede ist. Ok.

---

J. OBERMANN. Simultane Schwingungen zweier Magnete. Grunert Arch. LX. 1-12

Zwei Magnete, deren Mittelpunkte in geringer Entfernung auf demselben magnetischen Meridian liegen, beeinflussen sich gegenseitig bei ihren Schwingungen. Die allgemeinen Differentialgleichungen der Schwingungsbewegungen sind sehr complicirt; sie nehmen aber bei sehr kleinen Schwingungen die einfache Form an:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + a\varphi + b\varphi' = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2} + a'\varphi' + b'.\varphi = 0.$$

Setzt man:

$$p = \frac{a+a'}{2}, \quad q = \sqrt{\frac{a+a'}{2} - (aa' - bb')}$$

$$\lambda = \sqrt{p-q}, \quad \varkappa = \sqrt{p+q},$$

so kann man die Lösungen auf die einfache Form bringen:

$$\varphi = C.\cos\lambda t + D.\cos\varkappa t$$

$$\varphi' = C'.\cos\lambda t + D'.\cos\varkappa t.$$

Diese Lösungen werden von dem Verfasser weiter discutirt, die resultirenden Schwingungsbewegungen graphisch dargestellt und endlich für zwei bemerkenswerthe Fälle Zahlenbeispiele berechnet, nämlich für den Fall, wo die beiden Magnete ganz gleich sind, und zweitens, wo das magnetische Moment des einen Magnets dasjenige des andern bedeutend übertrifft. Ok.

---

O. CHWOLSON. Ueber den Mechanismus der magnetischen Induction. Pogg. Ann. Suppl. VII. 535-605.

Die Abhandlung ist eine Fortsetzung der früher (F. d. M. VII. 674—675) besprochenen Arbeit und sucht die Erscheinungen der temporären und permanenten Magnetisirung der Stahlstäbe

zu erklären. Nachdem der Verfasser im Capitel I. die neueren Arbeiten Jamin's und im Capitel II. eigene experimentelle Untersuchungen über diesen Gegenstand besprochen hat, wendet er im Capitel III. die früher in ihren Grundzügen auseinandergesetzte Theorie auf die Magnetisirung der Stahlstäbe an. Mit Hilfe einer Reihe von Hypothesen über den Zustand der Theilchen bei einer mehr oder weniger grossen Drehung gelingt es ihm eine Anschauung des Vorganges zu geben und besonders einige der complicirten von Wiedemann entdeckten Erscheinungen zu erklären, welche eintreten, wenn man auf einen Stahlstab nacheinander Ströme von verschiedener Stärke und entgegengesetzter Richtung wirken lässt. Ok.

---

J. Jamin. Sur la constitution des aimants. C. R. LXXXII. 19-24.

J. Jamin. Solution analytique du problème de la distribution dans un aimant. C. R. LXXXII. 783-788.

In der ersten Abhandlung untersucht der Verfasser die magnetische Vertheilung in langen und breiten, aber verhältnissmässig dünnen Stahllamellen. Er bestimmt jedesmal die Stärke des Magnetismus, nachdem er die Lamelle in Königswasser gelegt und in dieser Weise die Dicke langsam vermindert hat. Er findet hierbei, dass für die magnetische Vertheilung die Formel gilt:

$$y = A.\{k^{-(\varepsilon-x)} + k^{-(\varepsilon+x)}\},$$

wo $2\varepsilon$ die ursprüngliche Dicke bedeutet, $x$ aber die Entfernung des betreffenden Punktes von der Mittelebene der Lamelle. Die beobachteten Magnetismen $M$ bei der verminderten Dicke $2e$ ergeben sich dann durch die Formel:

$$M = \int_{-e}^{+e} y.dx.$$

Anders gestalten sich die Magnetismen, wenn, wie in dem zweiten Theile der Arbeit, der Stab jedesmal nach der Verminderung der Dicke von Neuem magnetisirt worden ist. Auch hier schliessen sich ähnliche, einfache Rechnungen an. In der zweiten Abhand-

lung sucht der Verfasser eine Formel theoretisch zu begründen, welche er bei früheren Untersuchungen (F. d. M. VII. 673) für die magnetische Vertheilung in einem Bündel rechteckiger Stahllamellen gefunden hat. Dieselbe lautet:

$$y = A\cdot k\cdot \sqrt{\frac{s}{p}}\left(1-e^{-k\sqrt{\frac{p}{s}}2l}\right)\left(e^{-k\sqrt{\frac{p}{s}}x}-e^{-k\sqrt{\frac{p}{s}}(2l-x)}\right).$$

$s$, $p$, $2l$ bedeuten den Querschnitt, den Umfang desselben und die Länge des Bündels.

Für die Ableitung dieser Formel macht der Verfasser die Annahme, dass sich auf das Fortschreiten der magnetischen Vertheilung von Querschnitt zu Querschnitt dieselben Grundsätze anwenden lassen, wie auf die Wärmeleitung. Doch stimmt die aufgestellte Differentialgleichung nur dann mit den Formeln der stationären Wärmeströmung überein, wenn man bei derselben einen Wärmeverlust an der Oberfläche voraussetzt.

Das Resultat ist eine einfache Exponentialformel. Für einen Stab von endlicher Länge muss dann noch eine Art von Reflexion an der entgegengesetzten Endfläche vorausgesetzt werden, und dann erhält man endlich die gewünschte Formel. Dieselbe wird noch berechnet für den Fall, dass man es mit einem cylindrischen Stab zu thun hat. Ok.

---

E. Bouty. Sur la théorie du contact d'épreuve.
C. R. LXXXII. 836-839.

Für einen unendlich langen cylindrischen Stab vom Radius $r$ geht die in dem vorigen Referat erwähnte Formel von Jamin über in:

$$y = \frac{A.B}{2}\cdot\sqrt{r}.e^{-\frac{B}{\sqrt{r}}x}.$$

Jamin hatte diese Formel für die magnetische „Spannung (tension)“ $y$ dadurch geprüft, dass er die Kraft gemessen hatte, welche nöthig war, um einen kleinen Eisencylinder von verschiedenen Stellen des Magnets abzureissen. Eine etwas andere Formel hat Biot aus Versuchen von Coulomb über die Veränderung der magnetischen Momente der Querschnitte hergeleitet.

Um die Differenzen beider Formeln zu erklären, sucht der Verfasser die Methode Jamin's theoretisch etwas weiter zu begründen, indem er dabei die in dem vorigen Referat besprochene Analogie von Wärmeleitung und Magnetismus auf diesen besonderen Fall anwendet. Ok.

---

R. BLONDLOT. Sur certains points remarquables des aimants. C. R LXXXII. 454-455.

Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass es in der Nähe der beiden Enden eines parallelepipedischen Magnetstabes je fünf Punkte giebt, in welchen eine sehr kleine, um ihren Schwerpunkt frei drehbare Magnetnadel senkrecht gegen die zugekehrte Fläche des Magnets gerichtet wird.

Ok.

---

E. BOUTY. Sur la distribution du magnétisme dans les barreaux cylindriques. C. R. LXXXII. 1050-1053.

E. BOUTY. Études sur le magnétisme. Ann. de l'Éc. Norm. (2) V. 123-154.

Experimentelle Untersuchungen über die temporären und permanenten Momente von Stahlstäben, welche in Folge der gänzlichen Unkenntniss der entsprechenden Literatur seitens des Verfassers wenig Neues enthalten. Ok.

---

VAN DER WILLIGEN. De la force portative des aimants en fer à cheval. C. R. LXXXII. 1017-1020.

Bei Gelegenheit der Besprechung einer Methode, starke Hufeisenmagnete herzustellen, giebt der Verfasser einige empirische Formeln für die Tragkraft derselben. Ok.

---

E. DUTER. De la distribution du magnétisme libre. Ann. d. l'Éc. Norm. (2) V. 217-244, Almeida J. V. 65-67.

Ueber die bereits nach einem Auszug kurz besprochene Arbeit (F. d. M. VII. 674) kann jetzt etwas ausführlicher berichtet werden. Der Verfasser findet, dass auf einer kreisförmigen oder elliptischen Platte die untersuchte magnetische Spannung zunächst in der magnetischen Axe durch die Gleichung wiedergegeben wird:

$$J = A.\{a^x - a^{-x}\},$$

wo $x$ die Entfernung vom Mittelpunkt der Ellipse bedeutet. Ferner kann man sich Hyperbeln construirt denken, deren Axen die magnetische Axe und die neutrale Linie sind. Wird an verschiedenen Punkten einer solchen Hyperbel die magnetische Spannung bestimmt, so ergiebt sich:

$$J = A(a^h - a^{-h}).$$

Hier ist als Variable $h$ das Stück des Hyperbelbogens genommen von der neutralen Linie bis zu dem betrachteten Punkt. Die isodynamischen Curven oder Curven gleicher magnetischer Spannung werden durch die Gleichung dargestellt:

$$\frac{x^2}{r^2+b^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1.$$

Hier ist $x$ die Abscisse des betreffenden Punktes, d. h. seine senkrechte Entfernung von der magnetischen Axe; $h$ dagegen seine Entfernung von der neutralen Linie auf dem Hyperbelbogen gerechnet. Die Gleichung der Curven ist transcendent. Ihre Form hat indess einige Aehnlichkeit mit Ellipsen.

Ok.

---

Ch. Ruths. Magnetismus weicher Eisencylinder.
Carl Rep. XII. 466-468.

---

## Capitel 4.
## Wärmelehre.

G. A. Hirn. Théorie mécanique de la chaleur. T. II. Paris. Gauthier-Villars.

---

R. Rühlmann. Handbuch der mechanischen Wärmetheorie, nach Verdet's Théorie mécanique de la chaleur bearbeitet. Braunschweig. Vieweg. (Rec. siehe Hoffmann Z. VII. 399-400.)

Dem Bericht zufolge umfasst das vorliegende Werk mit Sach- und Fachkenntniss das ganze Gebiet der Thermodynamik nach allen Seiten hin und hat dem fühlbaren Bedürfniss nach einem solchen volle Rechnung getragen. Die wichtigsten Arbeiten auf diesem Felde sind in dankenswerthester Weise berücksichtigt und überall die besten Quellen angeführt worden. Das Verdet'sche Buch ist zu Grunde gelegt, und zwei Vorlesungen von Verdet bilden die Einleitung, doch geht der Verfasser mit Erweiterung von dessen System nach eigenem Plane zu Werke. Studirende werden nach einem tüchtigen Cursus über höhere Mathematik das Werk mit Nutzen anwenden können. H.

---

J. Sand. Die mechanische Wärmetheorie in ihrem Zusammenhange mit den Grundprincipien der neueren Physik. Pr. Eichstätt.

Ein sehr gelungener Versuch, die Resultate der modernen Thermodynamik einem grösseren Publikum zugänglich zu machen. Der Verfasser giebt zunächst die erforderlichen mechanischen Erläuterungen, wobei er sehr sorgfältig Begriff und Eigenthümlichkeit des Newton'schen und Cartesianischen Kräftemasses auseinandersetzt, wendet sich dann zum Princip der Kraftconstanz, soweit dasselbe bereits früher erkannt war und erklärt dann

ebenso die thatsächlichen Fundamentalwahrheiten der Wärmelehre mit besonderer Berücksichtigung der Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac. Hierauf zur mechanischen Theorie selbst sich wendend liefert er eine historische Einleitung, die von den Gelegenheitsäusserungen eines Baco, Locke, Newton, Stahl, De Luc ausgeht; sehr eingehend werden Rumford's Versuche besprochen, und auch Davy findet die gebührende Würdigung. Ausführlicher noch wird natürlich Mayer's und der ursprünglich physiologischen Beweggründe gedacht, welche ihn bei Conception seiner reformatorischen Idee leiteten, sowie der Experimente von Joule. Hieran schliesst sich die Skizzirung der Bewegungstheorien, wie sie von Redtenbacher, Kroenig und Clausius aufgestellt worden sind, ferner eine übersichtliche Erläuterung der von dem letztgenannten Physiker eingeführten Terminologie, die zur Formulirung des „ersten Hauptsatzes" verwandt wird. Die „Bestimmung der inneren und äusseren Arbeit" führt zum Wesen des Kreisprocesses und zum Carnot'schen Satz, dessen Umwandlung in den „zweiten Hauptsatz" gezeigt wird. Ein Schlusswort beschäftigt sich mit den bekannten Schlüssen Thomson's über die sogenannte Entropie des Weltalls.

Höhere Rechnung ist durchaus vermieden, die Beweisführung klar und verständlich. Die S. 29 gegebene Definition der permanenten Gase ist mangelhaft. Gr.

---

G. Berthold. Zur Geschichte des Princips der Erhaltung der Kraft. Pogg. Ann. CLVII. 342-352, Berl. Monatsber. 1875.

Auf Grund sehr eingehender, historischer Forschungen zeigt der Verfasser, dass der allgemeine Grundgedanke des genannten Princips schon von vielen Forschern früherer Jahrhunderte ausgesprochen worden ist. Insbesondere sind hier zu nennen: Epikur, Descartes, Leibniz, Hooke, Daniel Bernoulli, Diderot, H. Davy. Dagegen weist er entschieden die neueren Versuche der Engländer zurück, die Entdeckung dieses Princips für Newton in Anspruch zu nehmen. Ok.

---

G. van der Mensbrugghe. Application de la thermodynamique à l'étude des variations d'énergie potentielle des surfaces liquides. Conséquences diverses. Bull. de Belg. (2) XLI. 769-783, XLII. 24-34.

G. van der Mensbrugghe. Quelques mots sur la relation entre les perturbations météorologiques et les variations magnétiques. Bull. de Belg. (2) XLII. 755-758.

W. Spring. Étude des phénomènes capillaires. Bull. de Belg. (2) XLI. 912-918.

W. Spring. Sur le développement de l'électricité statique. Bull. de Belg. (2) XLI. 1024-1071.

F. Folie et Montigny. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XLI. 939-952.

W. Spring. Sur l'écoulement du mercure par les tubes capillaires et les phénomènes électriques qui l'accompagnent. Bull. de Belg. (2) XLII. 330-370.

F. Folie et Montigny. Rapport sur ce mémoire. Bull. de Belg. (2) XLII. 243-251.

Diese verschiedenen Arbeiten beschäftigen sich alle mit Relationen zwischen der Theorie der Capillarität, der Thermodynamik und der Theorie der Elektricität. Die von Herrn Spring sind rein experimenteller Natur. Die Titel werden hier nur angeführt wegen der mannigfachen Berührungspunkte mit den Untersuchungen des Herrn van der Mensbrugghe. Letztere gehören gleichzeitig zur experimentellen wie zur mathematischen Physik und enthalten in freilich noch nicht definitiver Form neue Gedanken über die Thermodynamik der Flüssigkeiten und sogar der festen Körper.

$m$ sei eine flüssige Masse mit der absoluten Temperatur $T$. $S$ sei die freie Oberfläche, $J$ die potentielle Energie der Oberfläche, die einzige, die man als existirend voraussetzt. Man stelle sich ferner vor, dass der Zustand der Flüssigkeit durch $S$ und $T$ bestimmt sei. Den zweiten Satz kann man in der Form

$$dQ = td\mu = T(XdS + YSdT)$$

schreiben. $X$ und $Y$ sind unabhängig von $S$. Wenn $dS$ durch die äussere Arbeit $JdS$ hervorgebracht wird, so wird die totale Energie gegeben durch die Relation

$$AdU = T(XdS + YSdT) - ATdS,$$

wo $A$ das mechanische Wärme-Aequivalent ist. Indem man ausdrückt, dass $d\mu$ und $dU$ vollständige Differentiale sind, findet man:

$$(1) \qquad Y = \frac{dx}{dT}, \quad X = A\frac{dJ}{dT}, \quad dQ = ATd\left(S\frac{dJ}{dT}\right).$$

Wenn $K$ die specifische Wärme der Flüssigkeit bei der Temperatur $t$ ist, so ist

$$dQ = mgk\,dT$$

und man kann (1) in der Form

$$(1') \qquad dT = \frac{AT\frac{dJ}{dT}dS}{mgK - AT\frac{d^2J}{dT^2}S}$$

schreiben. Die Theorie der elektrischen Ströme von Clausius sagt nun aus, dass die Differenz $x$ des elektrischen Niveaus, welche sich bei der Berührung zweier verschiedener Körper herstellt, proportional der absoluten Temperatur $T$ der Berührung ist oder gleich $\lambda T$, wo $\lambda$ eine Constante ist, welche von der Natur der beiden Körper abhängt, folglich, dass die Wärmemenge $dQ$, welche in der Zeit $d\tau$ durch die Berührungsfläche geht, äquivalent $Axid\tau$ ist, wo $i$ die Intensität des Stromes bezeichnet. Mit Hülfe von (1) ergiebt sich daraus die Formel:

$$(2) \qquad id\tau = d\left(S\frac{dJ}{dT}\right),$$

welche die Elektricitätsmenge giebt, die durch die Berührungsfläche geht.

Wenn $k$ die specifische Wärme unter der Voraussetzung ist, dass die Oberfläche der Flüssigkeit keine potentielle Energie hat, so ist klar, dass ein Wachsen der Temperatur $dT$ ein Wachsen der Oberfläche $dS$ und eine Variation der Wärme $dQ$ hervorbringen würde, verbunden durch die Relation:

$$kdT = KdT + dQ,$$

wo $dQ$ durch Formel (1) gegeben ist. Daraus ergiebt sich:

$$(3)\qquad KdT = kdT - ATd\left(S\frac{dJ}{dT}\right).$$

Diese Formel wird in dem Fall, wo $dS$ gegen $dT$ vernachlässigt werden kann, zu

$$(4)\qquad K = k - ATS\frac{d^2J}{dT^2}.$$

Ebenso findet man, dass wenn $T$ unveränderlich ist, die Grösse der Wärme $Q$, die zu liefern nöthig ist, um $S_1$ in $S_2$ zu verändern, gegeben ist durch die Formel:

$$(5)\qquad Q = -AT\frac{dJ}{dT}(S_2 - S_1).$$

Die 5 Formeln geben zu zahlreichen, vom Verfasser ausgesprochenen Folgerungen Anlass. Sie erklären eine Fülle von paradoxen Thatsachen, die theils längst bekannt waren, theils neuerdings von Herrn Spring und anderen Physikern gefunden sind.

W. Thomson hat die thermische Wirkung untersucht, die durch Ausdehnung einer flüssigen Scheibe hervorgebracht wird, indem er von einer Formel ausging, die (1) analog ist, nämlich

$$dQ = AT\frac{dJ}{dT}dS.$$

Man kann diese Untersuchung direct führen, indem man bemerkt, dass, wenn die potentielle Energie um $JdS$ wächst, $Q$ abnehmen muss, oder mit Hülfe der Formel (1), (indem man voraussetzt, dass das 2te Glied der rechten Seite $ATS\frac{d^2J}{dT^2}$ vernachlässigt werden kann. Dem Referenten scheint die doppelte Art der Behandlung der Frage zu zeigen, dass dies in der That geschehen darf). Die Formel 1′) beweist, dass in dem Falle, wo $m$ und $K$ sehr klein sind, die Variation der Temperatur sehr gross sein muss. Dies zeigen auch verschiedene der oben citirten Experimente. Wenn man in die Flüssigkeit einen festen Körper taucht, der nicht benetzt wird, so findet ein Wachsen der Spannung der potentiellen Energie statt, also Verringerung der Temperatur. Die Erfahrung verificirt auch diesen Schluss. Wenn der feste Körper benetzt wird, so führt die Formel zu einem entgegengesetzten Resultat.

Dem entsprechen die Resultate der Untersuchungen von Pouillet, Jungk, Melsens. Formel 3) ist von Herrn Lippmann für die Elektricität gefunden worden, welche durch Berührungsflächen von angesäuertem Wasser und Quecksilber geht. Der Verfasser stellt sie hier in viel allgemeinerer Art auf und erinnert an Versuche von Quincke und Lippmann. Die beiden Gesetze von Lippmann kann man auch in folgender Weise verallgemeinern: 1) „Die Capillarconstante an der Oberfläche einer Flüssigkeit in Berührung mit Luft, mit einer anderen Flüssigkeit oder mit einem festen Körper ist eine Function der absoluten Temperatur dieser Oberfläche". 2) „Wenn man eine flüssige Oberfläche mechanisch deformirt, so verändert sich die Temperatur in dem Sinne, dass die hervorgebrachte Oberflächenspannung der Fortsetzung der Bewegung entgegenwirkt". Diese Gesetze sind experimentell bestätigt. Die Veränderung der Oberfläche des Wassers bei der Verdunstung auf der Oberfläche der Erde im Regen bringen unzählige thermoelektrische Ströme hervor, wenn die Formeln des Herrn Mensbrugghe wahr sind, was Herr Secchi bestätigt hat.

Die Formel 3) erklärt auch einige von Weber und Spring gefundene Resultate, nämlich dass die Veränderungen der specifischen Wärme den Veränderungen des Volumens der Körper durch die Wärme folgen. Bei Formel 4) weiss man durch Versuche, dass $\frac{d^2 J}{d T^2}$ negativ ist. Man schliesst daraus, dass weniger nöthig ist, um eine Wasserkugel vom Volumen $V$ um einen Grad zu erhöhen, als $n$ Kugeln vom Volumen $\frac{V}{n}$, und eine Fülle anderer paradoxer Folgerungen, die mit alten oder neuen Untersuchungen übereinstimmen. Formel 5) ist nicht weniger fruchtbar zur Erläuterung von Erscheinungen bei der Verdampfung von Flüssigkeiten oder beim Schmelzen von festen Körpern. Der Verfasser schliesst seine inhaltreiche Untersuchung mit Erläuterung einzelner Thatsachen, die sich auf Flüssigkeiten mit einem Dichtemaximum beziehen, und mit allgemeinen Betrachtungen über die Nothwendigkeit der Berücksichtigung des Gliedes $JdS$ in der Thermodynamik, weil dasselbe für die Flüssigkeiten wahrscheinlich wichtiger ist als

die analogen Glieder, die sich auf das Innere der Körper beziehen. Mn. (O.)

---

G. Lippmann. Extension du principe de Carnot à la théorie des phénomènes électriques. Équations différentielles générales de l'équilibre et du mouvement d'un système électrique réversible quelconque. (Extrait.) C. R. LXXXII. 1425-1428.

Der Verfasser denkt sich folgenden Kreisprocess angestellt:

Eine Kugel, deren Radius verändert werden kann (Seifenblase), wird mit einem elektrischen Reservoir (Potential $V_1$) in Verbindung gebracht und der Radius vergrössert. Darauf wird die Verbindung aufgehoben und der Radius noch weiter vergrössert, wodurch das Potential auf $V_2$ sinkt. Die Kugel wird nun mit einem zweiten Reservoir (Potential $V_3$) verbunden und der Radius verkleinert, endlich von demselben getrennt und der Radius wieder auf seine ursprüngliche Grösse und die Kugel auf ihr ursprüngliches Potential $V_1$ gebracht. Hierbei ist Arbeit geleistet. Das Maximum der zu erreichenden Arbeit erhält man nur dann, wenn in jedem Augenblick die Elektricität im Gleichgewicht ist, d. h. wenn der angestellte Kreisprocess umkehrbar ist. Es hat dabei ein Uebergang von Elektricität von einem Reservoir höheren Potentials zu einem Reservoir niedrigeren Potentials stattgefunden, ohne dass die Quantität der Elektricität sich verändert hat. Ok.

---

J. C. Maxwell. On the equilibrium of heterogeneous substances. Proc. of Cambr. II. 427-430.

Das thermodynamische Problem des Gleichgewichts heterogener Substanzen ist zuerst im Jahre 1855 von Kirchhoff behandelt worden. Die Methode desselben ist auch von C. Neumann in seinen „Vorlesungen über die mechanische Theorie der Wärme" (Leipzig 1875, s. F. d. M. VII. p. 677) adoptirt worden. Keiner

der beiden Schriftsteller macht aber von der für die Thermodynamik so fruchtbaren Vorstellung der inneren Energie und der Entropie der Substanzen Gebrauch. Prof. Maxwell macht jetzt auf die von Prof. J. W. Gibbs benutzte und in den „Transactions of sciences of Connecticut" (siehe F. d. M. V. p. 565) befolgte Methode aufmerksam, welche nach Prof. Maxwell's Ansicht neues Licht auf die Thermodynamik wirft. Zugleich wird über diese Methode berichtet. Glr. (O.)

---

F. Lucas. Vibrations calorifiques d'un solide homogène à température uniforme. C. R. LXXXII. 311-313.

F. Lucas. Vibrations d'un solide homogène, en équilibre de température. C. R. LXXXII. 406-408.

Rapport sur un mémoire de M. F. Lucas, intitulé: „Vibrations calorifiques des solides homogènes". C. R. LXXXII. 1484-1487.

Während die Wärmebewegungen der Molecüle bei den Gasen in neuester Zeit mit grossem Erfolge theoretisch behandelt worden sind, ist dies bei den festen Körpern und Flüssigkeiten noch nicht gelungen. Nach dem vorliegenden Bericht über die oben genannte Abhandlung, welche in den „Recueil des Savants étrangers" aufgenommen werden soll, scheint der Verfasser wenigstens eine wichtige Erscheinung bei festen Körpern auf die Schwingungen eines Punktsystems zurückgeführt zu haben, nämlich die Wärmeleitung.

Eine eingehendere Beurtheilung über den Weg, welchen der Verfasser dabei eingeschlagen, müssen wir uns reserviren, bis die ausführliche Abhandlung vorliegt. Ok.

---

Klingel. Beziehung zwischen dem mechanischen Wärmeäquivalent und den Moleculargewichten. Pogg. Ann. CLVIII. 160-163.

H. L. Bauer. Bemerkung zu den von Klingel aufgestellten Sätzen. Pogg. Ann. CLVIII. 612-615.

Der Verfasser der ersten Notiz schreibt das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz in der Form:

$$\frac{p}{\gamma} = R\left(\frac{1}{\alpha} + t\right),$$

wo $\gamma$ das Gewicht von einem Kubikmeter des Gases, bei $t^0$ und dem Druck $p$ bedeutet. $R = \frac{p \cdot \alpha}{\gamma}$; welche Grösse für Wasserstoff den Werth 422,61 hat. Aus der numerisch-annähernden Gleichheit dieses Factors mit dem mechanischen Wärmeäquivalent leitet der Verfasser Schlüsse ab, deren Hinfälligkeit indess an sich klar ist.

Bauer hat in der zweiten Notiz dies ausführlicher auseinander gesetzt. Ok.

---

S. H. Bumbury. On the second law of thermodynamics in connexion with the kinetic theory of gases. Phil. Mag. 1876.

In einer Arbeit von Boltzmann (siehe F. d. M. VII. p. 683) ist ein analytischer Beweis des zweiten Satzes der Wärmetheorie enthalten, der sich auf Resultate stützt, die in derselben Arbeit mitgetheilt werden. Dem Verfasser vorliegender Arbeit erschien die Behandlung dort schwer übersichtlich. Er zeigt daher, wie man aus Boltzmann's Resultaten dieses Gesetz herleiten kann.

Csy. (O.)

---

C. Szily. The second proposition of the mechanical theory of heat derived from the first. Phil. Mag. 1876.

R. C. Nichols. On the proof of the second law of thermodynamics. Phil. Mag. 1876.

Der erste Satz der mechanischen Wärmetheorie rührt von Mayer und Joule her und ist nichts anderes als das allgemeine Princip von der Erhaltung der Energie. Der zweite Satz von Carnot und Clausius wurde von den Physikern meist auf Grund von Voraussetzungen abgeleitet, die nicht völlig genügten. In

der vorliegenden Arbeit leitet der Verfasser denselben aus dem ersten Satze her. Csy. (O.)

---

Ph. Gilbert. Sur la démonstration du second principe de la thermodynamique de M. Sarreau. Ann. soc. scient. Brux. I. A. 75.

Herr Sarreau betrachtet ein isotropes System, das einer unendlich kleinen Transformation unterworfen ist und wendet darauf den Satz von Clausius über stationäre Bewegung an. Diese Formel setzt aber voraus, dass die mit $\Sigma mr^2$ ($m$ Masse eines Molecüls, $r$ Entfernung von einem festen Anfangspunkt) bezeichnete Grösse unveränderlich bleibt, was bei der von Herrn Sarreau (Almeida J. 1872) betrachteten Transformation, wo der Körper sein Volumen ändert, nicht stattfindet.

Mn. (O.)

---

F. Koláček. Ueber die beim Evacuiren eines gegebenen Raumes zu leistende Arbeit. Pogg. Ann. CLIX. 643-649.

Der Verfasser findet durch eine einfache Rechnung, dass die zu leistende Arbeit bei einer zweistiefeligen Luftpumpe gleich ist dem Product aus dem Luftdruck und der Summe der zu evacuirenden Räume, d. h. des Recipienten und des einen Pumpenstiefels. Von der Reibung wird bei der Berechnung abgesehen. Ok.

---

J. Bourget. Rendement des machines thermiques. Ann. de l'Éc. Norm. (2) V. 113-123.

Nach ausführlicher Besprechung des Carnot'schen Kreisprocesses beweist der Verfasser den keineswegs neuen Satz, dass bei irgend einem andern ausführbaren Kreisprocess, bei welchem ein Gas als arbeitende Substanz benutzt wird, der Nutzeffect (Verhältniss der in Arbeit verwandelten Wärme zum gesammten Wärmeaufwand) stets kleiner ist, als bei einem Carnot'schen

Process. Dies gilt auch, wenn die Heissluftmaschine mit einem Regenerator verbunden ist. Ok.

---

G. A. Hirn. Sur l'étude des moteurs thermiques et sur quelques points de la théorie de la chaleur en général. C. R. LXXXII. 52-55.

Bei Gelegenheit der Herausgabe des zweiten Bandes seiner „Thermodynamique" giebt der Verfasser eine kurze Uebersicht der bemerkenswerthesten Resultate, welche in demselben enthalten sind. Insbesondere hebt er hervor, dass seine Behandlung der Dampfmaschinen darin von der gewöhnlichen Theorie derselben abweicht, dass er auf die an die Maschinentheile abgegebene resp. von denselben empfangene Wärmemenge Rücksicht nimmt. Ok.

---

H. Résal. Note sur les chemises à vapeur des cylindres des machines à vapeur. C. R. LXXXII. 537-540.

A. Ledieu. Observations à propos de la dernière communication de M. H. Résal. C. R. LXXXII. 599-601.

H. Résal. Limite inférieure que l'on doit attribuer à l'admission dans une machine à vapeur. C. R. LXXXII. 647-650.

Die hier zusammengestellten Arbeiten behandeln hauptsächlich technische Fragen, ohne ein specielleres mathematisches Interesse darzubieten. Insbesondere erörtert Résal den Nutzen des sogenannten Dampfmantels an dem Cylinder einer Dampfmaschine. Er berechnet das Verhältniss der in Arbeit umgesetzten Wärme zu dem gesammten Wärmeaufwand für zwei sonst durchaus gleich angenommene Processe mit und ohne Dampfmantel. Im ersten Fall nimmt er eine Ausdehnung des Dampfes bei constanter Temperatur, im zweiten eine adiabatische Ausdehnung an. Ledieu erhebt in der angeführten Arbeit Zweifel an der Zulässigkeit der von Résal gemachten Annahmen für die Praxis. Ok.

---

K. Puschl. Neue Sätze der mechanischen Wärmetheorie. Wien. Anz. 1876. No. 9.

Die nur in ganz kurzem Auszug mitgetheilte Arbeit handelt: „von den das Volumen der Körper bedingenden Kräften.“

Ok.

---

G. R. Dahlander. Ueber die geometrische Darstellung der Zustandsänderung eines Körpers durch die Wärme nach der mechanischen Wärmetheorie. Schlömilch Z. XXI. 287-294.

Bekanntlich kann man die einem Körper zugeführte Wärme durch die Differentiale zweier unabhängiger Variabeln ausdrücken, als welche man gewöhnlich je zwei der Grössen: Druck, Volumen, Temperatur wählt. Durch Einführung neuer Veränderlicher führt der Verfasser eine geometrische Construction aus, welche leicht einen Ueberblick über die Art der Wärmezuführung gestattet. Ok.

---

O. Fabian. Spannungscurve des gesättigten Wassers. Carl Rep. XII. 367-404.

---

D. J. Korteweg. Over de berekening van den gemiddelden botsings afstand der gasmoleculen, met in achtneming von al hunne afmetingen. Versl. en Mededeel. X. 349-362.

D. J. Korteweg. Berekening van de vermeerdering, welke de spanning van een gas ten gevolge van de botsingen der moleculen ondergaat. Versl en Mededeel. X. 363-370.

Der mittlere Stossabstand der Gasmolecüle ist durch Clausius (Pogg. Ann. C. p. 353) unter folgenden Annahmen berechnet; 1) dass die Bewegung der Molecüle nach allen Richtungen gleichmässig stattfinde, 2) dass die Dimensionen der Molecüle

klein bleiben im Vergleich zu ihren gegenseitigen Abständen, 3) dass ihre Geschwindigkeiten unter einander gleich sind. Der Verfasser giebt dieselbe Berechnung, lässt aber die letzte beschränkende Annahme fallen, und bringt die Molecüle als Kugeln in Rechnung, so dass auch die Dimensionen in der Richtung der Bewegung beachtet werden.

Die hauptsächlichsten Resultate, die er erhält, werden folgendermassen formulirt:

Die Dimensionen der Molecüle nach der Richtung ihrer relativen Bewegung sind in Rechnung gebracht durch den mit Vernachlässigung dieser Dimensionen gefundenen Stossabstand, multiplicirt mit der Einheit vermehrt um das vierfache Volumen aller in der Volumeneinheit enthaltenen Molecüle.

Dieser Factor ist constant, auf welche Weise auch die verschiedenen Geschwindigkeiten über die Molecüle vertheilt sein mögen und welches auch die mittlere Geschwindigkeit sein mag. Sie kann demnach nur in sofern von der Temperatur abhängen, als dieselbe vielleicht das Volumen der Molecüle vergrössert.

In der zweiten obengenannten Abhandlung wird eine Berechnung gegeben von dem Zuwachs, welchen die Spannung eines Gases in Folge von Stössen der Molecüle erhält, während van der Waals unmittelbar aus der Verringerung des Stossabstandes auf eine Vermehrung der Spannung schliesst, indem er beide Grössen einander umgekehrt proportional setzt. Der Verfasser kommt schliesslich zu der Formel

$$D' = \frac{D}{1-4A},$$

worin $D$ den Druck ohne Stoss der Molecüle bedeutet, $D'$ den wahren Druck und $A$ das relative Volumen der Molecüle.

G.

---

J. D. van der Waals. Over het betrekkelyke aantals botsingen, dat een molekuul ondergaat, wanneer het zich beweegt door bewegende molekulen of door molekulen, die men ondersh it stil te staan, alsmede

over den invloed van de afmetingen der molekulen volgens de richting der relatieve beweging op het aantal deer botsingen. Verl. en Mededeel. X. 321-336.

J. D. VAN DER WAALS. Over het aantal botsingen en den gemiddelden botsings afstand in gasmengsels. Versl. en Mededeel. X. 337-348.

Der Verfasser ist auf sein Thema gekommen durch die Untersuchungen von Maxwell und Clausius über die Anzahl der Stösse, welche ein Molecül erfährt, wenn es sich durch in Bewegung befindliche Molecüle bewegt, wobei dieselben zu abweichenden Resultaten gekommen sind. Clausius findet nämlich für das Verhältniss der Anzahl Stösse, wenn das Molecül sich durch in Bewegung befindliche Molecüle bewegt, oder durch solche, welche ruhen, $\frac{4}{3}$; Maxwell für dasselbe Verhältniss $\sqrt{2}$. Die Berechnungen des Verfassers ergeben, dass das letztgenannte Resultat das richtige ist, doch schlägt er dabei einen anderen Weg ein, indem er den Einfluss der Dimensionen der Molecüle nach der Richtung der relativen Bewegung in Rechnung zieht. Diese verursacht, dass das gefundene Verhältniss mit dem Factor $\frac{v}{v-4b_1}$ multiplicirt werden muss, worin $v$ das äussere Volumen bedeutet und $b_1$ das Volumen der darin enthaltenen Molecüle. Clausius hatte für denselben Factor $\frac{v}{v-8b_1}$ gefunden. Der Verfasser erklärt diese Abweichung dadurch, dass sich das Molecül mitten durch in Ruhe befindliche Molecüle, welche auch nach dem Stoss in Ruhe bleiben, bewegt.

In der zweiten der genannten Abhandlungen berechnet der Verfasser die Anzahl Stösse und den mittleren Abstand des Stosses in Gasgemischen nach der bekannten Theorie von Maxwell, mit der Erweiterung jedoch, dass er auch die Dimensionen nach der Richtung der relativen Bewegung berücksichtigt. Er bestimmt die Anzahl Stösse, welche jedes Molecül, sowohl von den Molecülen seines eigenen Systems als von denen des andern Systems erhält, und ferner die mittlere Weglänge,

welche zwischen zwei einander folgenden Stössen zurückgelegt wird. G.

---

A. Kundt und E. Warburg. Ueber die specifische Wärme des Quecksilbergases. Pogg. Ann. CLVII. 353-370.

Nach einer von Clausius zuerst gezogenen Folgerung der neueren Gastheorie ist das Verhältniss der Gesammtenergie der Gasmolecüle zur Energie der fortschreitenden Bewegung $K$ gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{H}{K} = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{1}{k-1},$$

wo $k$ das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen des Gases bedeutet.

Verhalten sich die Gasmolecüle in ihren mechanischen und thermischen Eigenschaften wie materielle Punkte und besteht das Gasmolecül aus $n$ Atomen, so ergiebt sich weiter für das Verhältniss der specifischen Wärmen die Formel:

$$k = \frac{2+3n}{3n}.$$

Dieselbe wird für die permanenten Gase vorläufig noch nicht durch den Versuch bestätigt. Aus dem chemischen Verhalten des Quecksilbers folgt, dass das Molecül desselben nur aus einem Atom besteht. Für überhitzten Quecksilberdampf ist also: $n = 1$, und es müsste $k = 1{,}66\ldots$ sein.

Durch eine Reihe sehr sorgfältiger Versuche haben die Verfasser diese Zahl bestätigt gefunden, indem sie dieselbe aus dem Verhältniss der Schallgeschwindigkeiten in Luft und Quecksilberdampf bestimmten. Ok.

---

Y. Villarceau. Note sur les déterminations théorique et expérimentale des deux chaleurs spécifiques, dans les gaz parfaits dont les molécules seraient monoatomiques. C. R. LXXXII. 1127-1129, 1175-1178.

Ch. Simon. Sur le rapport des deux chaleurs spécifiques d'un gaz. C. R. LXXXIII. 726-728.

Anknüpfend an die in dem vorigen Referat besprochene Arbeit von Kundt und Warburg macht der Verfasser darauf aufmerksam, dass er im Jahre 1872 ebenfalls die Zahl $\frac{5}{3}$ für das Verhältniss der specifischen Wärmen eines Gases gefunden hat, wenn bei demselben nur auf die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung Rücksicht genommen wird. Dies ist aber jedenfalls gerechtfertigt, wenn die Gasmolecüle nur aus einzelnen Atomen bestehen.

In der zweiten Notiz giebt derselbe Verfasser eine Ableitung für den Werth jenes Verhältnisses mit Rücksicht auf die Molecularbewegungen und findet:

$$k = \frac{C}{c} = \tfrac{5}{3} - \frac{2}{3M.C} \cdot dE.$$

Hier bedeutet $M$ das mechanische Wärmeäquivalent, $C$ und $c$ die specifischen Wärmen des Gases bei constantem Druck und Volumen, $dE$ die Gesammtzunahme der Energie der Bewegungen der Atome, bezogen auf den Schwerpunkt des Molecüls für 1° Temperaturzunahme.

Anknüpfend an dieses Resultat berichtet Simon in der letzten Arbeit über die von ihm ausgeführte Berechnung des Verhältnisses $k$ unter der Annahme vieratomiger Gasmolecüle. Der Verfasser denkt sich die Atome an den Ecken eines regulären Tetraeders angebracht und dasselbe um seinen Schwerpunkt in Rotation. Als Resultat erhält er:

$$k = \tfrac{7}{5} = 1{,}4,$$

eine Zahl, welche nahezu mit den Versuchen an bekannten Gasen übereinstimmt. Leider fehlt die Rechnung gänzlich, so dass ein Urtheil über die Ausführung derselben unmöglich ist. Ok.

---

L. Boltzmann. Bemerkungen über die Wärmeleitung der Gase. Pogg. Ann. CLVII. 457-469.

Der Verfasser vergleicht die von Maxwell (Phil. Mag. IV. 35) und von ihm selbst (vergl. F. d. M. IV. 567) berechneten Werthe der Wärmeleitungsconstanten der Gase mit den von Stefan, Kundt und Winkelmann beobachteten Werthen.

Die beiden Formeln sind nach Maxwell:,

$$C_1 = \tfrac{5}{2} . w . \mu,$$

nach Boltzmann:

$$C_2 = \tfrac{15}{4} (\gamma - 1) . w . \mu.$$

Hier bedeuten:

$\mu$ den Reibungscoefficienten des Gases, $\gamma$ das Verhältniss ihrer specifischen Wärme, $w$ die Zahl: 0,169.

Die beobachteten Werthe liegen zwischen $C_1$ und $C_2$.

Die Berechnung beider Grössen schliesst noch Hypothesen in sich. Insbesondere ist bei der Berechnung Maxwell's angenommen, dass sich die lebendige Kraft der intermolecularen Bewegung der Gasmolecüle eben so schnell fortpflanzt, als diejenige der progressiven Bewegung. Im Gegensatz hierzu ist bei Berechnung von $C_2$ angenommen, dass überhaupt nur die lebendige Kraft der progressiven Bewegung fortgepflanzt wird. Da nun $C_1$ zu gross, $C_2$ zu klein gegen die beobachteten Werthe ausfällt, so hat der Verfasser eine neue Reihe von Werthen der Wärmeleitungsconstanten nach der Formel berechnet

$$C = \tfrac{3}{13} C_1 + \tfrac{10}{13} C_2,$$

welche eine durchaus befriedigende Uebereinstimmung mit den Beobachtungen ergiebt. Der Verfasser sucht dann weiter zu erklären, warum der intermolecularen Bewegung ein verhältnissmässig kleinerer Antheil an der Wärmeleitung zukommt.

Ok.

---

A. VON OBERMAYER. Ueber die Abhängigkeit des Coefficienten der inneren Reibung der Gase von der Temperatur. Wien. Anz. 1876. No. 8.

Der Verfasser stellt für den Reibungs-Coefficienten die Formel auf:

$$\mu_t = \mu_0 (1 + \alpha t)^n,$$

$\alpha$ ist der Ausdehnungscoefficient des betreffenden Gases. Aus Versuchen ergiebt sich $n = \frac{3}{4}$ für die permanenten Gase, für die übrigen ein Zahlenwerth, welcher etwas kleiner ist als 1.

Ok.

A. WINKELMANN. Ueber die Wärmeleitung der Gase. (Zweiter Theil). Pogg. Ann. CLVII. 497-555.

Die Wärmeleitung der Gase ist insofern von Interesse für die Ausbildung der kinetischen Gastheorie, als dieselbe bisher noch nicht solche Werthe lieferte, welche mit den Versuchen in genügender Uebereinstimmung standen. Besonders unterscheiden sich die Theorien von Clausius und Maxwell durch das Gesetz, nach welchem die Wärmeleitungsfähigkeit sich mit der Temperatur ändert. Die Versuche von Winkelmann beziehen sich daher auf die Entscheidung dieser Frage. Der Verfasser findet, die Wärmeleitung bei 0° gleich 1 gesetzt, bei 100°:

für Luft: 1,364,
für Kohlensäure: 1,691.

Die Wärmeleitung wächst daher annähernd proportional der absoluten Temperatur, wie sich aus der Theorie von Maxwell ergiebt, und nicht proportional der Quadratwurzel, wie Clausius findet. Doch glaubt der Verfasser mit Recht darin noch nicht eine unbedingte Bestätigung der Maxwell'schen Theorie sehen zu sollen. Ok.

MENDÉLÉEFF et KAIANDER. Du coefficient de dilatation de l'air sous la pression atmosphérique. C. R. LXXXII. 450-454.

Da die besten Bestimmungen des Ausdehnungscoefficienten der Luft (Magnus, Regnault) auf Beobachtungen der Veränderung des Druckes des eingeschlossenen Gases beruhen, so gehen in dieselben dadurch Fehler ein, dass auf die Abweichung der Luft vom Mariotte'schen Gesetz keine Rücksicht genommen wird. Die Verfasser benutzen eine Untersuchungsmethode, bei welcher die Aenderungen des Volumens und nicht diejenigen des Druckes gemessen werden. Indem wir die Einzelheiten der Versuche übergehen, wollen wir nicht unterlassen, den auf diese Weise gefundenen Ausdehnungscoefficienten anzugeben. Derselbe ist:

0,0036843.

Hieraus würde der Nullpunkt der absoluten Temperatur sich ergeben zu:

271,42°.

Ok.

---

G. A. Hirn. Sur le maximum de la puissance répulsive possible des rayons solaires.. C. R. LXXXII. 1472-1476.

A. Ledieu. Objections à la dernière communication de M. Hirn. C. R. LXXXIII. 119-120.

G. A. Hirn. Réponse à la critique de M. Ledieu. C. R. LXXXIII. 264-266.

A. Ledieu. Réponse à la dernière communication de M. Hirn. C. R. LXXXIII. 384-385.

Um zu einer definitiven Erklärung der Drehung des Crookes'schen Radiometers unter der Einwirkung von Lichtstrahlen zu gelangen, bedient sich Herr Hirn der Eliminationsmethode, d. h. er untersucht mögliche Ursachen und Erklärungen der fraglichen Erscheinung genauer, um schliesslich nachzuweisen, dass dieselben in diesem besonderen Fall nicht anwendbar sind. In dieser Weise behandelt er zunächst die directe Einwirkung der Lichtstrahlen und schliesst folgendermassen: Von allen Lichttheorien muss die alte Emissionstheorie für die directe Druckwirkung der Lichtstrahlen die grössten Werthe geben. Nennt man $V$ die Geschwindigkeit der Lichtpartikel, $\mu$ die Gesammtmasse, welche bei der Sonnenstrahlung eine Fläche von 1 Qm. treffen, so muss die hervorgebrachte Wärmemenge $Q$ die Gleichung erfüllen:

$$\frac{\mu V^2}{2} = 425 . Q = F.$$

Der auf ein Quadratmeter ausgeübte Druck müsste sein:

$$p = 2 . \mu V = \frac{F}{V}.$$

Nimmt man für $Q$ die aus der Sonnenstrahlung durch Versuche gefundenen Werthe, für $V$ die Lichtgeschwindigkeit, so ist:

$$p = 0{,}0004157 \; gr \text{ für } 1 \text{ Qm.}$$

Dieser Druck gilt für eine vollkommen absorbirende Fläche; für eine vollkommen reflectirende beträgt derselbe das Doppelte.

Der Verfasser schliesst weiter, dass dieser Druck zu klein ist, um den fraglichen Effect hervorzubringen.

Der erste Einwurf des Herrn Ledieu enthält insofern ein Missverständniss des Grundgedankens des Herrn Hirn, als derselbe die vorliegende Rechnung nach den Grundsätzen der Undulationstheorie des Lichtes beurtheilt. Dagegen müssen wir dem zweiten Einwurf Ledieu's zustimmen, dass die angestellte Rechnung immerhin nur für die Annahme der Emissionstheorie richtig ist; wenigstens ist der Beweis nicht geliefert, dass bei dieser Annahme die Druckwirkung ein Maximum sein muss. Ok.

---

A. Crova. Recherches sur la loi de transmission par l'atmosphère terrestre des radiations calorifiques du soleil. C. R. LXXXII. 81-84.

Indem der Verfasser die Intensitäten der Sonnenstrahlung zu verschiedenen Tageszeiten, also bei verschiedener Dicke der durchlaufenen Luftschicht vergleicht, findet er, dass die bisher dafür aufgestellten, empirischen Formeln die Erscheinung nicht genügend darstellen.

Das Gesetz, welches mit seinen Beobachtungen übereinstimmt, lässt sich aus der Differentialgleichung herleiten:

$$\frac{y}{\frac{dy}{dx}} = -(c+mx);$$

integrirt:

$$y^m(c+mx) = A,$$

wo $y$ die in der Zeiteinheit empfangene Wärmemenge, $x$ die Dicke der durchlaufenen Luftschicht bedeuten. Ok.

---

J. Carbonnelle. Calcul de la chaleur diurne envoyée par le soleil en un point quelconque de la surface terrestre. Ann. soc. scient. Brux. I. A. 126-129, B. 323-366.

Die Wärmemenge $D$, welche an jeder Stelle an der Grenze der Atmosphäre auf eine ebene Fläche gleich der Flächeneinheit fällt, hängt ab von der Meridianhöhe der Sonne oder dem Tage im Jahr und der Breite des Ortes oder der Zeit, während welcher die Sonne über dem Horizonte bleibt. Diese Zeit vermehrt sich in continuirlicher Weise vom Aequator bis zu dem Polarkreis, wo die Sonne den Horizont um Mitternacht streift. Für einen gegebenen Tag des Jahres variirt $D$ mit der Breite des Ortes. Es giebt immer ein Maximum am erleuchteten Pole und ein anderes Maximum zwischen diesem Pol und dem Ort, wo die Sonne um Mittag vertikal ist, ein Minimum zwischen diesen beiden Maxima und ein zweites Minimum am Polarkreis des andern Poles. Am Tage des Sonnensolstitiums geht das Maximum beinahe durch den Parallel von Marseille, Toulon, Pisa, Khiwa, Peking, New-York, das Minimum durch den von Petersburg. In dem Masse, wie sich die Sonne vom Aequator entfernt, nähern sich Maximum und Minimum im entgegengesetzten Sinne fortschreitend einander bis zum Solstitium, ohne jemals zusammenzutreffen. Am Nordpol wächst $D$ mit der Declination der Sonne der Art, dass es denselben Werth hat, wie am Aequator am 10. Mai. Vom 10. Mai bis zum 2. August erhält der Nordpol jeden Tag mehr Wärme wie die Punkte des Aequators. Vom 23. Mai ferner bis zum 19. Juli erhält er mehr Wärme, wie jeder andere Punkt der Erde. Vom 13. Mai bis zum 23. Juli sind die Punkte des Aequators diejenigen auf der nördlichen Halbkugel, welche in 24 Stunden am wenigsten Wärme erhalten. Alle diese Resultate sind auf sehr einfache und leicht zu verificirende Rechnungen gestützt. Die Abhandlung schliesst mit einer numerischen Tafel, durch die man Curven construiren kann, welche $D$ genähert für jeden Grad der Declination der Sonne geben. Die Anwendungen der Abhandlung auf die physische Geographie der Polargegenden ist evident. Man kann ferner durch sie die Genauigkeit der geologischen Theorie von Croll controliren. Mn. (O.)

M. Lévy. Sur le problème du refroidissement des corps solides ayant égard à la chaleur dégagée par la contraction. C. R. LXXXIII. 136-139.

Der Verfasser geht von den allgemeinen, von Duhamel aufgestellten Differentialgleichungen aus:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{q}{c.d}.\Delta V + \frac{\frac{c'}{c}-1}{3.\delta}\frac{\partial \vartheta}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Omega}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Omega}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \Omega}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)}$$
$$= 2K.\delta(3k+1)\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Aus dieser letzten Gleichung sind die beiden auf $y$ und $z$ bezüglichen Gleichungen abzuleiten.

In diesen Gleichungen bedeuten: $V$ die Temperatur, $\Omega$ das Potential der elastischen Kräfte, $q$ die Leitungsfähigkeit, $d$ die Dichtigkeit, $c'$ und $c$ die specifischen Wärmen, $\delta$ den Ausdehnungscoefficienten. $\Delta$ ist das Zeichen für:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Indem der Verfasser diese Differentialgleichungen in ähnlicher Weise integrirt, wie die gewöhnliche Differentialgleichung der Wärmeleitung, giebt er die Lösung in der Form:

$$V = \Sigma A_\lambda V_\lambda . e^{-\frac{\lambda^2}{c.d}q.t},$$

wo

$$A_\lambda = \frac{\iiint f(xyz).\Delta V_\lambda . dx\,dy\,dz}{\iiint V_\lambda.\Delta V_\lambda . dx\,dy\,dz}$$

und

$$f(xyz) = \Sigma A_\lambda V_\lambda,$$

den gegebenen Anfangszustand des Körpers bedeutet.

Ok.

# Zwölfter Abschnitt.

## Geodäsie und Astronomie.

### Capitel 1.

### Geodäsie.

A. Liebenau. Lehrbuch der Markscheidekunst und praktischen Geometrie. Leipzig. Mentzel.

---

G. Zachariae. De geodätiske Hovedpunkter og deres Koordinater. Kjöbenhavn.

Aus der Recension eines Fachmannes (in Zeuthen's Tidsskr. 1877) geht hervor, dass dieses Buch nicht nur als Lehrbuch betrachtet eine systematisch geordnete, klare und correcte Darstellung dessen giebt, was hinsichtlich der besten Methoden der Geodäsie bekannt ist, sondern auch mehrere neue Untersuchungen von beträchtlichem theoretischem und praktischem Interesse enthält.

Gm.

---

A. Fischer. Die Gestalt der Erde und die Pendelmessungen. Astr. Nachr. LXXXVIII. 81-98.

J. Hann. Schreiben an den Herausgeber. Astr. Nachr. LXXXVIII. 203-208.

A. Fischer. Schreiben an den Herausgeber. Astr. Nachr. LXXXVIII. 247-252.

J. Hann. Schreiben an den Herausgeber. Astr. Nachr. LXXXVIII. 305-308.

Von Stokes und Ph. Fischer ist der Satz aufgestellt worden, dass in Folge des Gegensatzes von Continent und Ocean die Niveauflächen des Erdkörpers, verglichen mit einer regelmässig gebildeten Fläche, z. B. einem Ellipsoid, entsprechende Hebungen und Senkungen von ansehnlichem Betrage zeigen müssen und dass in Folge dessen die Differenzen „theoretische minus wirkliche Schwere“ auf den Continenten vorwiegend positiv, auf den Oceanen negativ ausfallen. Herr A. Fischer sucht nun an der Hand einer eingehenden Neudiscussion der vorhandenen Pendelbeobachtungen zu zeigen, dass die Gültigkeit dieses Gesetzes in Bezug auf die Pendelbeobachtungen einer erheblichen Einschränkung bedürfe, insofern die beobachteten Anomalien hauptsächlich auf locale Ursachen zurückzuführen seien und dass in Folge dessen die Widersprüche zwischen den Pendel- und Gradmessungsabplattungen keineswegs die ihnen von Ph. Fischer zugeschriebene Bedeutung besitzen. Dem entgegen wird in dem ersten Schreiben von Herrn Hann die Gültigkeit jenes Gesetzes aufrecht erhalten und zur Bestätigung die neuerdings längs des indischen Bogens ausgeführten Pendelmessungen aufgeführt. Dieselben zeigen in der That ein beständiges Kleinerwerden der wirklichen Schwere gegenüber der theoretischen Schwere beim Fortschreiten nach Norden hin. Die beiden anderen Schreiben sind vorwiegend polemischer Natur. Hervorzuheben ist, dass Herr A. Fischer grade aus dem Verhalten der indischen Pendelmessungen und ausgehend von der Geringfügigkeit der in Indien gefundenen Polhöhenfehler, auf unsichtbare Massendefecte nördlich des indischen Bogens schliesst, welche sich in den Polhöhenfehlern gegen die sichtbaren Massenüberschüsse compensiren, dagegen in den Pendelmessungen zum Vorschein kommen.

Zu der ganzen Controverse ist nun zu bemerken, dass das Gesetz von Stokes und Ph. Fischer allerdings nur die Bedeutung einer Regel hat, welche in Folge rein localer Ursachen Ausnahmen erleidet, dass aber die Gültigkeit dieser Regel „im Allgemeinen“ unanfechtbar ist, weil es sich dabei lediglich um eine nothwendige Consequenz aus den Eigenschaften der Kräftefunction der Erde handelt. Ferner ist die Kleinheit der Polhöhenfehler

des indischen Bogens in seiner jetzigen Gestalt kein Beweis für das Fehlen beträchtlicher Lothablenkungen nach Norden hin, weil diese, sobald sie nur regelmässig fortschreiten, vollständig durch das übliche Ausgleichungsverfahren maskirt werden können. Sobald letzteres zugegeben wird, erscheint das Verhalten der indischen Pendelmessungen als eine schlagende Bestätigung der erwähnten Regel. B.

---

C. W. Siemens. De la détermination de la profondeur de la mer au moyen du bathomètre et sans l'emploi de la ligne de sonde. C. R. LXXXIII. 780-783.

B.

---

F. J. van der Berg. Over de onderlinge afwijkingen van de geodetische lijn en van de tredersydsche vlakke normale doorsneden tuschen twee nabijgelegen punten van een gebogen oppervlak. Versl. en Mededeel. X. 1-45.

Bei der Berechnung von Dreiecken auf der sphäroidischen Erdoberfläche werden oft anstatt der geodätischen Linien zwischen den Endpunkten die Durchschnitte der Erdoberfläche mit Ebenen, welche durch die Normale des einen Eckpunktes und durch einen andern Eckpunkt gehen, als Seiten betrachtet. Sowohl in Hinsicht der Länge der Seiten, als der Grösse der Winkel, entstehen durch diese Betrachtungsweise gewisse in der Regel allerdings geringe Unterschiede, von deren Grösse sich Rechenschaft zu geben in der Geodäsie indessen von Wichtigkeit sein kann. Hinsichtlich dieses Gegenstandes sind verschiedene Abhandlungen erschienen, und in denselben Formeln gegeben von Bessel, Baeyer, Hansen, Weingarten, Bremiker und anderen. Der Verfasser der erwähnten Abhandlung geht die verschiedenen erhaltenen Resultate durch und giebt neue Berechnungen für die Abweichung der geodätischen Curven und ebenen normalen Durchschnitte, zuerst allgemein für Oberflächen, dann specieller für Umdrehungsflächen, wobei er die Resultate Weingarten's be-

stätigt findet. Als einfaches Beispiel werden zum Schlusse die Umdrehungskegelflächen und das Erdsphäroid eingehend behandelt. G.

---

C. M. von Bauernfeind. Näherungs-Verfahren zur Ausgleichung der zufälligen Beobachtungsfehler in geometrischen Höhennetzen. Münch. Ber. 1876. 243-270.

Zur Ausgleichung der in den letzten Jahren fast über ganz Europa erstreckten Präcisions-Nivellements sind von verschiedenen Autoren (Baeyer, Jordan, Morozowicz) Methoden angegeben worden, welche durchweg auf derjenigen der kleinsten Quadrate fussen. So lange die Anzahl der einen gewissen Landcomplex überdeckenden Polygone (Schleifen) nicht sehr gross ist (etwa 10 nicht übersteigt), kann auch wirklich nach jenen Vorschriften gerechnet werden, weiterhin jedoch gestaltet sich der Calcul für die Praxis allzu complicirt. Herr von Bauernfeind giebt deshalb ein anderes einfaches Verfahren an, dessen Rechnungsschwierigkeit eben nur mit der Anzahl der verbundenen Polygone sich steigert. „Es erfüllt alle Bedingungen der strengen Methode mit Ausnahme der einzigen, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum ist; angestellte Vergleichungen zeigen jedoch, dass die gefundenen Quadratsummen stets nur wenig grösser sind, als die nach der strengen Methode bestimmten Minima der Fehlerquadrate“. Der Grundgedanke ist der: Es wird zunächst jenes Polygon aus dem Netze herausgehoben, welches den stärksten Schlussfehler aufweist; dieser Fehler wird über sämmtliche Seiten gleichmässig vertheilt. Hängt dann das nächstschlechte Polygon von $m$ Seiten mit $n (< m)$ Seiten an jenem ersten, so werden die $n$ gemeinschaftlichen Strecken in ihrer verbesserten Gestalt beibehalten, und der Rest des Schlussfehlers wiederum homogen auf die übrigen $(m-n)$ Seiten vertheilt. Vorausgesetzt ward hierbei lediglich die Thatsache, die Gewichte der Seiten seien deren Längen umgekehrt proportional, ein Satz, der durch strenge Rechnung als allgemein gültig erwiesen wird. Zahlreiche durchgerechnete und dem reichen Zahlenmaterial des Verfassers ent-

nommene Beispiele setzen die Verwendbarkeit der neuen Regel ausser Zweifel. Gr.

---

G. Helmert. Näherungsformeln für die Gauss'sche Projection der Hannover'schen Landesvermessung. Z. f. Verm. V. 238-253.

Wenn die Ausdehnung des zu vermessenden Landes gewisse Grenzen nicht überschreitet, so kann man mit Gauss für das Rotationsellipsoid eine Kugel substituiren, deren Krümmungsmass gleich dem des Ellipsoids längs eines bestimmten Normalparallelkreises ist und die Entfernungen ganz so berechnen, als wäre direct auf jener Kugel gemessen worden, während die Uebertragung der geographischen Positionen von dem Ellipsoid auf die Kugel und umgekehrt durch einfache Reduction erledigt wird. Man kann nun mit Gauss noch einen Schritt weiter gehen, indem man die Kugel conform auf die Ebene abbildet und für das sphäroidische Dreieck das von den correspondirenden Punkten in der Ebene gebildete geradlinige Dreieck substituirt. Es ist dabei nur nöthig die kleinen Reductionen zu kennen, welche beim Uebergange von dem Ellipsoid oder der Kugel auf die Ebene und umgekehrt an die Entfernungen, Winkel und geographischen Positionen anzubringen sind. Der vorliegende Aufsatz enthält die vollständige Herleitung der hierzu erforderlichen Rechenvorschriften, unter Einführung gewisser praktisch zulässiger Vereinfachungen und stellt eine Vergleichung zwischen der ebenen, resp. sphärischen Rechnung an, die zu Gunsten der ersteren ausfällt, so lange das zu vermessende Areal nach allen Richtungen gewisse Grenzen nicht überschreitet, was sich offenbar für die Detailvermessung stets erreichen lässt. B.

---

J. H. Franke. Ueber die graphische Bestimmung von Coordinatenabweichungen. Z. f. Verm. V. 97-107.

Enthält die durch zwei ausführliche Beispiele erläuterte Darlegung eines Verfahrens, bei der Einschaltung eines neuen

Punktes $A$ zwischen gegebenen Punkten, sei es durch das Pothenot'sche Verfahren, sei es durch Messung der Winkel in den von $A$ mit den Fixpunkten gebildeten Dreiecken, die Ausgleichung der überschüssigen Bestimmungen graphisch durchzuführen. Es werden dabei die einzelnen Theile der Rechnung theils durch Constructionen, theils durch die Benutzung graphischer Tabellen ersetzt. Das graphische Verfahren gewährt hier die genügende Genauigkeit, da, was wesentlich ist, nur mit den kleinen Differenzen zwischen den beobachteten Stücken und den entsprechenden, auf einen vorher gerechneten Ort des Punktes $A$ bezüglichen Grössen operirt wird. B.

---

W. JORDAN. Ueber Coordinatengewichte für Triangulirung. Z. f. Verm. V. 107-115.

Behandelt die Gewichtsberechnung der Coordinaten eines Punktes $A$, dessen Lage gegen zwei Fixpunke $B$ und $C$ entweder durch Messung der Winkel in $A$ und $B$ oder in $A$, $B$ und $C$ bestimmt ist. Die Ableitung der in einfacher Form auftretenden Resultate bietet keinerlei Schwierigkeit. B.

---

KOPPE. Trigonometrische Höhenmessung zur Tunneltriangulation. Z. f. Verm. V. 129-145.

Höhenbestimmung von 11 Dreieckspunkten des Gotthardtunnels aus einseitig gemessenen Zenithdistanzen und Ableitung der mittleren Refractionscoefficienten ($k = 0{,}1220$). B.

---

VORLÄNDER. Zur Fehlerausgleichung der Liniennetze aus gemessenen Längen und Winkeln. Z. f. Verm. V. 155-175.

W. JORDAN. Einige allgemeine Betrachtungen über die Fehler in Polygonzügen. Z. f. Verm. V. 175-179.

B.

---

VON MOROZOWICZ. Ausgleichung eines Systems gemessener Höhenunterschiede eines Präcisions-Nivellements; Bestimmung des mittleren Fehlers der Höhenunterschiede. Z. f. Verm. V. 313-345.

Behandelt den mittleren Fehler eines wiederholt ausgeführten Nivellements und die Aenderungen desselben, welche durch Ausgleichung von Schleifen entstehen, unter Anführung eines umfangreichen numerischen Beispiels. B.

---

KOPPE. Bestimmung der Axe des Gotthardtunnels. II. Z. f. Verm. V. 353-382.

B.

---

J. MAREK. Ueber Stabilisirung trigonometrischer Punkte durch Messung von Visuren auf willkürliche, ihrer Lage nach unbekannte Objecte. Z. f. Verm. V. 465-474.

Lösung der folgenden Aufgabe: „Von einem Punkte *M* aus sind nach drei sichtbaren, jedoch ihrer Lage nach unbekannten Objecten *A*, *B*, *C* die Winkel gemessen; man soll aus diesen Winkeln die Lage von *M* auf dem Felde wiederfinden". Man misst von zwei Punkten *P* und *Q* in der Nähe von *M* die auf *PQ* bezogenen Richtungen von *A*, *B*, *C*, dann geben die sämmtlichen bekannten Winkel, verbunden mit der Länge der Standlinie *PQ* die Lage von *M* gegen *P* und *Q*. Die Lösung wird ziemlich einfach, wenn die Seiten des Dreiecks *MPQ* gegen die Entfernungen der Objecte *A*, *B*, *C* von *M* so klein sind, dass man in den Formeln nur ihre Potenzen beizubehalten hat.

B.

---

WIDMANN. Die Coordinirung eines Durchschnittspunktes zweier Linien, deren Coordinaten gegeben sind. Z. f. Verm. V. 474-478.

B.

---

W. Jordan. Die Beziehung zwischen den wahrscheinlichsten Verbesserungen und den mittleren Fehlern von Beobachtungen. Z. f. Verm V. 479-481.

Erläutert durch ein einfaches Beispiel den Unterschied zwischen dem mittleren zu befürchtenden Fehler einer beobachteten Grösse und der bestimmten Correction, welche dieser beobachteten Grösse in Folge einer Ausgleichung zuertheilt werden muss. B.

---

T. J. Lowry. A problem in surveying. Analyst III. 58-59.

Das Problem ist: Gesucht werden die Positionen zweier Beobachtungsstellen $y$ und $m$ in Beziehung auf drei bekannte Punkte $A$, $B$ und $C$, wenn man in $m$ die Winkel $AmB$ und $Bmy$ und in $y$ die Winkel $ByA$ und $Cym$ bestimmt hat. Glr. (O.)

---

J. E. Hendricks. Land surveying. Analyst III. 109-111.

Der Verfasser bespricht einige practische Schwierigkeiten, die bei Landvermessungen auftreten. Glr. (O.)

---

W. Jordan. Ein Beitrag zur Theorie der terrestrischen Strahlenbrechung. Astr. Nachr. LXXXVIII. 99-110.

Der Verfasser benutzt folgende Grundlagen: 1) die Laplace'sche Differentialgleichung für die Lichtcurve, welche sich bekanntlich auf die Annahme sphärischer, concentrischer Luftschichten stützt, unter Einführung gewisser hier zulässiger Vereinfachungen, 2) die Annahme, dass die Lichtcurve sich mit genügender Annäherung als Parabel dritter Ordnung ansehen lasse. Hieraus ergeben sich für die Refractionswinkel einfache Ausdrücke von der Form $\frac{1}{2}CK$, wo $C$ der von den Endpunkten der Lichtcurve eingeschlossene Erdcentriwinkel ist, und die Coefficienten $K$ von den Luftdichtigkeiten und den verticalen Temperaturzunahmen in den Endpunkten der Lichtcurve abhangen. Die Brauchbarkeit

der gefundenen Formeln wird auf Grund einer von Baeyer 1849 im Harze angestellten Beobachtungsreihe discutirt, wobei sich herausstellt, dass, wie auch sonst bekannt, die Kenntniss der verticalen Temperaturänderungen das Hauptelement der Rechnung bildet. Zu bemerken wäre noch, dass bei dem hier erreichten Grade der Approximation die Laplace'sche Differentialgleichung sammt der Annahme concentrischer Luftschichten für die Herleitung der Resultate völlig überflüssig ist. Nothwendig ist nur die Annahme der cubischen Parabel und der bekannte Satz, dass in einem nicht homogenen Medium die Krümmung des Lichtstrahls an jeder Stelle nur von seiner Richtung und den Differentialquotienten des Brechungsexponenten abhängt. Es sei $s$ die Länge der Lichtcurve, $k_0$ und $k$ die Krümmungen in den Endpunkten, $Z_0$ und $Z$ die Winkel zwischen der Sehne und den Endtangenten, so hat man mit Vernachlässigung der dritten Potenzen von $s$ den einfachen Satz aus der analytischen Geometrie

$$Z = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{2k^2+k_0^2}{3}}, \quad Z_0 = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{2k_0^2+k^2}{3}}.$$

Ist ferner $\mu$ der Brechungsexponent des Mediums, $\mu'$ seine erste Ableitung genommen in der Richtung der stärksten Zunahme von $\mu$, $\zeta$ der Winkel zwischen dieser Richtung und der des Lichtstrahls, so ist bekanntlich an jeder Stelle die Krümmung

$$k = \frac{\sin\zeta}{\mu}\mu'.$$

B.

---

D. Zbrožek. Theorie des Polarplanimeters. Krak. Denkschr. II. (Polnisch).

Nach einer kurzen mathematischen Erklärung beschreibt der Verfasser seine Modification des Planimeters, vermittelst welcher man dessen Schenkel bis 360 Grad öffnen kann.

Bcki.

---

C. A. Laisant. Note sur le planimètre polaire de M. Amsler. Mém. de Bord. (2) I. 385-399.

Nach Angabe des Verfassers ist der Inhalt dieser Note in der Hauptsache die Reproduction eines Aufsatzes von Peaucellier in dem „Mémorial de l'officier du Génie" No. 22. Die Note beginnt mit einer eleganten und sehr kurzen Herleitung eines allgemeineren Satzes, aus welchem sich die Theorie des Amsler'schen Polarplanimeters sofort als Specialfall ergiebt. Nachdem ferner die Genauigkeit des Instruments im Vergleiche mit den in der Technik vorzugsweise angewendeten Methoden der mechanischen Quadratur an einem Beispiele erläutert worden ist, wird schliesslich gezeigt, wie sich das Planimeter zur graphischen Lösung folgender Aufgaben benutzen lässt: Addition und Subtraction von ebenen Figuren; Cubatur eines Körpers, wenn die Parallelschnitte desselben gegeben sind; algebraische Summe von Producten aus je zwei Factoren; Inhalt eines Polygons, wenn die Coordinaten der Ecken gegeben sind; Schwerpunkt einer Linie sowie einer ebenen Figur. B.

---

M. Doll. Die Nivellirinstrumente und deren Anwendung. Mit fünf Tafeln. Stuttgart. Bonz & Comp.

Der Inhalt des Werkchens gehört wesentlich dem Gebiete der praktischen Geodäsie an. Es behandelt der Reihe nach die Construction der bekannteren Formen des Nivellirinstruments, erläutert durch detaillirte Abbildungen, die Untersuchung und Constantenbestimmung, die zweckmässigsten Beobachtungsmethoden für das einfache Nivellement, für das Flächennivellement und besonders für das Präcisionsnivellement. Den Schluss bildet die Ausgleichung eines dem badischen Nivellement entlehnten Netzes. B.

---

von Pfeil. Einrichtung des Messtisches auf drei Punkte. Grunert Arch. LVIII. 377-379.

Die hier gegebene Methode, den Messtisch auf drei Punkte einzurichten, beruht auf der Annahme, dass die Entfernung der

Uebertragung des Punktes, über dem man den Messtisch eingestellt hat, von der nach der Parallelstellung der beiden Dreiecke (auf dem Felde und auf dem Messtisch) durch Construction gewonnenen, auf das Feld bezogen als Null angesehen werden kann. M.

---

A. SALMOJRAGHI. Beschreibung und Erklärung des Instrumentes Cleps. Carl Rep. XII. 85-106.

Beschreibung eines speciellen Nivellirinstrumentes und Discussion seiner Fehlerquellen. Mathematisch ist an dem Inhalte nur eine Discussion der einfachen Linsenformel, sowie der Bildgrösse des Linsenbildes, Discussionen, die zur zweckmässigsten Construction führen. Wn.

---

## Capitel 2.

## Astronomie.

E. KNOBEL. Reference catalogue of astronomical papers and researches. Monthl. Not. XXXVI. 365-392.

Dieser Catalog wissenschaftlicher Arbeiten giebt Auskunft über alle Bücher, Abhandlungen und Notizen, die sich auf folgende Gegenstände beziehen: 1) Doppelsterne, incl. der mathematischen Untersuchungen der Bahnen von binären Systemen. 2) Veränderliche Sterne. 3) Rothe Sterne. 4) Nebel und Haufen. 5) Eigene Bewegungen der Sterne. 6) Parallaxe und Entfernung der Sterne. 7) Sternspectra. Der Catalog wurde bei einer systematischen Prüfung der Bücher der Royal Society und der Royal Astronomical Society angefertigt und wird wohl als nahezu vollständig betrachtet werden können in Bezug auf die Arbeiten, die in den Publikationen der wissenschaftlichen Gesellschaften erschienen sind. Glr. (O.)

---

D. LARDNER. Handbook of astronomy. London, Lockwood & Co.

Referat im Quart. J. of Sc. VI.

---

FR. W. BESSEL. Abhandlungen, herausgegeben von Rudolf Engelmann. In drei Bänden. Leipzig 1875-76.

Da ein Referat über dieses Werk mit einer Besprechung der seit drei Jahrzehnten abgeschlossenen Publikationen Bessel's identisch wäre und desshalb ausserhalb des Rahmens dieses Jahrbuches fällt, so mögen nur einige kurze Bemerkungen hier Platz finden. Der Herausgeber hat eine vollständige Ausgabe aller Werke Bessel's nicht beabsichtigt, sondern nur, unter Ausschluss der Recensionen Bessel's, eine Sammlung aller Drucksachen des Königsberger Astronomen, welche für das Studium seiner Arbeiten von bleibendem Werthe sind. Abgesehen von den meist vollständig wiedergegebenen grösseren Arbeiten, enthält diese Ausgabe eine übersichtlich geordnete Sammlung der zahlreichen kleineren Aufsätze, welche in den Zeitschriften zerstreut und deshalb wenig zugänglich sind. Das ganze Material ist in folgende Abtheilungen gruppirt: 1) Bewegungen der Körper im Sonnensystem, 2) Sphärische Astronomie, 3) Theorie der Instrumente, 4) Stellarastronomie, 5) Mathematik, 6) Geodäsie, 7) Physik, 8) Verschiedenes. Wesentlich für den Werth dieses Werkes ist die ausserordentliche Sorgfalt und Umsicht des Herausgebers und die zahlreichen Nachweise über die einschlägige Literatur, speciell aus den Astronomischen Nachrichten.

B.

---

LE VERRIER. Annales de l'observatoire de Paris. Mémoires. Tome XI. u. XII. Paris.

Die beiden Bände bilden einen Theil der von Leverrier unternommenen und kurz vor seinem Tode auch wirklich vollendeten Neubearbeitung der Theorie des Sonnensystems. Sie enthalten die Saecularänderungen der Bahnelemente für Jupiter,

Saturn, Uranus und Neptun; die Theorie der Bewegung des Jupiter und Saturn, endlich für diese beiden Planeten die Tafeln und ihre Vergleichung mit den Beobachtungen.

B.

---

E. Mathieu. Mémoire sur le problème des trois corps. Liouville J. (3) II. 345-370.

Der Verfasser substituirt nach dem Vorgange von Jacobi für die drei Körper zwei fingirte Massen $m$ und $m_1$, bezogen auf einen festen Anfangspunkt $O$, und leitet vermittelst einfacher geometrischer Betrachtungen den Bour'schen Ausdruck für die lebendige Kraft ab, aus dem sich nach den bekannten Methoden die acht canonischen Differentialgleichungen ergeben. Als Variable treten die Radienvectoren $r$, $r_1$ und die Winkel $\xi$, $\xi_1$ auf, welche $r$ und $r_1$ mit der Knotenlinie der Ebene $Omm_1$ auf der invariablen Ebene bilden. Die Neigung der beiden Ebenen ergiebt sich direct und die Knotenlänge durch eine blosse Quadratur, sobald das kanonische System integrirt ist. Hieran schliesst sich eine Untersuchung über den Zusammenhang zwischen den Flächensätzen und den kanonischen Gleichungen, veranlasst durch einen Irrthum in der Bour'schen Arbeit. Als Resultat ergiebt sich, dass zwei Combinationen aus den Flächensätzen sich als Folge des kanonischen Systems herleiten lassen, ferner dass der Flächensatz für jeden der beiden Körper $m$ und $m_1$ einzeln in Bezug auf jede durch $O$ in der Ebene $Omm_1$ gezogene Gerade gilt. Den Schluss bildet eine Vorbereitung zur Anwendung der gefundenen Gleichungen auf den Fall der Astronomie, den der Verfasser speciell für das System Sonne, Jupiter, Saturn in einer späteren Arbeit behandeln will. B.

---

F. Tisserand. Note sur l'invariabilité des grands axes des orbites des planètes. C. R. LXXXII. 442-445.

In der berühmt gewordenen Abhandlung Poisson's über die Unveränderlichkeit der grossen Axen der Planetenbahnen rührt

die Hauptschwierigkeit davon her, dass in den Störungsgleichungen die Störungsfunction nicht für alle Planeten dieselbe ist. Lagrange hatte diesen Uebelstand wenig später dadurch umgangen, dass er die Planeten auf den gemeinsamen Schwerpunkt des ganzen Systems bezog, doch war sein Beweis durch die von Serret entdeckten Rechenfehler wieder in Frage gestellt worden. Herr Tisserand macht nun in der vorliegenden kurzen Note darauf aufmerksam, dass man die von Lagrange erreichte Vereinfachung des Poisson'schen Beweises bewahren, aber den bei Lagrange noch nothwendigen Uebergang vom Schwerpunkt des Systems zurück auf die Sonne vermeiden kann, wenn man die von Herrn Radau (siehe F. d. M. I. 322) eingeführten Coordinaten benutzt, d. h. wenn man den ersten Planeten auf die Sonne, den zweiten auf den Schwerpunkt des ersten und der Sonne, den dritten auf den Schwerpunkt der beiden ersten und der Sonne u. s. w. bezieht. B.

---

L. Hübner. Mathematische Abhandlung. Pr. Marienwerder.

Lagrange geht in seiner Abhandlung über die Knotenbewegung der Planetenbahnen von der Annahme aus, dass, wenn die eine Bahn festgehalten wird, sich die andere auf ihr mit constanter Neigung und constanter Geschwindigkeit des Knotens fortbewege. Für zwei Planeten bietet die Aufgabe keinerlei Schwierigkeit, für drei führt sie bereits auf elliptische Functionen und wurde von Lagrange näherungsweise unter Voraussetzung kleiner Neigungen gelöst. Diese letzte Aufgabe ist in der vorliegenden Arbeit behandelt. Wenn man von der astronomischen Einkleidung absieht, die an sich unwesentlich ist, so lautet die Aufgabe: Es ist die Bewegung dreier grösster Kreise auf der Kugel zu bestimmen, unter Voraussetzung der Lagrange'schen Annahme über die relative Bewegung der Kreise. Sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel des von den drei Kreisen gebildeten sphärischen Dreiecks, so handelt es sich zunächst um die Integration des folgenden Systems von Differentialgleichungen

$$\frac{d\cos\alpha}{dt} = aU, \quad \frac{d\cos\beta}{dt} = bU, \quad \frac{d\cos\gamma}{dt} = cU,$$

wo $a$, $b$, $c$ Constanten,

$$U^2 = 1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Dieser Theil der Aufgabe wird von dem Verfasser mittelst elliptischer Functionen nach verschiedenen Methoden in sehr vollständiger Weise gelöst. Sind ferner $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Neigungen der drei Kreise gegen einen festen Kreis, $u = \cos\xi$, $v = \cos\eta$, $w = \cos\zeta$, so ist noch das System

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Au + Bv + Cw, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = Du + Ev + Fw,$$

$$\frac{d^2w}{dt^2} = Gu + Hv + Kw$$

zu integriren, wo die Coefficienten die Form

$$P + Q(\sin\operatorname{am} Rt)^2$$

haben ($P$ und $Q$ Constanten). Dieser Theil der Aufgabe wird durch successive Approximation mittelst Variation der Constanten im Allgemeinen erledigt, ohne dass jedoch die Grenzfälle näher discutirt werden. Der Schluss behandelt den Ansatz der Bewegungsgleichungen, wenn mehr als drei Kreise gegeben sind.

B.

---

H. Gyldén. Transformation af ett uttryck, innehållande elliptiska transcendenter, jemte tillämpning deruf på utrecklingen af den s. k. Störingsfunctionen. Öfv. Stockholm 1876.

Transformation eines Ausdruckes, welcher elliptische Transscendenten enthält, nebst Anwendung auf die Entwickelung der sog. Störungsfunctionen.

Der Verfasser zerlegt den Ausdruck

$$D^{-\frac{n}{2}} = \left\{1 + 2l_1 \operatorname{Cos}\left(2\operatorname{am}\frac{2k}{\pi}x + \lambda\right) + l^2\right\}^{-\frac{n}{2}}$$

zunächst in zwei imaginäre Factoren, wodurch man erhält

$$D^{-\frac{n}{2}} = \{1+(u+\sqrt{-1}\,v)e^{2\sqrt{-1}\operatorname{am}\frac{2k}{\pi}x}\}^{-\frac{n}{2}}$$
$$\{1+(u-\sqrt{-1}\,v)e^{-2\sqrt{-1}\operatorname{am}\frac{2k}{\pi}x}\}^{-\frac{n}{2}},$$

wo

$$u = l_1 \operatorname{Cos}\lambda;\quad v = l_1 \operatorname{Sin}\lambda.$$

In diesem Ausdruck wird nun

$$e^{2\sqrt{-1}\operatorname{am}\frac{2k}{\pi}x} = e^{2\sqrt{-1}\,x}\left[\frac{\eta(-x)}{\eta(x)}\right]^2$$

eingeführt, wo

$$\eta(x) = (1-qe^{2\sqrt{-1}x})(1-q^3e^{-2\sqrt{-1}x})(1+q^5e^{-2\sqrt{-1}x})\ldots$$

Indem nun von der Gleichung

$$[\eta(x)]^2 = A^{(2)}\cdot\left\{\eta\left(q^2,\ 2x+\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{k_3}\,e^{2\sqrt{-1}x}\,\eta\left(q^2,\ -2x-\frac{\pi}{2}\right)\right\},$$

wo

$$A_0^{(2)} = \frac{1}{[(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})\ldots]^2}(1+2q^4+2q^{16}+\cdots),$$

Gebrauch gemacht wird, gelangt der Verfasser zu einer für die Entwickelung nach den Vielfachen von $x$ anwendbaren Formel.

Gn.

---

H. Gyldén. Om inflytandat af ojemuheter med lång period på uttrycken för periodiska kometers absoluta störinger. Öfv. Stockholm. 1876.

Ueber den Einfluss von Ungleichheiten langer Periode auf die Ausdrücke der absoluten Störungen langer Periode.

Die Ausdrücke

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}2ix_0+\operatorname{Cos}2ix_1+\cdots+\tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}2ix_3,$$
$$\tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}2ix_0+\operatorname{Sin}2ix_1+\cdots+\tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}2ix_3,$$

wo

$$x_m = \frac{\pi}{2K}\int_0^{\Pi+m\mu\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{2-k^2\operatorname{Sin}\varphi^2}}$$

($\Pi$ und $\mu$ bedeuten hier Constanten),

hat der Verfasser früher einfach nach den Vielfachen von $x_3$ entwickelt. Beim Vorhandensein von Ungleichheiten langer Periode

werden diese Reihen jedoch nicht hinreichend convergent, weshalb eine neue Form gesucht wird. Diese erhält der Verfasser, indem die Grösse $[\theta(x_3)]^{-2m}$, wo $\theta(x_3)$ die Jacobi'sche Function und $m$ eine beliebige ganze Zahl bedeutet, als Factor beibehalten wird, so dass z. B.

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}2ix_0+\cdots+\tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}2ix_3=\text{Const.}+\frac{1}{[\theta(x_3)]^{2m}}\left\{\begin{matrix}\Phi_0+\Phi_1\operatorname{Cos}2x_3\\+\Phi_2\operatorname{Cos}4x_3\end{matrix}\right\}.$$

Es wird durch ein numerisches Beispiel gezeigt, dass man damit eine grössere Convergenz erreicht. Gn.

---

B. Baillaud. Exposition de la méthode de M. Gyldén pour le développement des perturbations des comètes. Ann. de l'Éc. Norm. (2) V. 355-398.

Enthält eine übersichtliche Darstellung der Grundzüge der Hansen-Gyldén'schen Methoden zur Berechnung von Cometenstörungen (vgl. über die Gyldén'schen Arbeiten die früheren Bände der F. d. M.). Als Erläuterung ist das auch von Hansen in seiner Pariser Preisschrift behandelte numerische Beispiel, nämlich die Berechnung eines Theiles der Erdstörungen des Encke'schen Cometen, soweit nach der Gyldén'schen Methode durchgeführt, als es zur Verdeutlichung des eigentlichen Kernes der letzteren erforderlich ist. B.

---

J. Hoüel. Sur le développement de la fonction perturbatrice suivant la forme adoptée par Hansen dans la théorie des petites planètes. Prag. Arch. I. 133-214.

Dieselbe Arbeit, über welche F. d. M. VII., 708 berichtet worden ist. M.

---

Tägert. Mathematische Collectaneen. Bemerkung zur Theorie der säcularen Störungen der Planeten. Pr. Siegen. 1876.

B.

---

G. H. DARWIN. Note on the ellipticity of the earth's strate. Messenger (2) VI. 109-110.

Die Formeln sind:

$$\varepsilon = 2A^2E\frac{1-\frac{\varrho'}{D'}}{a^2},$$

$$\varepsilon \infty - \frac{d\log D'}{d(a^2)},$$

wo $\varepsilon$ die Ellipticität der Schicht vom mittleren Radius $a$, und $E,A$ die Ellipticität und den mittleren Radius der Erdoberfläche bezeichnen. $D'$ bezeichnet die mittlere Dichtigkeit und $\varrho'$ die Schnittflächendichtigkeit des Sphäroids mit dem mittleren Radius $a$, wenn man die ausserhalb dieses Sphäroids gelegenen Theile der Erde ausschliesst. Glr. (O.)

---

E. MATHIEU. Mémoire sur le mouvement de rotation de la Terre. Liouville J. (3) II. 33-69, 161-165.

Die Bewegung der Erdaxe im Raume oder die Präcession und Nutation hat seither von verschiedenen Seiten eine für die Bedürfnisse der Astronomie ausreichende theoretische Bearbeitung erfahren, deshalb beschränkt sich die vorliegende Abhandlung auf die Bewegung der Rotationsaxe im Erdkörper, d. h. also auf die Veränderungen, welche die geographischen Längen und Breiten durch die Rotation erfahren. Da die nicht grade einfachen Entwicklungen eine auszugsweise Wiedergabe nicht zulassen, so soll hier nur Folgendes bemerkt werden. Die Arbeit enthält in mehreren wichtigen Punkten eine wesentliche Vervollständigung der bekannten Abhandlung von Poisson über denselben Gegenstand. Den Ausgangspunkt bilden die Störungsformeln für die Rotation eines starren Körpers, und zwar in derjenigen kanonischen Gestalt, welche von dem Verfasser bei einer früheren Gelegenheit mitgetheilt worden ist (siehe F. d. M. VII. 710). Die Grundlage für die Schlüsse besteht in der Ermittelung der Variationen, welche die lebendige Kraft $2h$ und die Grösse

der Axe $k$ der invariablen Ebene erfahren. Hierbei wird die Entwickelung der Störungsfunction bis zu den Gliedern niedrigster Ordnung durchgeführt, welche von der Unsymmetrie des Erdkörpers in Bezug auf den Aequator herrühren. Es ergiebt sich als Resultat, dass die Grössen $k$ und $h$ keine säcularen Terme enthalten, sondern nur periodische Glieder, deren Argument bei $k$ sehr nahe gleich der Sternzeit ist, bei $h$ jedoch ausser der Sternzeit, von einer nahe fünfmonatlichen Periode und von den mittleren Bewegungen der Sonne und des Mondes abhängt. Weiter folgt dann, dass die Abweichung der Rotationsaxe von der Axe des grössten Hauptträgheitsmoments stets nur eine unmerkliche Grösse besitzt, dass die mittlere Rotationsdauer der Erde constant ist, und die Länge der Sterntage bis auf unmerkliche periodische Ungleichheiten unveränderlich ist, so dass in der That der Sterntag als Masseinheit für die Zeit dienen kann. Den Schluss bildet ein Abschnitt, den man wohl als den interessantesten der ganzen Arbeit bezeichnen kann. Unter den Störungsgliedern befinden sich nämlich solche von zehnmonatlicher Periode, die mit $(B-A):B$ als Factor multiplicirt sind, wo $A$ und $B$ die beiden kleinsten Trägheitsmomente bedeuten. Diese Glieder erreichen einen merklichen Betrag, sobald jener Quotient nicht verschwindend klein ist. Umgekehrt beweist nun der Verfasser aus dem factischen Nichtvorhandensein einer merklichen periodischen Ungleichheit in den Polhöhen, dass jener Quotient sicher kleiner ist als der zehntausendste Theil der Erdabplattung. Das beigefügte Supplement enthält Betrachtungen über die möglichen Ursachen dieser ausserordentlichen Kleinheit der Differenz $B-A$. B.

---

F. W. Berg. On the general precession. Monthl. Not. XXXVI. 327-328.

Der Verfasser erhält die Formel:

$$\psi-\psi_1 = \lambda\cos\varepsilon - \lambda\sin\varepsilon\tan\frac{\varepsilon_1-\varepsilon}{2},$$

an Stelle der von Leverrier in den Ann. de l'Observ. de Paris II. 172 gegebenen Formel $\psi-\psi_1 = \lambda\cos\varepsilon$. Glr. (O.)

---

A. G. GREENHILL. Precession and nutation. Quart. J. XIV. 167-179.

Reproduction der Poinsot'schen Methode nach der Connaissance des Temps 1858. Glr. (O.)

---

G. H. DARWIN. On the influence of geological changes on the earth's axis of rotation. Proc. of London XXV. 328-333.

Der erste Theil der Arbeit ist der Betrachtung der Präcession und Nutation eines Ellipsoids gewidmet, welches langsam und gleichförmig seine Gestalt verändert. Es wird angenommen, dass die Veränderungen von inneren Ursachen der Erde herstammen und so lange dauern, als die ganze Veränderung in den Trägheitsmomenten $C$ und $A$ klein bleibt im Vergleich zu ihrer Differenz. Cly. (O.)

---

HANS GEELMUYDEN. Om Indflydelsen af Banens Excentricitet paa den Varmemongde som et Himmellegeme modtager fra Solen. Arch. f. Math. I. p. 438-455.

Es handelt sich um die Wärmemenge, welche ein Himmelskörper von der Sonne empfängt, und den Einfluss, den die Excentricität der Bahn hierauf ausübt. L.

---

F. C. PENROSE. An endeavour to simplify the method of making the correction for the spheroidical figure of the earth in lunar observations and particularly with reference to its effects upon the lunar distance. Monthl. Not. XXXVII. 37-40.

Die Correction für die sphäroidische Gestalt der Erde wird im Allgemeinen bei Mondbeobachtungen vernachlässigt, trotzdem dass sie zuweilen grösser ist, als die kleinen Correctionen, die oft noch beachtet werden. Der Verfasser giebt eine Methode um

diese Correction mit Hülfe eines graphischen Processes auszuführen. Glr. (O.)

---

G. R. Airy. On the present state of the calculations in his new lunar theory. Monthl. Not. XXXVI. 89-91.

Bericht über den augenblicklichen Stand der im Titel angegebenen Rechnungen. Glr. (O.)

---

S. Newcomb. On a hitherto unnoticed apparent inequality in the longitude of the moon. Monthl. Not. XXXVI. 358-361.

Diese Ungleichheit wurde im Verlauf einer Untersuchung bemerkt, die die Bestimmung von Correctionen zum Zweck hatte, welche auf die Mondephemeriden angewandt werden sollten, die aus Hansen's Mondtafeln abgeleitet waren, um bei der Bestimmung von solchen Längen bei den Vorübergängen der Venus benutzt zu werden, die von den Beobachtungen der Occultationen oder der Mondculminationen abhängen. Nachdem alle Correctionen benutzt waren, fand der Verfasser zu seinem Erstaunen noch andere systematische Fehler, welche sich nicht durch Correctionen an den Mondelementen darstellen liessen. An der Realität derselben konnte nicht gut gezweifelt werden, da die Greenwicher und Washingtoner Beobachtungen sie ebenfalls zeigen.

Die Correction an der Mondlänge fand sich

$$\delta v = -1''.50 \sin(g + N - 90^\circ),$$

wo

$$N = 161^\circ.2 + 22^\circ.8(t - 1868.5).$$

Dies ist die bisher noch nicht bemerkte Ungleichheit in der Mondlänge. Glr. (O.)

---

P. Frost. Approximation in the lunear theory. Quart. J. XIV. 179-181.

Methode um zu der Form

$$u = a\{1 + e\cos(c\theta - a)\},$$

als Annäherung in der Mondtheorie zu kommen an Stelle von

$$u = \{1 + e\cos(\theta - a)\}.$$

Cly. (O.)

---

G. W. Hill. Demonstration of the differential equations employed by Delaunay in the lunar theory. Analyst III. 65-71.

Delaunay hat in seinem Werke das canonische System von Gleichungen, welches er anwendet, nicht bewiesen, aber sich auf eine Abhandlung von Binet in dem Journal de l'École Polytechnique Cah. 28 berufen. Der Verfasser giebt hier einen Beweis, der auf directe und elementare Betrachtungen gegründet ist. Glr. (O.)

---

W. H. Finlay. A method of deducing the formulae for correcting the computed time of an observed occultation for errors in the elements adopted. Month. Not. XXXVII. 16-18.

Methode zur Herleitung der gewöhnlichen Formeln.

Glr. (O.)

---

A. Meyer. Ueber die Laplace'sche Theorie der Ebbe und Fluth. I. Theil. Pr. Essen.

Das Referat wird zweckmässig bis zum Erscheinen des Schlusses der Arbeit verschoben. Der Inhalt ist im Wesentlichen eine Darstellung der Laplace'schen Entwickelungen.

B.

---

E. Neison. On the atmosphere of Venus. Monthl. Not. XXXVI. 347-349.

In den Astronomischen Nachrichten von 1849 (No. 679. XXIX. 107) ist über einige Beobachtungen von Clausen und

Mädler über die Verlängerung der Venushörner berichtet. Die horizontale Refraction durch die Atmosphäre der Venus wurde von Mädler mit Hülfe einer Formel hergeleitet. Herr Neison macht auf einen Fehler in der Bezeichnung der Buchstaben in dieser Formel aufmerksam, die Mädler's Resultat ungenau macht.

Glr. (O.)

---

F. Tisserand. Sur les déplacements séculaires du plan de l'orbite du huitième satellite de Saturne (Japhet). C. R. LXXXIII. 1201-1205, 1266-1270.

Enthält eine kurze Mittheilung von Untersuchungen über die Lage der Bahn des achten Saturnstrabanten Japetus, der eine nicht unbeträchtliche Neigung gegen die Ebene des Ringes resp. des Saturnäquators besitzt, während diese Neigung bei den sieben anderen Satelliten unmerklich ist. Die Ebene der Saturnsbahn und des Ringes wird als unveränderlich vorausgesetzt; der säculare Theil der Störungsfunction des Japetus ergiebt sich dann als von der Zeit unabhängig. Dieser Theil lässt sich mit Vernachlässigung von kleineren Gliedern in einfacher Weise aus Grössen zusammensetzen, welche abhängig sind von den Elementen der Saturnsbahn, von der Constitution der Planeten und des Ringes, und von den Bahnelementen und Massen der anderen Satelliten. Man erhält dann die Gleichung

$$K\cos^2\gamma + K'\cos^2\gamma' = C.$$

$K, K'$ und $C$ sind Constanten, die beiden ersten von bekannter Zusammensetzung, $\gamma$ und $\gamma'$ sind die Neigungen der Satellitenbahn gegen die Planetenbahn und die Ringebene. Der Pol der Satellitenbahn beschreibt in Folge dessen eine kleine sphärische Ellipse, und man erhält für den Ort des Poles in seiner Curve sehr einfache Ausdrücke. Von besonderem Interesse ist nun, dass die obige Relation gestattet, unter Benutzung einer Beobachtung von Cassini II. aus dem Jahre 1714 eine obere Grenze für die Masse des Titan, des grössten Satelliten abzuleiten. Den Schluss bildet eine Ableitung elliptischer Elemente aus den Washingtoner Beobachtungen des Japetus von 1874. B.

J. C. Adams. Explication des irrégularités observées dans le mouvement d'Uranus, fondée sur l'hypothèse des perburbations causées par une planète éloignée; comprenant une détermination de la masse, de l'orbite et de la position du corps perturbant. Liouville J. (3) II. 5-33, 69-87.

Die Abhandlung ist bis auf einen kurzen Appendix eine Reproduction der berühmten Arbeit von Adams über die Entdeckung des Neptun. Der Appendix enthält hauptsächlich eine Widerlegung der ziemlich sonderbaren Einwände, welche bald nach der Entdeckung von Peirce gegen die Identität des theoretischen und des wirklichen Neptun erhoben wurden. B.

---

G. H. Darwin. On an oversight in the „Mécanique céleste" and on the internal densities of the planets. Monthl. Not. XXXVII. 77-89.

Der Verfasser macht auf eine Ungenauigkeit aufmerksam, die Laplace bei der Bestimmung der Präcessionsconstanten von Jupiter und Saturn passirt zu sein scheint. Er betrachtet das Gesetz der inneren Dichtigkeiten dieser Planeten und des Mars, sowie die Ellipticität von Mercur und Venus. Seine Schlüsse können, wie folgt, zusammengefasst werden: Die von Laplace gegebenen Werthe der Präcessionsconstanten von Jupiter und Saturn können nicht beibehalten werden. Die Einwürfe bleiben bestehen, wenn weitere Beobachtungen zu Rathe gezogen werden. Professor Adam's Berechnung von $\varepsilon - \frac{m}{2}$ giebt als Ellipticität für Jupiter $\frac{1}{16.02}$. Die Oberflächendichtigkeit von Jupiter ist viel kleiner als die mittlere; die Oberfläche scheint stets in einem halb nebelhaften Zustande zu sein. Dasselbe gilt wahrscheinlich für Saturn. Der Werth der Präcessionsconstante für Jupiter ist ungefähr 0,0548 und der für Saturn wahrscheinlich 0,06. Beim Mars darf man wegen der weiten Fehlergrenzen sich nicht auf die Beobachtungen der Ellipticität verlassen. Man kann dieselbe nur indirect be-

stimmen, und sie scheint $\frac{1}{298}$ zu sein. Bei Mercur und Venus machen indirecte Bestimmungen es wahrscheinlich, dass sie ungefähr $\frac{1}{330}$ und $\frac{1}{260}$ sind. Die Untersuchungen sind hauptsächlich mathematisch. Glr. (O.)

---

F. W. Berg. On the determination of the distances of a comet from the earth from three observations. Monthl. Not. XXXVI. 362-364.

Formeln für die Bahn eines Kometen, derselben Art, wie sie von Gauss in der „Theoria motus" gegeben sind.

Glr. (O.)

---

A. von Miller-Hauenfels. Die Gesetze der Kometen, abgeleitet aus dem Gravitationsgesetz. Graz. Leuschner und Lubensky. 1875.

Eine, die Mängel der Theorie hinreichend hervorhebende Recension findet sich in Grunerts Arch. LIX. Lit. Ber. CCXXXIV. 16.

O.

---

W. Fabritius. Ueber eine strenge Methode zur Berechnung des Ortes von Polarsternen. Astr. Nachr. LXXXVII. 113-118.

W. Fabritius. Zusatz zur Methode der Berechnung des Ortes von Polarsternen durch geradlinige Coordinaten. Astr. Nachr. LXXXVII. 129-134.

Die einfachen Bessel'schen Formeln zur Reduction scheinbarer Sternörter werden für Polsterne ungenau und erfordern Zusatzglieder, welche die Einfachheit aufheben. Die in vorliegendem Aufsatze mitgetheilte Methode beruht darauf, dass man sich die Oerter des Polsterns auf die Aequatorebene projicirt denkt und die Reduction des wahren auf den scheinbaren Ort

resp. umgekehrt für die rechtwinkligen Coordinaten dieser Projection rechnet. Die reducirten rechtwinkligen Coordinaten sind dann wieder rückwärts in Rectascension und Declination umzusetzen, wobei sich freilich die Anwendung siebenstelliger Logarithmen nicht vermeiden lässt, während man bei dem üblichen Verfahren meist nur vier, nie aber mehr als fünf Decimalen braucht. B.

---

Yvon Villarceau. Théorie de l'aberration, dans la quelle il est tenu compte du mouvement du système solaire. Conn. d. temps 1876. Additions 3-67.

Yvon Villarceau. Théorie analytique des inégalités de la lumière des étoiles doubles. Conn. d. temps 1876. Addition 68-105.

Die erste Abhandlung enthält eine vollständige, rein analytisch durchgeführte Untersuchung des Einflusses der Aberration des Lichtes auf die astronomischen Winkelmessungen. Ein näheres Eingehen auf die entwickelten Formeln erscheint hier nicht geboten, da die Herleitung keinerlei Schwierigkeiten bietet, und da die Resultate, soweit sie nicht längst bekannt, sondern dem Verfasser eigenthümlich sind, von diesem bereits bei früheren Gelegenheiten mitgetheilt wurden (siehe F. d. M. IV. 599 und VII. 704). Hervorzuheben wäre nur aus den der Abhandlung angehängten vier Noten die zweite, welche den Einfluss untersucht, welchen eine Verschiedenheit der Lichtgeschwindigkeit bei verschiedenen Lichtquellen namentlich bei Sternbedeckungen ausüben kann.

In der zweiten Abhandlung wird mit denselben Hülfsmitteln der Einfluss der Aberration auf die scheinbare Bewegung der Doppelsterne untersucht. Die Resultate sind folgende: 1) Die Aberration ändert die mittlere Länge des Begleiters für eine gegebene Epoche um eine Quantität, welche von der jährlichen Parallaxe des Sternpaares abhängt. 2) Die Aberration ändert die Umlaufzeit des Begleiters um eine Grösse, die von der Bewegung des Sternpaares in der Richtung der Gesichtslinie ab-

hängt. 3) Die sogenannte Eigenbewegung zusammen mit der Aberration bewirkt eine Ungleichung in der relativen scheinbaren Lage des Begleiters gegen den Hauptstern, welche abhängt von dem Abstande des Begleiters von der Ebene, die durch den Hauptstern senkrecht zur Gesichtslinie gelegt ist. Diese Einwirkungen lassen sich als Ungleichungen in den elliptischen Bahnelementen auffassen. Endlich existirt 4) eine von dem Verhältnisse der Massen der Componenten abhängige Ungleichheit, welche sich nicht mit der elliptischen Bewegung vermischt.

B.

---

Ch. André. Étude de la diffraction dans les instruments d'optique; son influence sur les observations astronomiques. Ann. de l'Éc. Norm. (2) V. 275-355.

Der Inhalt ist vorwiegend physikalisch-astronomischer Natur. Die beiden ersten Capitel behandeln die Diffractionserscheinungen, welche eintreten, wenn die Oeffnung des Fernrohrs gebildet wird von einem Kreise, von concentrischen Kreisringen, von Gittern, die aus kleinen Kreisöffnungen bestehen, und von einem Halbkreise (Heliometer). Die beiden Fälle einer punktförmigen Lichtquelle und einer Lichtquelle von merklichen Dimensionen werden getrennt behandelt und dem entsprechend die trennende Kraft eines Fernrohrs resp. die instrumentale Diffractionsconstante besonders erörtert. Das letzte Capitel behandelt die Consequenzen der vorhergegangenen theoretischen resp. experimentellen Untersuchungen für die astronomischen Beobachtungen, und zwar wird der Einfluss der Diffraction der Reihe nach für folgende Fälle erörtert: Meridianbeobachtungen der Scheiben des Mondes und der Planeten, Längenbestimmung aus Mondculminationen, Bedeckungen, Bestimmung der Sonnenparallaxe aus der parallactischen Ungleichheit des Mondes, Durchgänge der Venus und des Mercur. Von mathematischem Interesse ist nur das erste Capitel, wobei zu bemerken ist, dass die daselbst behandelten Phänomene (mit Ausnahme des Heliometers) bereits eine weit vollständigere und strenge Behandlung mit Hülfe der Bessel'schen Function in

Schlömilch Z. XV. 141—169 (1870) durch Lommel erfahren haben, und dass die für das Heliometer objectiv gegebene Figur nur eine sehr rohe Vorstellung der in Wahrheit äusserst zierlichen und complicirten Diffractionsfigur für diese Oeffnung giebt.

B.

---

E. Lamp. Ueber die Bessel'sche Correctionsformel für Mikrometerschrauben. Astr. Nachr. LXXXVII. 359-366.

E. Lamp. Ueber die Bessel'sche Correctionsformel für Mikrometerschrauben Astr. Nachr. LXXXVIII. 179-182.

Der erste Aufsatz versucht in der Bessel'schen Untersuchung über Mikrometerschrauben, die in dem Werke über das preussische Längenmass mitgetheilt ist, eine sachliche Unrichtigkeit nachzuweisen. In dem zweiten Aufsatze wird dieser Vorwurf im Wesentlichen zurückgenommen. B.

---

Yvon Villarceau. Transformation de l'astronomie nautique, à la suite des progrès de la chronométrie. C. R. LXXXII. 531-537.

Yvon Villarceau. Deuxième note sur la transformation de l'astronomie nautique, à la suite des progrès de la chronométrie. C. R. LXXXII. 580-587.

Bertot. Solution géométrique du problème de la détermination du lieu le plus probable du navire, au moyen d'un nombre quelconque de droites de hauteur, plus grand que 2. C. R. LXXXII. 682-685.

A. Ledieu. Examen des nouvelles méthodes proposées pour la recherche de la position du navire à la mer. C. R. LXXXII. 1414-1418; LXXXIII. 120-122, 188-191.

Fasci. Résumé des règles pratiques de la nouvelle navigation. C. R. LXXXIII. 442-444.

Von diesen Aufsätzen, welche sich sämmtlich auf denselben Gegenstand beziehen, sind die beiden letzten nur für die praktische Nautik von Interesse. Die „nouvelle navigation“ und die „nouvelles méthodes“ sind im Grunde nur die naheliegende Ausführung einer Idee, welche bereits 1847 praktisch von Capt. Sumner verwerthet worden war. Es sei durch das Chronometer die Ortszeit des ersten Meridians gegeben und die Höhe eines bekannten Gestirns gemessen, dann kennt man unmittelbar die geographische Länge und Breite des Gestirns, d. h. des Ortes, der das Gestirn im Zenith hat. Das Schiff muss sich dann auf demjenigen Kreise auf der Erdkugel befinden, der jenen Ort zum Mittelpunkt und die beobachtete Zenithdistanz zum Halbmesser hat. Dieser Kreis ist der Höhenkreis, seine Abbildung auf der Mercator'schen Karte die Höhencurve, und die Gerade, welche man in der Praxis für ein kleines Stück der Höhencurve substituiren kann, die Höhengerade (Sumner'sche Linie). Um nun den Ort der Schiffe auf den Höhengeraden zu finden, bedarf man noch eines zweiten Datums. Wählt man hierzu die geschätzte Länge oder Breite des Schiffes oder beide vereint, so erhält man als entsprechende geometrische Oerter den Meridian oder Parallelkreis des Schiffes oder den Verticalkreis der Gestirne, deren Durchschnitt mit der Höhengeraden den gesuchten Ort liefert. Die hierauf beruhenden Methoden sind in dem Aufsatze von Ledieu näher discutirt.

Die Methode von Villarceau beruht nun darauf, dass man den Schiffsort als Durchschnitt zweier oder mehrerer Höhengeraden aufsucht, die zu verschiedenen gleichzeitig beobachteten Sternen gehören. In den beiden Aufsätzen sind die erforderlichen Rechenvorschriften, deren Entwickelung keine Schwierigkeiten darbietet, abgeleitet und näher erörtert.

Wenn mehr als zwei Höhen beobachtet sind, so werden in Folge der Beobachtungsfehler die entsprechenden Höhengeraden im Allgemeinen sich nicht in demselben Punkte schneiden, wie es sein sollte, und es handelt sich dann darum, den wahrscheinlichsten Ort des Schiffes zu finden, ausgehend von der Forderung, dass die Quadratsumme seiner Abstände von den Höhengeraden

ein Minimum wird. Der Aufsatz von Bertot giebt zu dieser Aufgabe eine rein synthetische und sehr einfache Lösung.

B.

---

TITO ARMELLINI. Risoluzione di alcuni problemi gnomonici. Acc. P. d. N. L. XXIX. 38-41.

Enthält eine theils synthetische, theils analytische Lösung folgender Aufgaben der Gnomonik:

1) Gegeben die Projection der Spitze des Gnomons auf eine Mauer von unbekannter Declination und Inclination; ferner die Höhe des Gnomons, man soll aus zwei Schattenbeobachtungen am Tage des Aequinoctiums ohne Kenntniss der Ortsbreite den Meridian finden.

2) Man soll aus zwei Schattenbeobachtungen an einer verticalen Mauer den Meridian finden, wenn man nur noch die Ortsbreite, aber nicht die Declination der Mauer und der Sonne kennt.

B.

---

F. MELDE. Theorie und Praxis der astronomischen Zeitbestimmung. Tübingen. Sauppe.

---

# Anhang.

P. Riccardi. Biblioteca matematica italiana. Modena. Bd. II.

Schluss des Werkes, über dessen früheren Theil in Bd. VII. p. 16 d. F. berichtet worden ist. O.

J. Ch. Walberer. Leitfaden zum Unterrichte in der Arithmetik und Algebra. München. Ackermann.

Das Buch enthält den Unterrichtsstoff aus der Arithmetik und Algebra bis zum binomischen Lehrsatze inclusive. Die Darstellung und Anordnung ist zweckentsprechend klar und einfach, und dürfte sich das Buch zum Gebrauche empfehlen. O.

D. Höhr. Lehrbuch der Arithmetik für Untergymnasien und verwandte Lehranstalten. 2 Theile. Wien. Sallmayer.

Enthält den gewöhnlichen Unterrichtsstoff bis zu den Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren Unbekannten. O.

F. Hoza. Die Zinseszinsrechnung und Rentenrechnung. Casopis V. (Böhmisch).

Ein Lehrbuch für Mittelschulen. W.

R. Potts. Elementary aritmetic. Cambridge, London. Macmillan.

Referat im Quart. J. of Sc. VI. M.

---

J. Gregory. British metric arithmetic. London, Paris, New-York, Cassel. Petter & Golpin.

Referat im Quart. J. of Sc. VI. M.

---

A. Evans. The problem of the pasturage. Analyst III. 75-78.

A. Martin. Solution of the pasturage problem. Analyst III. 111-128.

Das Problem findet sich in Newton's Arithmetica universalis (Ralphsen's Ausg. 1728) und lautet: „Wenn *a* Ochsen auf der Wiese *b* während der Zeit *c* weiden, und *d* Ochsen ebensogut auf einem Weidestück *e* während der Zeit *f*, und das Gras gleichförmig wächst; wieviel Ochsen können auf der gleichen Weide *g* während der Zeit *h* weiden.“ Herr Evans giebt die Newton'sche Lösung und fügt Bemerkungen über die neuere Geschichte dieses Problems hinzu, welches in Amerika 1835 als Preisfrage aufgestellt war. Die Arbeit enthält auch eine Liste der verschiedenen Ausgaben der Arithmetica universalis. Herr Martin giebt in seiner Arbeit eine andere Lösung des Problems.

Glr. (O.)

---

Müller. Kürzeste Methode für Ausziehung der Cubikwurzel. Hoffmann Z. VII. 34-39, 292-295.

Das vom Verfasser erdachte Schema besteht aus einer Hauptrechnung, in welcher unter jedem Rest der volle Werth des nächsten Subtrahends $3a^2b+3ab^2+b^3$ steht, und einer Nebenrechnung unter 3 Rubriken $3a^2$, $3ab^2$, $3a^2b+3ab^2+b^3$, die erste und dritte mit übereinander gestellten Summanden, derart, dass man immer mit Benutzung vorausgehender Resultate das neue

durch einziffrige Multiplication findet; ausserdem wird über den gefundenen Wurzelziffern das Verdreifachte notirt. (Vgl. Stammer, Angebliche Verbesserungen hierzu von Temme p. 127, Henrici p. 197). H.

---

A. Kurz. Aus der Schulmappe. Miscellen. Hoffmann Z. VII. 288-289.

Elementar wird hergeleitet das Torsionsgesetz, dann das Pendelgesetz bei 2 materiellen Punkten als Uebergang zum physischen Pendel, dann das Gesetz des unelastischen und elastischen Stosses. H.

---

G. Pick. Bemerkung über lim $(1^\omega)$ $(\omega = \infty)$. Hoffmann Z. VII. 289-291.

Der Verfasser ist nicht zu der Einsicht gelangt, dass der Werth von lim $a^\omega$ durch die Relation zwischen $a$ und $\omega$ bedingt ist. Die Bemerkung ist unklar und unrichtig. H.

---

G. Helmert. Zur Herstellung graphischer Tabellen mit zwei Eingängen. Z. f. Verm. V. 24-27.

Es sei $w$ als Function $F(u, v)$ der rechtwinkligen Coordinaten $u, v$ gegeben; man denke sich das Coordinatennetz und die Curven $w =$ constant für eine Anzahl von Werthen der $w$ construirt, dann kann diese Figur offenbar dazu dienen, um zu einem gegebenen Werthepaar $u, v$ sofort den zugehörigen Werth von $w$ abzulesen. Hieran ändert sich nichts wesentliches, wenn man als Coordinaten nicht $u$ und $v$, sondern $x = F_1(u)$ und $y = F_2(v)$ abträgt und den Strecken die Zahlenwerthe von $u$ und $v$ beischreibt. Die Curven $w$ nehmen natürlich eine andere Gestalt an, und man kann diese Umformung dazu benutzen, um den $w$-Curven eine möglichst einfache Gestalt zu geben. In dem vorliegenden Aufsatze werden nun die Bedingungen untersucht, unter denen sich die $w$-Curven als Gerade, resp. als Kreise dar-

stellen; als Erläuterung ist die Construction des graphischen Einmaleins behandelt. Analoge Constructionen erhält man, wenn $w$ und $v$ als Coordinaten genommen werden. Beide Methoden haben das Gemeinsame, dass es immer gleichzeitig möglich ist, die Curven als parallele Gerade, als Gerade durch einen Punkt und als concentrische Kreise zu wählen. B.

---

P. Gray. Tables for the formation of logarithms. London, Sayton.

---

P. Mansion. Démonstration élémentaire de deux formules logarithmiques. Grunert Arch. LX. 105-106.

Von der gleichseitigen Hyperbel $xy = 1$ ausgehend, leitet der Verfasser her:

$$\log(1+z) = z - \frac{\theta z^2}{2}, \quad 0 < \theta < 1,$$

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \theta' \frac{z^3}{2}, \quad 0 < \theta' < 1.$$

Setzt man ferner

$$\log(1+z) = u,$$

so ergiebt sich

$$z = \theta^{IV}(1 - \sqrt{1-2u}), \quad 0 < \theta^{IV} < 1.$$

O.

---

R. Hoppe. Bemerkung über die Berechnung vielstelliger Logarithmen. Grunert Arch. LVIII. 437-439.

Es wird darauf aufmerksam gemacht, dass die zur Construction der gewöhnlichen Logarithmentafeln erforderliche Reduction der natürlichen Logarithmen auf die Grundzahl 10 in dem Falle, wo es sich um Berechnung einzelner Logarithmen ausser dem System handelt, ganz unnöthig, meist sogar zweckwidrig ist, dass demnach Hülfstafeln zur directen Berechnung, welche in neuerer Zeit sehr zahlreich herausgegeben und stets auf die Grundzahl 10 eingerichtet worden sind, abgesehen von der überflüssigen Mühe

des Autors, Jedem, der sie gebraucht, eine sich beständig wiederholende nutzlose Arbeit auferlegen, die sich sogar verdoppelt, wenn der natürliche Logarithmus das Endziel der Rechnung ist.

H.

---

R. Hoppe. Tafeln zur dreissigstelligen logarithmischen Rechnung. Leipzig 1876. C. A. Koch.

Die directe Berechnung der Logarithmen beliebig gegebener Zahlen nebst ihrer Inversen, welche durch gegenwärtige, auf natürliche Logarithmen eingerichtete Tafeln unterstützt werden soll, beruht auf dem bekannten Verfahren, die gegebene Zahl durch vorgängige Abscheidung eines ein- oder zweizifferigen Factors der Einheit hinreichend nahe zu bringen, dann in Factoren von der Form

$$1+n.10^{-k} \qquad (n, k)$$

zu zerlegen. Zum Zweck der erstern giebt Tafel IV. die bequemsten Multiplicatoren an, derart, dass nur eine ein- oder zweiziffrige Multiplication oder eine einziffrige Division zu vollziehen ist, mit dem Erfolge, dass die Reihe der $k$ stets mit 2 beginnen kann. Vorausgehen muss dieser eine Verrückung des Kommas eine Stelle vor die erste Ziffer; die Tafel I. giebt hierzu die Vielfachen von log 10, Taf. II. die Logarithmen der Zahlen 2-99, d. i. der möglichen Multiplicatoren. In Betreff der Factoren $(n, k)$ sind noch folgende Rechnungskürzungen in Anwendung gebracht. Erstlich ist $(n, k)$ nicht als Factor, sondern als Divisor zu denken, so dass man die successiven Ziffern $n$ (d. i. 1, 2,...9) durch Multiplication, und zwar mit der blossen Ziffer $n$ und nachfolgender Addition zum Vorigen als erste Ziffer des Resultats findet.

Ferner sind (auf Tafel III.) statt der Logarithmen von $(n, k)$ die Werthe der Function

$$n.10^{-k}-\log(1+n.10^{-k})$$

angegeben. Da deren Entwickelung mit der zweiten Potenz von $n.10^{-k}$ beginnt, so wird eine beträchtliche Anzahl von Posten erspart, und es bleibt schliesslich nur $\sum n.10^{-k}$ unmittelbar in Decimalform vorliegend zu subtrahiren.

Zur inversen Rechnung dienen dieselben Tafeln: bei der Anwendung jedoch sind die Grössen $(n, k)$ als Factoren der gesuchten Zahl anzusehen, so dass wiederum damit bloss multiplicirt wird. Hierbei ist die Ziffer $n$ bei jeder einzelnen Addition vor die Anfangsziffer des Products von $n \cdot 10^{-k}$ mit dem vorhergehenden Resultate hinzuzuschreiben. Aus den ersten Ziffern des gegebenen Logarithmus, verglichen mit den Tafeln I. u. II. erkennt man leicht die ergänzende Potenz von 10 und den ergänzenden zweiziffrigen Factor, deren Logarithmen anfänglich subtrahirt werden müssen. Auch hier giebt sich jedes folgende $n$ als Anfangsziffer des vorhergehenden Resultats kund.

In Betreff beider Rechnungen bemerkt man leicht, dass, wenn $k$ die halbe beabsichtigte Stellenzahl erreicht hat, die restirenden Ziffern den restirenden Logarithmus genau darstellen, und zu $\Sigma n \cdot 10^{-k}$ nur einfach hinzugeschrieben zu werden brauchen, während sie bei den $(n, k)$ ganz übergangen werden.

Den Tafeln geht eine Erklärung, Gebrauchsanweisung und das ausgeführte Beispiel einer Potenzirung einer 30ziffrigen Zahl voraus.

H.

---

Tägert. Mathematische Collectaneen. Die natürlichen Logarithmen einiger Primzahlen bis auf 100 Decimalstellen berechnet. Pr. Siegen.

Enthält die hundertstelligen Logarithmen von 80 Primzahlen und Bemerkungen über die Art ihrer Ermittelung.

B.

---

C. Bremiker. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit 6 Decimalstellen. Mit besonderer Rücksicht auf den Schulgebrauch. 4[te] Aufl. Berlin. Nicolai.

Neue Auflage der bekannten Tafel, die sich in ihrer äussern Ausstattung vollständig den siebenstelligen Vega'schen Tafeln anschliesst.

O.

---

J. Hoüel. Supplément logarithmique par Leonelli, précédé d'une notice sur l'auteur. Paris. Gauthier-Villars.

Wiederabdruck des seltenen Werkes, welches zuerst den Gedanken der Additions- und Subtractionslogarithmen enthält, wie übrigens auch Gauss (Werke III. p. 244) angiebt. Voran geht eine Notiz über das Leben Leonelli's. O.

---

E. F. August. Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Elfte Auflage von F. August. Leipzig. Voit.

Die Tafel hat gegen früher mannigfache Verbesserungen erfahren. Sie enthält die fünfstelligen Logarithmen der Zahlen und trigonometrischen Functionen von Minute zu Minute, die Proportionaltafeln für Zehntel-Minuten bestimmt. Es folgen dann abgekürzte Tafeln der 7stelligen Mantissen der dekadichen Logarithmen, und der trigonometrischen Functionen von 10 Minuten zu 10 Minuten. Der Anhang enthält die vierstelligen Quadrate der Zahlen von 0,000 bis 2,100, Angaben über das Sonnensystem, die Dimensionen des Erdsphäroids und eine Ortstafel. Die Anordnung bewährt sich beim Gebrauch als praktisch.

O.

---

M. Wiberg. Logarithmentafeln ausgerechnet und gedruckt mit der Rechenmaschine. Stockholm. 1876.

Nach jahrelangen Bemühungen ist es Herrn Wiberg gelungen, die vorliegenden, von einer Maschine berechneten und gedruckten Tafeln herzustellen. Näheres über diese Maschine findet man in den C. R. LVI. vom Jahre 1863, wo dieselbe in dem Bericht der Herren Mathieu, Chasles und Delaunay besprochen ist. Die Tafeln enthalten die Brigg'schen Logarithmen, Tafeln der natürlichen Logarithmen von 1 bis 1000 und die Logarithmen der trigonometrischen Functionen. Bei der Anordnung haben die Tafeln von Bremiker und Dupuis als Muster gedient. Die typographische Ausstattung ist gut, wenn sie sich auch nicht in jeder

Beziehung mit den neuesten Tafeln von Bruhns, Bremiker etc. messen kann. Referent kann nur wünschen, dass die Tafeln recht weite Verbreitung finden mögen und dadurch dem Erfinder die Möglichkeit geboten werde, seinen Weg zur Construction von Tafeln auch auf andere Gegenstände auszudehnen.

O.

---

R. W. Bauer. Femciffrede Logarithmer til hele Tal fra 1—15500 og Anti-Logarithmer. Kjöbenhavn. 1876.

Die am meisten gebräuchlichen fünfstelligen Logarithmentafeln sind mit mehreren Mängeln behaftet, die ihren Gebrauch für Rechner nicht hinreichend bequem machen; dieselben sind bei der vorliegenden Tafel glücklich vermieden. Sie enthält ausser den fünfstelligen Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1 bis 15500 noch fünfstellige Anti-Logarithmen aller vierziffrigen Mantissen, beide Tafeln mit Proportionaltheilen versehen, sammt einer Hülfstafel zur Berechnung von funfzehnstelligen Logarithmen und Anti-Logarithmen, und eine kurze Erklärung über den Gebrauch der Tafeln. Die beiden ersten der genannten Tabellen sind nach doppeltem Eingange geordnet. Die benutzten Ziffern sind sehr deutlich, sie könnten jedoch vielleicht ohne der Deutlichkeit zu schaden ein wenig kleiner gewesen sein, wodurch man eine Beschränkung des ziemlich grossen Formates erreicht haben würde.

Gm.

---

G. Luvini. Tavole di logaritmi a sette decimali. Torino. Paravia.

Die Tafel enthält die Logarithmen der Zahlen bis 20040 mit Differenzen und Proportionaltheilen, die natürlichen und künstlichen Logarithmen der Primzahlen bis 1200 auf 20 Stellen, die Logarithmen der trigonometrischen Functionen, die Arcus, die Quadrat- und Cubikwurzeln bis 625 und eine Constantentafel.

O.

---

J. W. NEWMAN. A twelve place table of the exponential functions. Proc. of Cambr. IV. 24.

Herr Newman macht der Gesellschaft Mittheilung von einer Tafel für $e^{-x}$ von $x = 0{,}000$ bis $x = 5{,}400$ in Intervallen von 0,001 auf 12 Decimalstellen. Er hat die Tafel fortgesetzt bis $x = 18{,}000$. Die ganze Tafel bis dahin, wo $e^{-x}$ bei 12 Stellen verschwindet, (aber mit wachsenden Intervallen gegen das Ende), ist jetzt unter der Presse und wird im nächsten Bande der Transactions der Gesellschaft erscheinen. Glr. (O.)

P. GRAY. Values of the trigonometrical quadratic surds. Messenger (2) VI. 105-106.

Werthe der Grössen

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5}, \ldots \sqrt{5+\sqrt{5}},\ \sqrt{10+2\sqrt{5}}, \ldots \sqrt{5-\sqrt{5}}, \ldots \sqrt{30-6\sqrt{5}}$$

auf 24 Stellen. Auf 10 Stellen sind diese Werthe publicirt in Ursin's Tafeln, Appendix III., sinus ternorum graduum quadrantis, ebenso in Hulton's und anderen Tafeln. Auch wird der Werth von $\sqrt[3]{2}$ auf 32 Stellen hinzugefügt. Glr. (O.)

P. GRAY. Numerical values of certain quantities. Messenger (2) V. 172-173.

Enthält den Werth der Cubikwurzel von 2 auf 27 Stellen und den von log Brigg. M. (= log log $e$) auf 24 Stellen. Die Verification des Werthes von $\sqrt[3]{2}$ auf 24 Stellen durch Thomas von Colmar's Arithmometer wird hinzugefügt, um die Art der Anwendung dieses Instrumentes bei langen Zahlen zu erläutern. Glr. (O.)

J. W. L. GLAISHER. Preliminary account of the results of an enumeration of the primes in Dase's tables (6,000,000 to 9,000,000). Proc. of Cambr. III. 17-23.

Burckhardt's Tafel giebt die kleinsten Theiler aller Zahlen

in den ersten 3 Millionen und Dase's in den 3 Millionen von 6,000,000 bis 9,000,000. 1871 hatte der Verfasser die Primzahlen in den 6 Millionen, über welche sich die Tafeln erstrecken, durch zwei Zähler unabhängig von einander zählen lassen, und die Resultate für die 2te und 9te Million in den Reports of the British Association für 1872 publiciren lassen mit den theoretischen Zahlen, die sich aus Tchebycheff's Formel ergeben. Neuerdings ist die ganze Arbeit von einem neuen Rechner für die 6 Millionen wiederholt worden. In dem vorliegenden vorläufigen Bericht werden die Resultate für die 7te, 8te und 9te Million veröffentlicht. Die Zahl der Primzahlen in jeder Viertelmillion von 6,000,000 bis 9,000,000 sind:

| | 7te Million: | 8te Million: | 9te Million: |
|---|---|---|---|
| Erstes Viertel . . . | 15967 | 15851 | 15712 |
| Zweites Viertel . . | 15941 | 15772 | 15652 |
| Drittes Viertel . . | 15950 | 15768 | 15746 |
| Viertes Viertel . . | 15941 | 15767 | 15650 |
| Summe . . . | 63799 | 63158 | 62760. |

Die Resultate sind in quadratischen Tafeln zusammengestellt, ähnlich wie bei Gauss (Werke II. 436-447).

In der 6ten Million giebt es zwei Hunderte, die 15 Primzahlen enthalten, aber in der 7ten und 8ten Million enthält kein Hundert so viel. 14 Primzahlen enthalten 3 Hundert in der 7ten Million, 2 in der 8ten und 9ten. Keine Primzahl giebt es in der 7ten Million in 6 Hunderten, in der 8ten und 9ten 4.

Die entsprechenden Tafeln für die ersten 3 Millionen (nach Burckhardt) mit einer Vergleichung der Aufzählungen von Legendre, Hargreave, Meissel etc. findet sich in den Proc. III. 47—56 (1877). Glr. (O.)

---

H. Evers. Nautical and mathematical tables.
London & Glasgow, W. Collins & Sons.

Referat im Quart. J. of Sc. VI.

A. Sadebeck. Angewandte Krystallographie, nebst einem Anhang über Zonenlehre. Berlin. Mittler u. Sohn.

Von mathematischem Interesse an der rein krystallographischen Arbeit ist der Anhang, die Zonenlehre enthaltend. Es wird die bekannte Projectionsmethode entwickelt, die zuerst von F. Neumann angegeben, von Rose und Quenfeldt weiter ausgebildet ist. Bei dieser Methode werden alle Flächen des Krystalls durch einen Punkt gelegt und ihre Schnitte mit einer festen Ebene, der Projectionsebene, bestimmt. Aus der Projection werden die krystallographischen Zeichen der einzelnen Flächen abgeleitet, sowie die Zonenverbände der einzelnen Krystallsysteme (unter Anwendung einfacher Formeln der analytischen Geometrie) bestimmt. Wn.

---

J. Bosscha. La Commission internationale du mètre et la conférence diplomatique du mètre. Versl. en Mededeel. X. 273-307.

Bekanntlich fanden im Jahre 1875 in Paris die Sitzungen der „conférence diplomatique du mètre“ statt. Zu technischen Abgeordneten der Niederlande waren die Herren Stamkart und Bosscha ernannt, doch wegen Krankheit des ersteren nahm nur der letztere an den Berathungen Theil. Derselbe giebt in der obigen Abhandlung einen ausführlichen Bericht seiner Erlebnisse und dann eine Geschichte der Entstehung und der Schicksale der Commission. Als durch den Schweizerischen Abgeordneten Hirsch vorgeschlagen wurde, die temporäre Commission in ein bleibendes „Bureau international des poids et mésures à Paris“ zu verwandeln, hat der Niederländische Abgeordnete nach reiflicher Ueberlegung diesen Vorschlag entschieden und auf wissenschaftlichem Grunde hin bekämpften. Nach mannigfachem mündlichem und schriftlichem Gedankenaustausch zwischen den Abgeordneten der verschiedenen Staaten wurde der Vorschlag Hirsch von der grossen Mehrheit der versammelten Deputirten angenommen. und in Folge davon sah sich der Niederländische Abgeordnete in Uebereinstimmung mit seinem Mandate genöthigt, sich von den

weiteren Sitzungen der Commission fernzuhalten. Einen ebensolchen Beschluss fasste der Abgeordnete Englands Chisholm. Die ursprüngliche „Commission internationale“ wurde also aufgelöst und durch das „Comité perpétuel“ ersetzt, ehe sie noch etwas zu Stande gebracht hatte, und hiermit sah der Herr Bosscha sein Mandat als beendigt an. Der Bericht über die von ihm gemachten Erfahrungen ist ein höchst merkwürdiges Schriftstück, welches verdient, dass ein jeder, welcher die Verhandlungen der Commission unpartheiisch kennen zu lernen und zu beurtheilen wünscht, davon Kenntniss nimmt. G.

---

# Namenregister.

# Berichtigungen.

---

Seite 2 Zeile 6 von unten lies Gm. statt Grn.
„ 4 „ 3 „ „ „ P. Tannery statt M. Tannery.
„ 21 „ 10 „ „ „ J. J. B. Abria statt O. Abria.
„ 37 „ 2 „ oben „ Reseberättelse statt Reseberâttelse.
„ — „ 3 „ „ „ Årskrift ... Naturvetenskap statt Arskrift ... Naturwetenskap.
„ 61 „ 6 „ unten „ Härledning statt Harledning.
„ — „ 5 „ „ „ ternäre statt ternära.
„ 67 „ 13 „ oben „ A. L. Cauchy statt N. L. Cauchy.
„ 70 „ 2 „ unten „ högre läroanstalter statt högne laroanstalten.
„ — „ 2 „ „ „ sjelfstudium statt yelfstudium.
„ — „ 1 „ „ „ utarbetad statt utasbetact.
„ 86 „ 3 „ oben „ Šimerka statt Simerko.
„ . „ 9 „ unten „ I. statt II.
„ 117 „ 11 „ „ „ u. f. verbessere die y in ij.
„ 128 „ 11 „ oben lies nicht zu existiren statt zu verschwinden.
„ 230 „ 7 „ unten „ Jets statt Lets.
„ 242 „ 2 „ oben „ rational ... hvilken statt rational ... huilken.
„ — „ 2 „ „ „ blir oändlig statt bliv oandlig.
„ — „ 3 „ „ „ endast föreskrifna oöndlighed statt endact foreskrifna oandlighets.
„ — „ 4 „ „ „ hvilkas ... äro på färhand statt huilkas ... ana påa forhand.
„ — „ 5 „ „ streiche Meddellad.
„ — „ 5 „ „ lies Öfvers. Förh. statt Ofverr. Forh.
„ 246 „ 15 „ „ „ Kapteyn statt Kapheyn.
„ — „ 7 „ unten „ Liwenzoff statt Zievenzoff.
„ 248 „ 1 u. 4 von oben ebenso.
„ 260 „ 1 von oben lies för statt for.
„ — „ 2 „ „ „ härleda ... oändliga statt hasleda ... oundligda.
„ — „ 3 „ „ „ utur statt utus.
„ 321 „ 18 „ „ „ vielleicht zu kurz statt zu kurz.
„ — „ 24 „ „ „ Die Methode der Grenzen (nach Brasseur s. F. d. M. V. 147) statt Die Methode der Grenzen.
„ — „ 27 „ „ „ zu wenig statt wenig.

Seite 533 Zeile 3 von oben füge hinzu: Der Referent hat gefunden, dass die durch die Gleichungen $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = -\frac{z}{z'}$ definirte Transformation umkehrbar ist.

„ 556 „ 10 „ unten lies Rolla statt Rolle.

„ — „ — „ „ „ Hoepli statt Hoepler.

„ — „ 2 u. 1 von unten streiche den letzten Satz.

„ 563 „ 7 von unten lies von der entferntesten Tangente statt von den Tangenten.

„ — „ 4 „ „ „ $\frac{k^2}{v}$ statt $\frac{k}{v}$.

„ 565 „ 7 „ oben lies $T$ statt $J$

„ „ 17 „ „ „ Verhältnisses, dessen geometrische Bedeutung gezeigt ist; dies $J$ löst das Problem. statt: Beziehung, deren Bestimmung gezeigt wird $J$. löst dann das Problem.

„ — „ 21 u. f setze statt des Absatzes von: als die analytische, etc., denn, während diese voraussetzt, dass man den Querschnitt so in Theile zerlegen kann, dass ihre Trägheitsmomente analytisch bestimmbar sind, und für jeden besonderen Fall specielle und künstliche Processe erfordert, geht jene gleichmässig und allgemein für beliebige Figuren, regelmässig oder unregelmässig, für Dreiecke und Rechtecke, sowie für Eisen von den T, I, V u. s. w.

„ 565 „ 4 von oben lies Zore's Eisen statt $Z$-förmige Eisen.



